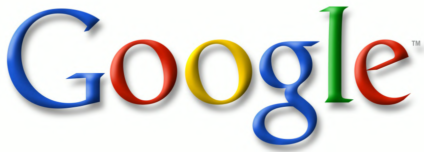

Google







PGG

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET

LE MAGNÉTISME

Les *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* ont été publiées en 2 volumes :

TOME PREMIER. — Phénomènes généraux et théorie.

TOME SECOND. — Méthodes de mesure et applications.

Chaque volume est vendu séparément 25 francs.
Le prix des 2 volumes pris ensemble est fixé à 45 francs.

792-95. — CORBEIL. Imprimerie ED. CRÉTÉ.

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET

LE MAGNÉTISME

DE

E. MASCART ET J. JOUBERT

DEUXIÈME ÉDITION ENTIÈREMENT REFONDUE

PAR

E. MASCART

MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE
DIRECTEUR DU BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE

TOME SECOND

MÉTHODES DE MESURE ET APPLICATIONS

Avec 160 Figures dans le texte.

PARIS

MASSON ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, Boulevard Saint-Germain

GAUTHIER-VILLARS ET FILS
IMPRIMEURS-ÉDITEURS
Quai des Grands-Augustins, 55

1897

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE MAGNÉTISME

TOME DEUXIÈME

PREMIÈRE PARTIE. — MÉTHODES DE MESURE

CHAPITRE PREMIER

MESURES MÉCANIQUES

LONGUEURS, MASSES ET ANGLES

518. Longueurs. — Nous n'avons pas à insister ici sur la mesure des longueurs rectilignes; ce sont les opérations les plus fréquentes de la physique et elles ne présentent aucune difficulté particulière quand on ne cherche pas à atteindre les dernières limites de la précision. Nous nous bornerons à rappeler quelques-unes des corrections qu'elles entraînent.

La *règle* employée pour la mesure des longueurs est habituellement divisée en millimètres. Quelle que soit d'ailleurs la valeur des divisions, on évalue les fractions de division, soit par un vernier, soit par une lunette à micromètre; il est clair aussi que l'exactitude donnée par un mode quelconque de subdivision ne peut pas dépasser la précision avec laquelle la règle a été graduée.

La règle doit donc être étudiée au point de vue de l'égalité des divisions et l'on fera, au besoin, une table de leurs rapports à la valeur moyenne a.

D'autre part, il faut connaître la correction ε, positive ou négative, de la règle à zéro, c'est-à-dire la différence de la valeur nominale L à la longueur réelle L, $\mathrm{L} = L + \varepsilon$, ou la température normale t_0, généralement peu éloignée des températures ordinaires, pour laquelle la règle devient exacte. On a alors, en appelant λ le coefficient de dilatation linéaire,

$$\mathrm{L} = L + \varepsilon = L(1 + \lambda t_0), \quad \varepsilon = L\lambda t_0.$$

La longueur réelle à zéro d'une division moyenne de valeur nominale a est $\frac{a}{1 + \lambda t_0}$ et sa longueur à la température t peut s'écrire, avec une approximation suffisante,

$$a\frac{1 + \lambda t}{1 + \lambda t_0} = a[1 + \lambda(t - t_0)].$$

La longueur l d'un objet mesuré ainsi par n divisions, ou une lecture $m = na$ de la règle, est donc

$$(1) \qquad l = m[1 + \lambda(t - t_0)].$$

Si cet objet se trouve lui-même à la température t' et que λ' soit son coefficient de dilatation, sa longueur à zéro est

$$l_0 = \frac{l}{1 + \lambda' t'} = m[1 + \lambda(t - t_0) - \lambda' t'].$$

Tel est le cas, par exemple, des observations barométriques. La hauteur réelle de la colonne de mercure étant donnée par l'équation (1), si α est le coefficient de dilatation cubique du mercure, la hauteur l_0 de la colonne à zéro qui ferait équilibre à la même pression est

$$l_0 = \frac{l}{1 + \alpha t'} = m[1 + \lambda(t - t_0) - \alpha t'].$$

Pour le verre et les métaux usuels, les valeurs du coefficient

de dilatation varient de 8.10^{-6} à 20.10^{-6}; une variation de température de 10° donnerait donc au maximum une correction de 2 dix-millièmes, qui sera le plus souvent négligeable. La dilatation du mercure est voisine de 18.10^{-5}.

519. Masses. — La *balance* permet de constater l'égalité de deux poids apparents. Si P est le poids réel du corps pesé, ϖ les poids marqués qui lui font équilibre, D, Δ et δ les poids spécifiques du corps, des poids marqués et de l'air, on a

$$P\left(1-\frac{\delta}{D}\right)=\varpi\left(1-\frac{\delta}{\Delta}\right);$$

$$P=\varpi\left[1-\delta\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{D}\right)\right].$$

Le rapport des valeurs P et ϖ représente le rapport des *masses* du corps et des étalons.

Pour donner une idée du terme de correction, on a réuni dans le tableau suivant les valeurs relatives à différents corps, quand on suppose l'air à la température de zéro et à la pression normale de 76 centimètres :

	D	$\frac{\delta}{D}$	$\frac{\delta}{\Delta}-\frac{\delta}{D}$ Poids en laiton.	Poids en platine.
Platine.......	21,30	$60,10^{-6}$	$94,10^{-6}$	0
Mercure......	13,59	95 »	59 »	$-15,10^{-6}$
Cuivre.......	8,85	146 »	8 »	−86 »
Laiton.......	8,40	154 »	0 »	−94 »
Aluminium...	2,73	473 »	−319 »	−413 »
Eau........ .	1,00	1293 »	−1139 »	−1233 »

Avec des poids en laiton, le terme correctif dans les pesées de métaux reste beaucoup au-dessous du dix-millième, sauf pour le platine d'un côté et l'aluminium de l'autre. Il n'y a pas d'ailleurs à tenir compte des changements de densité résultant des variations de la température, car ils n'amènent pas de modifications de l'ordre des millièmes dans les termes correctifs eux-mêmes.

Ces corrections aux pesées ont une importance relative

beaucoup plus grande quand le corps que l'on a en vue fait partie d'un système beaucoup plus lourd et que le poids doit en être obtenu par différence, comme dans les analyses chimiques, par exemple.

520. Mesures angulaires. — L'évaluation d'un angle, qui est en réalité un nombre abstrait, se ramène à la mesure d'une longueur, ou plus exactement à la comparaison de deux longueurs. Comme ce problème se présente souvent et dans les conditions les plus variées, il est utile d'en examiner rapidement les traits généraux.

Dans la plupart des cas, on mesure un angle par le déplacement d'un équipage mobile sur un cercle divisé. L'équipage porte : 1° une *ligne de visée*, définie par des alidades ou par une lunette à réticule que l'on amène alternativement dans la direction des deux côtés de l'angle : 2° un *index* ou un *vernier* dont on observe le déplacement par rapport à la division du cercle.

La précision des mesures dépend de l'exactitude avec laquelle on pointe la ligne de visée et, d'autre part, de la graduation du cercle. Dans un instrument bien compris, l'approximation de visée doit être au moins équivalente à celle que donne la graduation. Si, par exemple, le cercle avec les verniers permet d'apprécier 10 secondes, il est nécessaire que les lunettes qui servent à la visée comportent elles-même une erreur inférieure à 10 secondes.

Quand on observe avec une lunette un point lumineux, sans dimension apparente appréciable, sur un fond obscur, comme une étoile dans le ciel, l'image produite au foyer de la lunette n'est pas un point; elle est formée d'une tache centrale circulaire, entourée d'un anneau obscur, puis d'une série d'anneaux concentriques irisés.

Pour que l'on puisse distinguer deux étoiles très voisines, il faut que les images centrales qui correspondent à chacune d'elles soient partiellement séparées. D'après les lois de diffraction, l'angle apparent de la tache centrale, vue du centre optique de l'objectif (ou du miroir dans le cas du télescope), est en raison inverse du diamètre de l'objectif. On ne peut pas préciser *à priori* le degré d'empiètement des taches centrales, c'est-à-dire l'angle minimum de deux étoiles en deçà

duquel l'œil ne pourra plus affirmer l'existence, en tant qu'objets distincts, de deux astres voisins, mais il est certain que cet angle limite est en raison inverse du diamètre de l'objectif; c'est l'*angle de pénétration* de l'objectif. Le *pouvoir optique* est l'inverse de l'angle de pénétration, il est proportionnel au diamètre de l'objectif.

L'étude des instruments d'optique montre qu'un objectif parfait de 12^c de diamètre permet de séparer deux étoiles ou de distinguer deux traits parallèles dont la distance angulaire est supérieure à $1''$. On comprend encore qu'il soit possible, pour la mesure des angles, de pointer le fil d'un réticule sur l'image d'un objet avec une erreur moindre que l'angle de pénétration de la lunette, surtout quand on peut multiplier les pointés. C'est ce qui a lieu en particulier dans les observations de passage au méridien et dans les triangulations géodésiques : l'erreur du pointé est alors au moins dix fois plus faible que l'angle de pénétration de la lunette.

Toutefois, on n'atteint pas cette approximation quand il s'agit d'images mobiles ou d'observations que l'on ne peut répéter à volonté ; on évitera tout mécompte dans la pratique, en admettant que l'erreur de pointé est de même ordre que l'angle de pénétration de l'objectif.

D'autre part, un cercle divisé de 80 centimètres de diamètre, quand il est bien construit, donne directement les $2''$ par la lecture des verniers et permet d'apprécier la partie complémentaire avec une erreur moindre que $1''$; un cercle de ce diamètre devra donc être associé à une lunette d'au moins 12 centimètres d'ouverture. D'une manière générale, on peut dire que le diamètre du cercle doit être environ 7 fois celui de l'objectif.

L'angle de $1''$, qui vaut $0,48.10^{-5}$, correspond sur une circonférence de 80^c de diamètre à $40^c.0,48.10^{-5} = 2^c.10^{-4}$ ou 2 microns. Telle est la limite au-dessous de laquelle doivent rester les erreurs du tracé, à moins qu'on ne fasse une étude spéciale des divisions du cercle.

Quand il s'agit d'appareils mobiles et légers, comme une aiguille aimantée reposant par une chape sur un pivot vertical, une aiguille d'inclinaison mobile autour d'un axe cylindrique qui roule sur un plan, un fléau de balance tournant

sur l'arête d'un couteau, ou un équipage quelconque suspendu par un ou plusieurs fils, il n'est pas possible de munir ces organes de verniers qui se mouvraient le long d'une division circulaire, parce qu'on doit éviter tout frottement et que les verniers ne sont vraiment utiles que lorsqu'ils peuvent être placés au contact des échelles. Il n'est pas pratique, non plus, de monter une lunette sur l'équipage mobile, ce qui en augmenterait le poids inutilement.

Le moyen le plus simple est d'employer un index, en forme d'aiguille très aiguë, qui se déplace au-dessus d'un cercle divisé. On doit alors viser l'aiguille dans un plan normal au cercle, pour éviter toute erreur dite de *parallaxe*.

Une disposition avantageuse à ce point de vue consiste à faire mouvoir l'aiguille devant une division tracée sur une lame de verre argentée sur la seconde face. L'observation se fait en visant dans une direction telle, que l'aiguille se superpose à son image.

Ce mode de pointé est loin de donner la même approximation que l'emploi des verniers. Avec un cercle de 16 centimètres de diamètre, la minute d'angle correspond à $0^{mm},024$ et il est difficile d'apprécier cette quantité par estime ; c'est à peu près le cas des boussoles d'inclinaison de Gambey.

Cette méthode d'observation a été singulièrement améliorée par Brunner pour les boussoles d'inclinaison. Le cercle divisé vertical est mobile autour d'un axe coïncidant avec celui de l'aiguille et porte un petit miroir concave dont le centre de courbure décrit la même circonférence que la pointe de l'aiguille. Quand la pointe se trouve au voisinage du centre de courbure du miroir, il se produit une image renversée; on observe à la loupe l'aiguille et son image, et on les amène par la vis de rappel dans le prolongement l'une de l'autre. Si le diamètre du miroir est de 12^{mm}, son angle de pénétration est $10''$; pour un rayon de courbure de 4 centimètres, la distance correspondante est de 2 microns ; l'approximation est sensiblement la même qu'avec les verniers.

521. Méthode du miroir. — Poggendorff [1] a eu l'idée ingénieuse d'attacher à l'appareil mobile un miroir plan dans

[1] POGGENDORFF, *Pogg. Ann.*, t. VII, p. 121 ; 1826.

lequel on observe les déplacements de l'image d'un objet extérieur. Cette méthode s'est rapidement généralisée à la suite des beaux travaux de Gauss et de Weber; il est nécessaire de l'examiner avec plus de détails.

Supposons que la partie mobile tourne autour d'un axe vertical et porte un miroir plan passant par l'axe.

Soit M le miroir (fig. 127), MN la direction de la normale en son milieu, lorsque le système mobile est dans la position d'équilibre, ou celle que l'on prend comme position initiale, et CC'DD' le plan vertical passant par cette normale et l'axe de rotation. Une échelle divisée horizontale EE' est placée à une certaine distance du miroir, au-dessous de l'horizontale MN et perpendiculaire à sa direction. Au-dessus de l'échelle

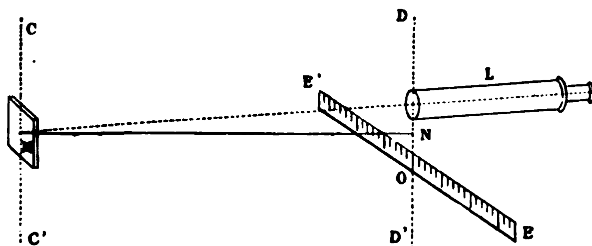


Fig. 127.

est une lunette L, mobile autour d'un axe horizontal, de manière que son axe optique décrive le plan CC'DD'. On dirige la lunette vers le miroir et on la règle de façon qu'elle donne une image nette de l'échelle vue par réflexion.

Les conditions d'ajustement seront remplies pour la lunette si, par un simple jeu de l'oculaire et une rotation autour de l'axe horizontal, on peut faire coïncider successivement avec le réticule le fil de suspension du miroir et l'image donnée par ce miroir d'un fil à plomb DD' tendu devant le milieu de l'objectif; l'échelle est réglée, si ses deux extrémités E et E, sont à la même distance du miroir, et si, pendant les oscillations, l'image de ces deux extrémités se fait à la même hauteur dans le plan du réticule.

La position du miroir est définie par la division de l'échelle

qui fait son image sur le réticule de la lunette. Si l'ajustement est parfait, le zéro de l'appareil correspond à la division de l'échelle qui, dans la lunette, se trouve cachée par le fil à plomb DD'.

On peut numéroter les divisions de l'échelle des deux côtés, à partir du milieu ; mais, pour éviter les erreurs qu'entraînent souvent les lectures de signes contraires et les changements de sens, il est préférable de placer le zéro de la graduation à l'une des extrémités de la règle.

Les chiffres tracés sur l'échelle sont habituellement renversés et symétriques de leur forme normale ; dans la lunette, ils paraissent alors redressés et corrects.

522. Calcul de la déviation. — On peut remarquer d'abord que tous les points d'une droite horizontale de l'échelle n'ap-

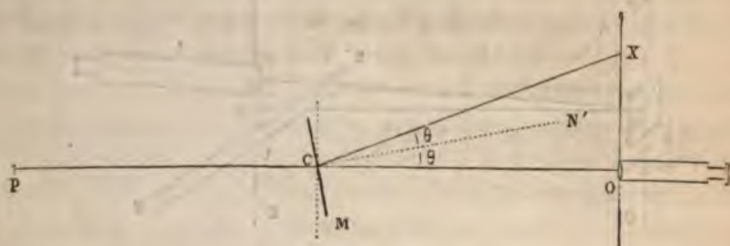


Fig. 128.

paraissent pas à la même hauteur. En effet, le miroir étant supposé vertical et dans l'axe de rotation, soit M le point où sa surface est coupée par l'axe optique de la lunette, φ l'inclinaison de cet axe optique sur l'horizon et d la distance MN au plan vertical de l'échelle. Lorsque cette droite est normale au miroir, la distance verticale a du point N au point visé de l'échelle est $a = d \tang \varphi$.

Si le miroir tourne de l'angle θ (fig. 128), l'angle ψ de la nouvelle position CN' de la normale avec l'axe optique est $\cos\psi = \cos\varphi \cos\theta$. Le point visé en X fait avec cette normale le même angle ψ ; la distance horizontale CX est $d' = \dfrac{d}{\cos 2\theta}$ et la distance a' du point visé au plan horizontal passant par le point N a pour valeur $a' = d' \tang \varphi$.

Toutefois, lorsque l'un des fils du réticule est vertical, ainsi que les divisions de la règle, cette cause d'erreur n'intervient pas dans les observations.

Désignant par x et p les distances à l'origine des divisions situées en X et O, on a

$$(2) \qquad \operatorname{tang} 2\theta = \frac{OX}{OC} = \frac{x-p}{d}.$$

Si la surface du miroir M se trouve à une distance $\rho = CM$ (fig. 129), il est facile de voir que la division X vue par la

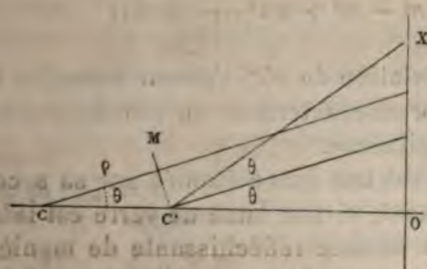


Fig. 129.

lunette pour une déviation θ est la même que si le miroir avait tourné de l'angle θ autour du point C′ et qu'on a

$$(3) \qquad \operatorname{tang} 2\theta = \frac{x-p}{d - \dfrac{\rho}{\cos\theta}} = \frac{x-p}{d-\rho}.$$

Comme les déviations sont toujours assez faibles et l'écart ρ du miroir très petit par rapport à la distance de l'échelle, on peut remplacer $\cos\theta$ au dénominateur par l'unité.

Enfin, lorsque les déviations sont assez petites pour que la tangente puisse être remplacée par l'arc, il reste

$$(4) \qquad \theta = \frac{1}{2}\frac{x-p}{d-\rho}.$$

Quand il s'agit d'observer des déviations extrêmement faibles, on peut placer un miroir fixe M′ dans le plan de l'é-

chelle et viser l'image qui provient de deux ou de $2n$ réflexions intermédiaires[1]. Le rayon qui suivrait l'axe optique, du réticule à l'objectif, revient au miroir M' sous l'incidence θ et retourne au miroir M sous l'incidence 2θ; une nouvelle opération donnerait 4θ, etc. On aurait ainsi en général $2^{n+1}\theta = \frac{x-p}{d-\rho}$.

Si l'on veut éviter le calcul des lignes trigonométriques dans l'équation (3), on peut poser $\tan 2\theta = \frac{x-p}{d-\rho} = 2m$, et le développement en série de $\tan\theta$ donne

$$(5)\quad \tan\theta = m - m^3 + 2m^5 \ldots\ldots = m(1 - m^2 + 2m^4 - \ldots\ldots).$$

Pour une déviation de 15°, l'erreur commise en ne prenant que les trois premiers termes du développement reste inférieure au dix-millième.

Si le miroir est une glace étamée sur sa seconde face ou, plus généralement, si une lame de verre est interposée entre la lunette et la surface réfléchissante de manière à être traversée par les rayons dans une direction voisine de la normale, une correction est nécessaire sur la valeur de la distance $d-\rho$. En appelant e l'épaisseur et n l'indice de réfraction de la lame, les rayons qui la traversent se comportent comme s'ils avaient traversé une couche d'air dont l'épaisseur serait seulement $\frac{e}{n}$; on devra donc diminuer de $e - \frac{e}{n}$ ou $e\frac{n-1}{n}$ la distance de l'échelle à la surface réfléchissante.

523. Graduation des échelles. — Quand il ne s'agit que de mesures comparatives, la déviation θ étant donnée par une des équations (4) ou (5), il suffit d'évaluer approximativement la distance de l'échelle au miroir en fonction des divisions de l'échelle. L'erreur relative commise sur cette mesure n'affecterait que des termes de correction.

Si l'on veut connaître la valeur absolue des angles, on peut faire une table de graduation par un cercle divisé. Dans ce cas, le miroir étant lié par un moyen quelconque à un équipage mobile sur un cercle divisé horizontal ayant même

[1] PILTSCHIKOFF, *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 331; 1889.

axe, on fait tourner le système d'un angle mesuré par les verniers du cercle et on observe en même temps dans la lunette le déplacement de l'échelle.

Pour utiliser directement les formules, il faut mesurer, avec la même unité, l'échelle et sa distance au miroir.

La mesure de la distance d'une échelle à un miroir mobile présente quelques difficultés quand on veut, comme il est parfois nécessaire, que l'erreur ne dépasse pas un dix-millième, ce qui correspond à une approximation de $0^{mm},1$ pour une distance de 1 mètre. On est souvent amené pour cette raison à augmenter, dans des proportions incommodes, la distance du miroir à l'échelle.

On peut atténuer ces difficultés et en même temps se mettre à l'abri des erreurs dues aux petits déplacements de l'axe pendant les expériences, en employant (1) deux miroirs diamétralement opposés et deux échelles parallèles. Si on appelle ρ et d, ρ' et d', les distances à l'axe de chacun des miroirs et de l'échelle correspondante, et si deux observateurs notent de part et d'autres les déviations x et x' produites par une même rotation, on aura

$$\tang 2\theta = \frac{x-p}{d-\rho} = \frac{x'-p'}{d'-\rho'} = \frac{(x+x')-(p+p')}{(d+d')-(\rho+\rho')}.$$

La somme $d+d'$ est la distance des deux échelles qui sont fixes; $\rho+\rho'$ est la distance des deux miroirs qui sont liés l'un à l'autre. Cette dernière distance peut se réduire à l'épaisseur d'une glace argentée sur les deux faces.

524. Discussion de la méthode. — L'exactitude que l'on peut obtenir, dans la méthode de réflexion, dépend uniquement de la lunette d'observation et des dimensions du miroir, et l'on croit souvent à tort qu'on améliore l'observation en augmentant outre mesure la distance de l'échelle.

L'avantage d'une grande distance, avec un miroir plan et une échelle rectiligne, consiste surtout en ce que la lunette peut voir sans changement de point les extrémités de l'échelle et le milieu; d'autre part, si la lunette a été construite pour

(1) W. Weber et Zöllner, *Berichte der K. S. Gesell.*, Leipzig, 1880.

viser à l'infini, il suffira d'un petit déplacement de l'oculaire pour permettre la vision de l'échelle. Ce sont là des points secondaires; la question principale est l'angle minimum de rotation que la lunette permettra d'apprécier.

Supposons que le miroir soit à une distance d de l'échelle et à une distance D de l'objectif de la lunette, et désignons par β l'angle limite que peut distinguer la lunette. L'image de l'échelle étant à la distance $D+d$ de l'objectif, cet angle limite correspond à une longueur ε de l'échelle telle que $\varepsilon = \beta(D+d)$; la rotation α correspondante du miroir est

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{2d} = \beta\frac{D+d}{2d} = \frac{\beta}{2}\left(1+\frac{D}{d}\right).$$

Dans les conditions habituelles, où $d = D$, il en résulte $\alpha = \beta$; la sensibilité est alors exactement la même que si la lunette d'observation était montée directement sur l'équipage mobile et munie de verniers sur un cercle de dimensions convenables. Le bénéfice apparent que produit la réflexion, en doublant l'angle de rotation, est compensé par la distance double à laquelle se trouve reportée l'image de l'échelle. La sensibilité augmente quand on place l'échelle plus loin que la lunette; elle serait même doublée si le rapport $\frac{D}{d}$ était très petit, mais il faudrait alors des échelles de grandes dimensions pour lesquelles il serait difficile d'obtenir un bon éclairage.

Ce raisonnement suppose toutefois que l'on utilise en entier le pouvoir optique de la lunette, c'est-à-dire que le faisceau de rayons qui provient d'un point de l'échelle couvre la totalité de l'objectif, ou au moins le diamètre horizontal perpendiculaire à la direction des traits. En appelant A le diamètre de l'objectif, a la dimension horizontale du miroir, on doit avoir

$$\frac{a}{d} > \frac{A}{D+d}, \qquad a > A\frac{d}{D+d}.$$

La largeur minimum du miroir est donc la moitié du

diamètre de l'objectif pour la disposition ordinaire, et égale à ce diamètre quand l'échelle est très éloignée.

On doit ajouter encore que la construction des surfaces planes présente les plus grandes difficultés; tous les défauts du miroir nuisent à la pureté des images et contribuent à diminuer la précision des observations.

Quand on se propose seulement d'observer les divisions d'une échelle, il suffit que le miroir ait les dimensions définies par la condition précédente, dans le sens perpendiculaire aux traits. En outre, on améliore singulièrement la netteté des images en couvrant l'objectif d'un diaphragme percé d'une ouverture rectangulaire étroite dont la longueur, égale au diamètre de l'objectif, est perpendiculaire aux traits et dont la largeur est rendue aussi petite que le permet l'éclairage de l'échelle. Les images des chiffres sont moins bonnes, mais les traits apparaissent beaucoup plus purs.

Si l'éloignement de la lunette n'améliore pas la sensibilité, il modifie le nombre des divisions de l'échelle que l'on pourra voir en même temps. On peut définir la limite pratique du champ par la condition que les rayons émanés d'un point couvrent au moins la moitié de l'objectif. D'après cela, en appelant l la longueur de la portion de l'échelle dont on voit l'image, l'ouverture λ du champ est

$$\lambda = \frac{l}{d+D} = \frac{a}{D}.$$

Avec la disposition habituelle, $d = D$, il en résulte $l = 2a$; la longueur visible de l'échelle est alors égale au double de la largeur du miroir, c'est-à-dire égale au diamètre de l'objectif, si le miroir a sa largeur minimum.

Nous avons admis implicitement que la valeur angulaire du champ λ ainsi défini est plus faible que le champ optique que comporte la lunette, ce qui est ordinairement le cas; si le miroir était très large, la grandeur du champ ne dépendrait que de la lunette.

La méthode du miroir ne permet pas de mesurer de grandes déviations; il n'est pas commode d'évaluer, de part et d'autre de la position d'équilibre, une rotation supérieure

à 5°, ou un angle total plus grand que 10°. Comme l'image a un déplacement double, l'angle apparent de l'échelle vue du miroir doit être d'au moins 20°; la tangente de 10° étant 0,1763, il faut alors que la longueur totale de l'échelle soit supérieure à 0,3526 de sa distance au miroir, c'est-à-dire environ 40 centimètres pour un mètre de distance.

La valeur moyenne des rotations étant ainsi de 3°, si l'on veut en apprécier le dix-millième, la précision du pointé doit être d'environ 1″; pour que l'angle de pénétration reste au-dessous de cette limite, il faut un objectif de 16 centimètres de diamètre et un miroir de 8 centimètres de largeur. Quant au pointé, il doit être fait au vingt-millième près de la distance $d+D$, c'est-à-dire à $0^{mm},1$ pour $d=D=10$ mètres.

Avec des échelles plus longues il serait difficile, à moins d'augmenter beaucoup la distance, d'observer en même temps le milieu et les extrémités sans modifier la mise au point de la lunette. On peut courber l'échelle suivant un arc de cercle autour de l'axe de suspension; l'expression $\frac{x-p}{d}$ représente alors le double de la déviation elle-même.

L'échelle est ordinairement divisée en millimètres. Les échelles sur papier ne peuvent être considérées comme suffisantes dans les mesures de précision ; les échelles sur ivoire ou sur métal sont préférables, mais les échelles métalliques sont difficiles à éclairer.

On peut tracer les divisions sur verre et les éclairer par derrière au moyen de miroirs réflecteurs. Si le verre est transparent, les traits apparaissent en noir sur fond brillant; si le verre est argenté et la division tracée sur la couche d'argent, les traits paraissent brillants sur fond noir.

L'emploi des lames de verre présente le grand avantage qu'on peut superposer deux échelles en appliquant l'une sur l'autre les faces divisées et vérifier ainsi l'exactitude de la graduation par différentes méthodes, sur lesquelles il n'est pas nécessaire d'insister.

Dans certaines circonstances, par exemple pour les phénomènes à longue période qui demandent une installation permanente, comme les variations du magnétisme terrestre, il est utile d'avoir dans le champ d'observation un repère

indépendant de la lunette et de l'échelle. Pour cela, on place au-dessous du miroir mobile un miroir fixe tout semblable. Si les deux miroirs étaient absolument parallèles, les deux images de l'échelle, l'une fixe et l'autre mobile, paraîtraient superposées, mais il suffit d'incliner un peu le miroir fixe pour les séparer.

L'angle des plans verticaux passant par les normales aux deux miroirs est donné par la différence des numéros des divisions qui coïncident avec le fil vertical du réticule ; cette différence reste invariable lorsque la lunette et l'échelle éprouvent des déplacements quelconques. L'instrument porte ainsi lui-même son repère, et l'immobilité relative de l'échelle et de la lunette, par rapport aux miroirs, peut être vérifiée à

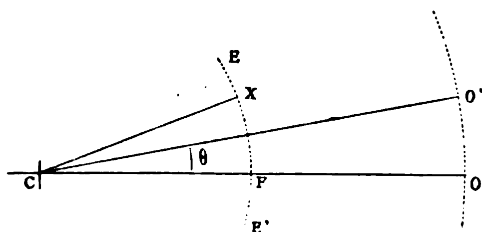


Fig. 130.

chaque instant par la position du réticule sur l'image du miroir fixe.

525. **Miroirs courbes.** — On peut modifier de bien des manières la méthode d'observation par les miroirs ; une des plus commodes consiste à employer un miroir concave, en plaçant l'échelle dans le plan focal et visant vers le miroir avec une lunette réglée pour l'infini.

Soit O (fig. 130) le centre de courbure du miroir C, F son foyer dans la position initiale, f la longueur focale CF. L'axe de la lunette est dans le plan vertical OC et dirigé vers le milieu C du miroir; une échelle circulaire EE′ a pour centre le point C. Il est clair que, si le miroir tourne d'un angle θ, on verra dans la lunette l'image du point X de l'échelle, tel que l'arc FX corresponde à l'angle 2θ. Tous les rayons émanés

du point X forment après leur réflexion un faisceau parallèl à l'axe optique de la lunette et l'image se fait dans le pla. focal. La lunette, une fois réglée pour l'infini, pourra don être placée à une distance quelconque ; l'éloignement aur seulement pour effet de diminuer le champ.

Dans ce cas, le diamètre du miroir doit être égal à celu de l'objectif, si l'on veut utiliser complètement le pouvoi optique de la lunette.

Enfin on pourra observer une rotation moitié moindre qu l'angle limite de la lunette, car, en conservant toujours le mêmes notations, on a

$$\beta = \frac{\varepsilon}{f}, \qquad \alpha = \frac{\varepsilon}{2f} = \frac{\beta}{2}.$$

En résumé, les conditions sont les mêmes que si l'on ava un miroir plan avec une échelle située à l'infini.

Le miroir concave présente quelques avantages pratique D'abord il est plus facile d'obtenir une surface sphériq qu'une surface plane, sauf à déterminer par expérience longueur focale. Si même, la surface n'étant pas sphériqu les rayons de courbure principaux ne sont pas très différent on peut chercher la direction des plans principaux et mett l'un d'eux parallèlement aux traits de l'échelle ; la pénétrati de la lunette ne s'en trouve pas diminuée. D'autre part l échelles, étant plus petites, sont plus faciles à éclairer. Enfi on verrait aisément qu'à éclairement égal, les images dans lunette sont aussi lumineuses qu'avec un miroir plan.

Toutefois si l'on voulait mesurer des déviations un p grandes, l'échelle devrait alors être courbée suivant une lig non circulaire et la graduation se ferait empiriquement.

Si l'échelle est placée au centre de courbure du miroir, se produit dans le même plan une image renversée l'échelle et de même grandeur, que l'on peut observer av une loupe ou un microscope. La précision ne dépend alo que du diamètre du miroir, et on appréciera une rotati égale à la moitié de l'angle limite qui correspond à ce di mètre ; c'est la disposition de Brunner (520) pour les bo soles d'inclinaison.

On peut encore remplacer le miroir concave par le système d'un miroir plan et d'une lentille convergente, placés à une faible distance l'un de l'autre.

Soit f la longueur focale de la lentille et δ la distance du miroir au centre optique. Pour que l'échelle soit située dans le plan focal principal du système ainsi constitué, il faut que les rayons émanés d'un de ses points, après s'être réfractés dans la lentille, puis réfléchis sur le miroir, semblent partir du foyer principal de la lentille. On trouve aisément que la distance d' de l'échelle à la lentille doit être

$$d' = \frac{f}{2} \cdot \frac{f - 2\delta}{f - \delta},$$

et que l'on a, entre les angles α et β, la relation

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \frac{f}{f - \delta}.$$

Le système est donc sensiblement équivalent à un miroir concave. L'hypothèse $\delta = 0$ correspondrait au cas d'une lentille plan convexe de distance focale f, qui serait argentée sur la face plane. Avec une construction aussi compliquée, la graduation de la règle doit se faire nécessairement d'une manière empirique.

L'emploi d'une lentille est surtout utile dans les appareils de variations, où l'on veut conserver comme repère l'image fournie par un miroir fixe ; dans ce cas, en effet, il est plus commode de prendre un miroir plan.

526. Appareils de projection. — Pour les expériences courantes, on simplifie beaucoup la méthode du miroir en supprimant la lunette et en projetant directement sur l'échelle l'image réfléchie d'un objet lumineux.

Dans la disposition ordinaire, le plan de l'échelle et celui du réticule de la lunette sont conjugués par rapport au système formé par l'objectif et le miroir ; si donc, l'oculaire étant supprimé, on éclaire le réticule, son image se projettera sur l'échelle à la division même qui aurait été lue dans la lunette. Le réticule peut être remplacé par une fente verticale.

L'emploi d'un miroir concave, ou d'un miroir plan avec lentille convergente, conduit encore à une disposition plus simple. On place l'échelle et la fente éclairée dans un même plan passant par le centre de courbure du miroir, ou au double de la distance focale du système, et à égale distance de part et d'autre de l'axe dans le sens vertical; l'image de la fente se projette alors sur l'échelle en vraie grandeur.

Dans ce mode de lecture par projection, il est nécessaire d'affaiblir la lumière extérieure pour apercevoir sur l'échelle l'image de la fente; la lecture des divisions devient alors difficile. On évite cet inconvénient en prenant une fente ou une ouverture circulaire très large, sur laquelle on tend verticalement un fil opaque. L'image de l'ouverture se promène sur l'échelle et éclaire la région dans laquelle se trouve l'image du fil. On obtient de très bons résultats avec une échelle sur verre dépoli, qu'on observe par transparence.

La méthode de projection, permettant l'impression photographique de l'image, est celle dont on fait usage pour les appareils enregistreurs des variations du magnétisme terrestre. En employant deux miroirs, l'un fixe et l'autre mobile, on reçoit sur une couche sensible deux images d'une même fente éclairée, l'une fixe qui détermine le zéro, l'autre variable de position qui donne la mesure de la variation. Si la feuille sensible est mobile dans une direction perpendiculaire au déplacement de l'image, l'épreuve porte une droite correspondant à l'image fixe et une courbe qui correspond à l'image mobile, qui correspond aux variations.

OSCILLATIONS

527. Équation du mouvement. — On a souvent à considérer le mouvement d'un corps solide de part et d'autre d'une position d'équilibre, soit sous l'influence d'une force extérieure, soit simplement par suite des réactions qui se produisent dans le système quand il a été écarté de sa position d'équilibre.

Considérons un corps de masse K, animé d'un mouvement de translation rectiligne, et désignons par x sa distance à une

origine fixe pour l'époque t. Nous supposerons que ce corps est soumis à une force extérieure X indépendante de x, qu'il éprouve une réaction $f(x)$ variable avec la position occupée, et une autre $f_1\left(\frac{dx}{dt}\right)$, qui est fonction de la vitesse $u = \frac{dx}{dt}$. La première réaction f est *directrice* et analogue à la tension d'un ressort qui ramènerait le mobile vers sa position d'équilibre; la seconde f_1, qui est *retardatrice*, pourra être produite par la résistance des organes ou du milieu dans lequel se fait le mouvement ou encore par des courants induits dans les conducteurs voisins. L'équation générale du mouvement est alors

$$(1) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = X.$$

Par un simple changement dans la signification des lettres, la même équation convient au mouvement de rotation d'un système solide autour d'un axe. La valeur de x représentant l'angle d'écart à partir d'une position arbitraire, la quantité u est alors une vitesse angulaire, les fonctions f_1, f et X sont des couples et K est le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation.

Nous admettrons d'abord que la force extérieure X est constamment nulle, auquel cas

$$(2) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = 0.$$

Lorsque la fonction retardatrice f_1 est nulle, on peut écrire

$$(3) \qquad \frac{K}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\int_a^x f(x)\,dx = \varphi(a) - \varphi(x).$$

Comme la valeur du second membre de l'équation ne dépend que de la position du mobile, il en est de même pour le premier, c'est-à-dire pour le carré de la vitesse. Le mouvement est donc *périodique* et le système exécuterait indéfiniment des oscillations toutes identiques.

Si l'on prend pour origine la position d'équilibre, $f(0) = 0$,

et que f soit une fonction impaire de l'*écart* x, l'intégrale φ est une fonction paire. L'oscillation est alors symétrique par rapport à la position d'équilibre. La vitesse s'annule pour $x = \pm a$: la quantité a, qui représente le maximum d'écart, est l'*amplitude* de l'oscillation. La *période* T est le temps qui s'écoule entre deux passages du système par la même position et dans le même sens.

Les seuls cas utiles à considérer dans la pratique sont ceux où l'action directrice f est de la forme Cx, comme pour la tension d'un ressort, ou de la forme $C \sin x$, ce qui correspond au couple produit par la gravité sur un pendule oscillant dans le vide, sans frottement au point d'attache.

528. Oscillations isochrones. — La première forme donne

$$K \frac{d^2x}{dt^2} + Cx = 0. \tag{4}$$

Si l'on compte l'origine du temps à partir de l'époque où mobile passe par la position d'équilibre, il en résulte

$$(4)' \quad \left\{ \begin{aligned} x &= a \sin \omega t, \\ u &= \frac{dx}{dt} = \omega a \cos \omega t. \end{aligned} \right.$$

Le mouvement peut être provoqué soit en écartant d'abord le système à l'élongation a, soit en lui imprimant une vitesse initiale ωa. La constante ω et la période T des oscillations sont déterminées par les conditions

$$\omega^2 = \frac{C}{K}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{K}{C}}.$$

La période T est indépendante de l'amplitude ; les oscillations sont dites *isochrones*.

Le mouvement défini par les équations (4)′ comporte une traduction géométrique très simple. Si l'on trace une circonférence de rayon a (fig. 131) et qu'un mobile M suive cette courbe, dans le sens de la flèche, avec une vitesse angulaire ω,

le manière que l'angle du rayon vecteur OM avec l'axe des y soit ωt, on aura

$$OP = x = a \sin \omega t$$

$$PM = y = a \cos \omega t = \frac{u}{\omega}.$$

A chaque instant, l'abcisse OP du mobile représente l'écart du mouvement vibratoire et l'ordonnée PM est proportionnelle à la vitesse u.

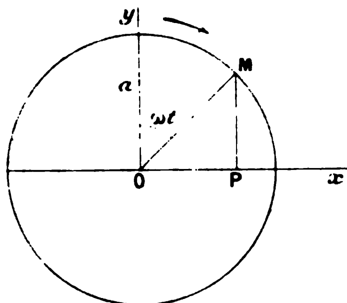


Fig. 131.

529. **Mouvement pendulaire.** — Si l'action directrice est proportionnelle au sinus de l'écart, on a

$$(5)\quad \begin{cases} K\dfrac{d^2x}{dt^2} + C\sin x = 0, \\ \dfrac{K}{2}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + C(\cos a - \cos x) = 0. \end{cases}$$

Tant que les écarts restent assez petits pour que le sinus puisse être remplacé par l'arc, on retrouve l'équation (4) et les oscillations restent isochrones avec la période T.

Dans le cas général, la période T′ a pour expression

$$T' = 4\sqrt{\frac{K}{2C}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} = T\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}}.$$

Développant en série l'expression comprise sous le radical, on en déduit, par un calcul connu,

$$(5)' \qquad T' = T\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{a}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{a}{2} + \cdots\cdots\right].$$

Pour des écarts très faibles, on peut réduire la série à ses deux premiers termes et écrire

$$T' = T\left(1 + \frac{a^2}{16}\right).$$

C'est le mouvement du pendule libre dans le vide. Si M est la masse du pendule, k son rayon de giration et l la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, on a

$$K = Mk^2, \qquad C = Mgl,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}} = 2\pi\frac{k}{\sqrt{gl}}.$$

530. Amortissement des oscillations. — Pour simplifier les calculs, nous admettrons toujours que l'action dirigeante f (force ou couple) est proportionnelle à l'écart et de la forme Cx, ce qui convient à la plupart des problèmes.

Dans la pratique, il est impossible de supprimer absolument les causes retardatrices. L'hypothèse la plus simple est de les considérer comme proportionnelles à une puissance n de la vitesse et l'équation (2) peut s'écrire

$$(6) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + C_1\left(\frac{dx}{dt}\right)^n + Cx = 0,$$

ou, en posant

$$\omega^2 = \frac{C}{K}, \qquad 2\lambda = \frac{C_1}{K},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\left(\frac{dx}{dt}\right)^n + \omega^2 x = 0.$$

Tel serait le cas des oscillations d'une colonne de mercure renfermée dans un tube en U, que l'on abandonnerait à elle-

même après avoir établi une différence de niveau entre les deux branches. La fonction f est à chaque instant proportionnelle à la différence de niveau et l'action retardatrice est due aux effets de capillarité ainsi qu'aux frottements du liquide sur lui-même ou sur les parois du tube.

Il peut arriver alors, suivant la relation qui existe entre les constantes λ et ω^2, que le système écarté de sa position d'équilibre y revienne sans oscillations, au bout d'un temps infini en théorie, mais pratiquement limité, auquel cas le phénomène est dit *apériodique*. Si la position d'équilibre est dépassée, le système exécute une série d'oscillations dont l'amplitude diminue constamment jusqu'à ce qu'il arrive au repos.

La nature de la quantité x exprimée en fonction du temps est entièrement différente suivant qu'il existe ou non des oscillations régulières.

531. Loi du carré de la vitesse. — Poisson [1] a examiné le cas où $n = 2$. Si l'on donne d'abord au système l'écart $-a$, la valeur de x à une époque quelconque est une fonction de a et peut être développée en une série convergente de la forme

$$x = a\xi_1 + a^2\xi_2 + \cdots\cdots,$$

dans laquelle $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots$ sont des fonctions du temps. En substituant dans l'équation (6) et égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de a, on obtient une suite d'équations différentielles qui serviront à déterminer les fonctions $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots$

Quand on néglige les termes d'ordre supérieur au carré de a, il reste

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \omega^2\xi_1 = 0, \\ &\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + 2\lambda\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + \omega^2\xi_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Comme on a $x = -a$ et $\dfrac{dx}{dt} = 0$ pour $t = 0$, il en résulte

$$\xi_1 = -\cos\omega t,$$

$$\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 = \omega^2 \sin^2\omega t = \frac{\omega^2}{2}(1 - \cos 2\omega t).$$

[1] Poisson, *Mécanique*, t. I, p. 405; 1811.

Développant en série l'expression compris-
on en déduit, par un calcul connu.

$$(5) \quad T' = T\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{a}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin \ldots\right.$$

Pour des écarts très faibles, on peut r
deux premiers termes et écrire

$$T' = T\left(1 + \frac{a^2}{16}\right).$$

C'est le mouvement du pendule libr
la masse du pendule, k son rayon de
du centre de gravité à l'axe de rotat

$$K = Mk^2, \quad C \ldots$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}} \ldots$$

530. Amortissement des oscill
calculs, nous admettrons touj
(force ou couple) est proportio
Cx, ce qui convient à la plupa
Dans la pratique, il est impo
les causes retardatrices. L'h
les considérer comme prop
la vitesse et l'équation (2) p

$$(6) \quad K\frac{d^2x}{dt^2} + C \ldots$$

ou, en posant

$$\omega^2 = \ldots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \ldots$$

Tel serait le cas de
renfermée dans un

Les deux parties, descendante et ascendante, de l'oscillation ne sont pas parcourues pendant le même temps. Si l'on pose $2\omega t_0 = \pi + \varepsilon$, la quantité ε étant très petite, on obtient, en négligeant les termes du second ordre, $\varepsilon = \frac{2a\lambda}{3}$ et, par suite,

$$\omega t_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{a\lambda}{3}, \qquad t_0 = \frac{T}{4}\left(1 + \frac{2a\lambda}{3\pi}\right).$$

532. Résistance proportionnelle à la vitesse. — Le mouvement des systèmes est en général assez lent pour que les réactions puissent être considérées comme simplement proportionnelles à la vitesse ; c'est l'hypothèse étudiée par Gauss [1]. L'équation du mouvement devient alors

$$K\frac{d^2x}{dt^2} + C_1\frac{dx}{dt} + Cx = 0. \tag{8}$$

Le problème a été traité déjà (**398**) à propos de la décharge des condensateurs. La solution générale est

$$x = Ae^{\rho t} + A'e^{\rho' t},$$

expression dans laquelle ρ et ρ' sont les racines de l'équation du second degré

$$K\rho^2 + C_1\rho + C = 0.$$

Le mouvement est *apériodique* si ces racines sont réelles et, par suite, toutes deux négatives. Le phénomène est oscillatoire lorsque les racines sont imaginaires.

Si le phénomène est oscillatoire et que l'on prenne pour origine du temps une époque de passage par la position d'équilibre, on a, en posant

$$\lambda = \frac{C_1}{2K}, \qquad \omega^2 = \frac{C}{K} - \lambda^2 = \frac{C}{K}\left(1 - \frac{C_1^2}{4KC}\right),$$

$$(8)' \qquad \left\{\begin{aligned} x &= ae^{-\lambda t}\sin\omega t, \\ \frac{dx}{dt} &= ae^{-\lambda t}(\omega\cos\omega t - \lambda\sin\omega t). \end{aligned}\right.$$

[1] GAUSS, *Resull. den Beob. des Magn. Vereins*, 1837 ; Œuvres, t. V, p. 374.

seconde des équations (7) devient :

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + \lambda\omega^2(1 - \cos 2\omega t) \ldots$$

$$\xi_2 \quad \alpha_2 \cos(\omega t - \beta_2) - \lambda$$

D'après les conditions initiales.

α_2 4λ; il en résulte

$$(7') \quad \begin{cases} x & a^2\lambda - a\left(1 - \frac{4a\lambda}{3} \ldots\right. \\ \frac{dx}{dt} & a\omega\left(1 - \frac{8a\lambda}{3} \sin^2 \ldots\right. \end{cases}$$

A moins que la quantité $a\lambda$ ...
valeur de t, après zéro, qui a ...
la condition ωt π. Avec les re...
T des oscillations reste donc ...
n'existait pas.

En faisant ωt π, on obt...
l'oscillation ascendante, qu...
tion d'équilibre.

a'

L'amplitude suivante ...
d'approximation adopt...

$$a\left(1 - \frac{8}{3}a\lambda \ldots\right.$$

Ces amplitudes dé...
arithmétique et le no...
supérieur à $\frac{3}{8\lambda a} \ldots$

L'époque t_0 du ...

$$\alpha = a\lambda \ldots$$

on rapportera la spirale [1] à des axes obliques faisant entre eux l'angle φ (fig. 132). Pour chaque point M de la spirale on a, par le triangle OMP,

$$\frac{x}{\sin\omega t} = \frac{y}{\sin(\varphi - \omega t)} = \frac{\rho}{\sin\varphi} = ae^{-\lambda t}.$$

On a donné à ces expressions la valeur commune $ae^{-\lambda t}$, afin que l'abscisse $x = \mathrm{OP}$ représente l'écart du mouvement vibratoire. L'ordonnée $y = \mathrm{PM}$ est alors proportionnelle à la

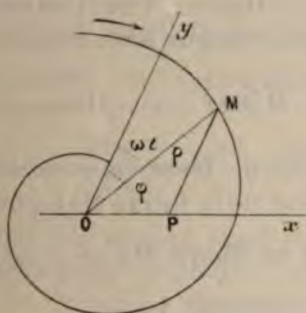


Fig. 132.

vitesse u du mouvement, par le facteur $\frac{\sin\varphi}{\omega}$, et l'équation de la spirale en coordonnées polaires est

$$\rho = a\sin\varphi . e^{-\lambda t} = a\sin\varphi . e^{-\frac{\omega t}{\operatorname{tg}\varphi}}.$$

533. Exemples. — La proportionnalité de la résistance à la vitesse rend compte très exactement de l'action de l'air sur les mouvements du pendule et de la plupart des systèmes oscillants dont la vitesse absolue est modérée.

Il en est de même pour le déplacement relatif d'un aimant et d'un conducteur voisin (**474**), puisque les courants induits et leur réaction sur le système mobile sont proportionnels à la vitesse du mouvement relatif.

[1] Les travaux de M. Cornu, auxquels nous ferons de nombreux emprunts, ont été résumés dans un mémoire inséré au *Bulletin de la Société internationale des Électriciens*, t. XI, p. 157; 1894.

Dans les galvanomètres où l'aiguille est placée à l'intérieur d'un cadre de fils, si le circuit, de résistance R, renferme une force électromotrice constante E, la déviation d'équilibre x_0 ne dépend que du courant permanent I, mais l'aiguille éprouve une série d'oscillations avant d'arriver au repos et l'écart à la position d'équilibre est à chaque instant $x - x_0$.

En appelant M et H les composantes perpendiculaires à l'axe du moment magnétique de l'aiguille et du champ extérieur, G la constante du cadre, l'aimant tend à revenir vers sa position d'équilibre sous l'action du couple $M[GIf(x) - H\sin x]$, avec la condition $GIf(x_0) = H\sin x_0$. Pour des oscillations de faible amplitude, le couple directeur peut donc être représenté par

$$C(x - x_0) = M[GIf'(x_0) - H\cos x_0](x - x_0).$$

D'autre part, le flux de force émis par le système magnétique dans le cadre est de la forme $M\varphi(x)$ ou $M\psi(x - x_0)$ et sa dérivée par rapport au temps $M\psi'(x - x_0)\frac{dx}{dt}$, la fonction ψ' différant peu d'une constante $\psi'(0)$.

Si l'on néglige les effets de self-induction, lesquels contribuent encore à l'amortissement, le courant induit i produit par l'aiguille se superpose simplement au courant principal. On a $Ri = M\psi'(0)\frac{dx}{dt}$ et son action sur l'aiguille est sensiblement

$$MGif(x) = \frac{M^2G}{R}\psi'(0)f(x)\frac{dx}{dt} = \frac{M^2G}{R}\psi'(0)f(x_0)\frac{dx}{dt}.$$

L'équation différentielle peut donc s'écrire

$$K\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{M^2G}{R}\psi'(0)f(x_0)\frac{dx}{dt} + M\left[\frac{GE}{R}f'(x_0) - H\cos x_0\right](x - x_0) = 0.$$

Le mouvement est périodique ou apériodique, suivant l'importance du second facteur, et l'on a

$$2\lambda = \frac{M^2G}{KR}\psi'(0)f(x_0),$$

$$\omega^2 + \lambda^2 = \frac{M}{K}\left[\frac{GE}{R}f'(x_0) - H\cos x_0\right].$$

Toutes choses égales, l'amortissement croit avec le moment magnétique de l'aiguille et la conductivité du circuit.

Considérons encore un cadre de n fils, faisant partie d'un circuit fermé, mobile autour d'un axe dans un champ magnétique uniforme, et supposons que, par l'effet d'un couple extérieur, comme la torsion d'un fil métallique, le cadre soit en équilibre dans une direction parallèle au champ.

En appelant S la surface moyenne de chaque spire, le flux de force émis dans le cadre, pour la déviation x, est $HnS\sin x$ et sa dérivée $HnS\cos x \frac{dx}{dt}$ ou sensiblement $HnS\frac{dx}{dt}$.

Si l'on néglige encore les effets de self-induction, le courant induit est $Ri = HnS\frac{dx}{dt}$ et l'action du champ

$$HSi\cos x = \frac{H^2S^2}{R}\cos x\frac{dx}{dt} = \frac{H^2S^2}{R}\frac{dx}{dt}.$$

Le couple directeur de torsion étant représenté par $C\sin x$ ou Cx, on a, toujours pour les petites oscillations,

$$2\lambda = \frac{H^2S^2}{KR}, \qquad \lambda^2 + \omega^2 = \frac{C}{K}.$$

On obtiendrait des résultats analogues, par rapport à une autre position d'équilibre, si le circuit du cadre renfermait une force électromotrice constante.

534. **Perturbations.** — Lorsque le système est soumis à une action étrangère X indépendante de l'écart x, avec les hypothèses précédentes sur les actions retardatrice et dirigeante, l'équation (8) doit être remplacée par

$$K\frac{d^2x}{dt^2} + C_1\frac{dx}{dt} + Cx = X. \tag{9}$$

Le cas le plus simple est celui où la valeur de X est constante et toujours opposée au mouvement, comme serait le frottement d'une chape sur son pivot. En posant $X = -Cx_0$, l'équation devient

$$K\frac{d^2x}{dt} + C_1\frac{dx}{dt} + C(x + x_0) = 0.$$

Si l'on choisit l'origine du temps à l'époque où le système est abandonné sans vitesse à l'élongation a, le mouvement de la première oscillation est, avec les mêmes valeurs que précédemment pour les constantes λ, ω et φ,

$$(9)' \quad \left\{ \begin{aligned} & x + x_0 = -\frac{a - x_0}{\sin\varphi} e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi), \\ & \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\sin^2\varphi}(a - x_0) e^{-\lambda t} \sin\omega t. \end{aligned} \right.$$

La vitesse s'annule de nouveau à l'époque $\omega t = \pi$, de sorte que la période T n'est pas modifiée.

La nouvelle élongation a_1, du côté opposé, est

$$a_1 + x_0 = (a - x_0) e^{-\frac{\lambda}{\omega}\pi} = (a - x_0) e^{-\frac{\lambda T}{2}},$$

$$a_1 = a e^{-\frac{\lambda T}{2}} - x_0 \left(1 + e^{-\frac{\lambda T}{2}}\right).$$

Après n oscillations simples, l'élongation devient

$$a_n = a e^{-\frac{n\lambda T}{2}} - x_0 \left(1 + e^{-\frac{n\lambda T}{2}}\right).$$

Cette quantité doit rester positive, mais le mouvement peut s'arrêter en dehors de la position normale d'équilibre. Le nombre maximum des oscillations qu'effectue le système est déterminé par la condition $a_n = o$ ou

$$\frac{a}{x_0} = 1 + e^{\frac{n\lambda T}{2}}, \qquad n = \frac{2}{\lambda T} \mathcal{L}. \left(\frac{a}{x_0} - 1\right).$$

D'une manière plus générale, si l'action perturbatrice X est une fonction quelconque du temps, à retours périodiques, on peut la représenter par la série de Fourier

$$(10) \qquad X = \Sigma B_n \sin(n w t - \beta_n),$$

dans laquelle n prend toutes les valeurs entières positives, de $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$.

La solution de l'équation (9) est alors, en faisant un choix convenable de l'origine du temps,

$$(10)' \qquad x = ae^{-\lambda t}\sin\omega t + \Sigma A_n \sin(nwt - \alpha_n).$$

Le premier terme du second membre annule le premier membre de l'équation (9). Chacun des termes de la dernière expression est une solution relative au terme de période correspondante compris dans le développement (10).

Si l'on désigne par b', β' et ω' les valeurs de B_n, β_n et nw relatives à une période T', la solution correspondante est

$$(11) \qquad x' = a'\sin(\omega' t - \alpha').$$

L'équation (9) devient alors

$$(C - K\omega'^2)x' + C_1\frac{dx'}{dt} = b'\sin(\omega' t - \beta'),$$

$$K\left[(\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2)x' + 2\lambda\frac{dx'}{dt}\right] = b'\sin(\omega' t - \beta').$$

C'est une forme déjà discutée (**393**). En désignant par δ' la perte de phase $\alpha' - \beta'$, on a

$$(11)' \qquad \begin{cases} K^2 a'^2 = \dfrac{b'^2}{(\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2)^2 + 4\lambda^2\omega'^2}, \\ \operatorname{tang}\delta' = \dfrac{2\lambda\omega'}{\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2}. \end{cases}$$

On remarquera d'abord que l'amplitude a' diminue très rapidement, toutes choses égales, à mesure que ω' augmente, c'est-à-dire que l'on considère un terme d'ordre plus élevé dans la série (10).

Si $\omega' < \omega$ ou $T' > T$, la perte de phase δ' est nulle pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$; elle passe par un maximum δ'_m pour la condition $\lambda^2 = \omega^2 - \omega'^2$, ou

$$\operatorname{tang}\delta'_m = \frac{\omega'}{\lambda} = \frac{\omega'}{\sqrt{\omega^2 - \omega'^2}};$$

la perte de phase δ reste donc comprise entre 0 et 90°.

entin, pour $\omega = \omega$.

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{2 h \omega}{k}$$

aux réactions propres premier terme du second indéfiniment. La vibration perturbations périodiques régime régulier.

terme tend vers zéro long, en réalité pratiquement ne reste plus que les termes périodiques quelles que soient ses réactions.

— conduit au problème oscillations propres, tel vibration arbitraire c'est-à-dire de maintenir le différents.

extérieure est elle-même du système ne tarde

prendra la période perturbations dues aux

appareil synchronisant au lieu de le faire agir pour produire des impulsions réguliers

est presque toujours , est devenue

pour que l'amplitude



soit réduite au millième, ce qui équivaut pratiquement à l'extinction, est

$$n = \frac{\mathcal{L}.\,1000}{\lambda T} = \frac{6{,}908}{\lambda T}.$$

Pour les oscillations libres d'un pendule battant la seconde, ou $T=2$, le décrément logarithmique λT n'atteint pas $\frac{1}{2000}$, ce qui produirait la réduction des amplitudes au millième après $n = 13\,816$ périodes $= 27\,632$ secondes $= 7^h\,40^m$.

Avec le décrément de 0,001, un diapason de 400 périodes par seconde s'éteindrait au bout de 6908 périodes ou 17^s.

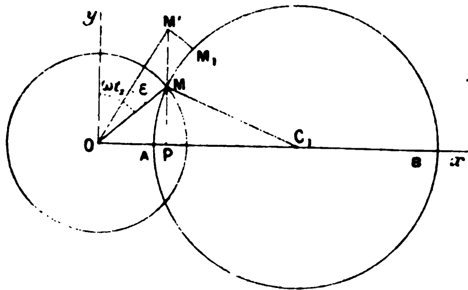


Fig. 133.

On peut donc se borner à considérer les cas où le décrément λT est inférieur à 0,01. Dans ce cas, on aurait

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\omega}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda T} = 200\pi,$$

et l'angle φ n'est inférieur que de $5'$ à $90°$.

L'angle de conjugaison de la spirale logarithmique (**532**) qui figure le mouvement amorti est donc presque droit et les spires successives diffèrent extrêmement peu de circonférences de cercles.

536. Percussions périodiques. — Considérons d'abord le cas où l'amortissement est nul, la vibration étant $a \sin \omega t$, et supposons que le système reçoive à l'époque t_1 une impulsion instantanée qui lui imprime un accroissement de vitesse v,

ce qui correspond sur la courbe représentative à un accroissement d'ordonnée $MM' = z = \frac{v}{\omega}$ (fig. 133). Si le mouvement continue sans trouble ultérieur, la nouvelle amplitude est $a' = OM'$, la phase a diminué de l'angle $M'OM = \varepsilon$ et les équations du mouvement deviennent

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} x' &= a' \sin(\omega t - \varepsilon), \\ \frac{dx'}{dt} &= \omega a' \cos(\omega t - \varepsilon). \end{aligned} \right.$$

Le triangle $M'OM$ donne

$$(12)' \quad \left\{ \begin{aligned} & a' \cos\varepsilon = a + z\cos\omega t_1, \qquad a' \sin\varepsilon = z \sin\omega t_1; \\ & a'^2 = a^2 + z^2 + 2az\cos\omega t_1, \quad \tang\varepsilon = \frac{z\sin\omega t_1}{a + z\cos\omega t_1}. \end{aligned} \right.$$

Lorsque l'impulsion $v = \omega z$ est très faible par rapport à la vitesse maximum ωa du mouvement primitif, on peut écrire

$$(12)'' \quad \left\{ \begin{aligned} & a'^2 = (a+z)^2 - 4az\sin^2\frac{\omega t_1}{2} = (a+z)^2 - az\omega^2 t_1^2, \\ & \varepsilon = \frac{z}{a}\sin\omega t_1. \end{aligned} \right.$$

Il en est de même quand t_1 est très petit par rapport à T; dans ce cas, l'amplitude a' ne diffère de la somme $a + z$ que par une quantité du second ordre, comme on le voit directement sur la figure (1).

Si l'impulsion v se reproduit au bout du temps $T' = \frac{2\pi}{\omega}$ l'angle décrit par le point figuratif M' dans l'intervalle est $\omega T' = 2\pi + \omega(T' - T)$, et sa position M_1 au moment de la seconde impulsion est définie par l'arc $MM_1 = a'\omega(T' - T)$.

Admettant encore que la fraction $\frac{T' - T}{T}$ est très faible, les longueurs MM' et MM_1 pourront être traitées comme des infiniment petits.

(1) P. Weiss, *Journal de phys.* [3], t. IV, p. 420; 1895.

On peut chercher maintenant, avec les restrictions précédentes, quel est le lieu des points $MM_1 .....$, lorsque l'impulsion v est répétée périodiquement aux intervalles T'.

Menant la droite MC perpendiculaire à l'arc MM_1, le triangle fini CMO et le triangle infiniment petit MM_1M' sont semblables et donnent les relations

$$\frac{OC}{MM'} = \frac{MC}{MM_1} = \frac{OM}{M_1M'} = \frac{1}{\omega(T'-T)}.$$

Il en résulte $OC = \frac{z}{\omega(T'-T)}$, c'est-à-dire que la distance $OC = c$ est constante ; le lieu des points M, ou l'*indicatrice* des impulsions, est donc une circonférence.

L'arc MM_1 correspondant à l'intervalle de temps T', la vitesse angulaire ω_1 du point M sur cette circonférence et la période correspondante T_1 sont

$$\omega_1 = \frac{1}{T'}\cdot\frac{MM_1}{MC} = \omega\,\frac{T'-T}{T'}, \qquad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T'}.$$

Ces valeurs de ω_1 et T_1 sont indépendantes de t_1, c'est-à-dire de la phase ωt_1 à laquelle ont débuté les impulsions, mais le rayon $b = MC$ de l'indicatrice varie avec cette phase et l'on a

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\sin\omega t_1,$$

$$b^2 - c^2 = a(a - 2c\sin\omega t_1) = a\left[a - \frac{2z\sin\omega t_1}{\omega(T'-T)}\right].$$

L'amplitude de chaque oscillation est donnée par le rayon vecteur $\rho = OM$ de l'indicatrice et la variation de phase correspondante peut être représentée par l'angle $\psi = MOC$.

Il se présente deux circonstances distinctes, suivant que le point O est en dehors ou à l'intérieur de la courbe indicatrice, c'est-à-dire que $b \lesseqgtr c$ ou $\sin\omega t_1 \gtrless \frac{a}{2z}\,\omega(T'-T)$.

Dans le premier cas, $b < c$, l'amplitude varie entre les valeurs extrêmes OA et OB, c'est-à-dire $c - b$ et $c + b$, tandis que les changements de phase sont compris entre les valeurs

extrêmes $\pm\psi_1$ de l'angle ψ. La durée moyenne des oscillations primitives n'est pas modifiée, mais il se produit des variations d'amplitude, analogues aux *battements*, dont la période est T_1.

Dans le second cas, la variation de phase ψ est continue et l'amplitude des oscillations reste comprise entre $c-b$ et $c+b$. Alors le système avance ou retarde d'une période entière T pour chaque période T_1.

Aucune de ces deux solutions ne résout le problème de la synchronisation.

Supposons maintenant qu'il existe un amortissement faible. Chacune des spires de la spirale représentative peut encore être considérée comme circulaire de rayon $\rho = ae^{-\lambda t}$.

La première impulsion, au point M (fig. 134), fait croître

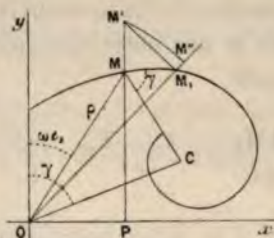


Fig. 134.

l'ordonnée de la quantité $z = MM'$. Au moment de l'impulsion suivante, le point figuratif serait venu en M", sauf amortissement, à la distance

$$M'M'' = \rho'\omega(T'-T) = \rho\omega(T'-T),$$

mais le rayon vecteur a diminué pendant le temps T' de la quantité

$$M''M_1 = -d\rho = \rho\lambda T'.$$

L'angle $\gamma = M'M_1M''$ est indépendant de l'époque initiale t_1 des perturbations et l'on a

$$\tan\gamma = \frac{M'M''}{M''M_1} = \frac{\omega}{\lambda}\cdot\frac{T'-T}{T'} = \frac{2\pi}{\lambda T}\left(1-\frac{T}{T'}\right)$$

$$M'M_1 = \frac{M'M''}{\sin\gamma} = \frac{\rho\omega(T'-T)}{\sin\gamma}.$$

Si l'on mène la droite MC dans une direction qui fait l'angle γ avec MM_1 et la droite OC inclinée du même angle sur l'axe des y, les triangles CMO et MM_1M' sont encore semblables et donnent

$$\frac{OC}{MM'} = \frac{MC}{MM_1} = \frac{OM}{M'M_1} = \frac{\sin\gamma}{\omega(T'-T)}.$$

La distance $OC = \frac{z\sin\gamma}{\omega(T'-T)} = c$ est donc une quantité constante sur une direction définie ; comme la droite MC fait un angle constant γ avec l'élément MM_1, il en résulte que la *courbe indicatrice* des impulsions périodiques est une spirale logarithmique dont l'angle de conjugaison est γ et dont le pôle C est situé sur une droite qui fait l'angle $90° - \gamma$ avec l'axe des x.

Sur cette spirale, la vitesse angulaire et la période sont

$$\omega_1 = \frac{1}{T'}\,\frac{MM_1}{MC} = \frac{\omega}{\sin\gamma}\cdot\frac{T'-T}{T'}, \qquad \frac{\sin\gamma}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T'}.$$

Dans ces conditions, les oscillations primitives sont profondément altérées ; les premières ont des amplitudes et des différences de phase variables, mais l'amortissement ne tarde pas à éteindre ces perturbations et il s'établit finalement un régime d'oscillations régulières, de même période T' que celle des impulsions et d'amplitude constante c.

537. **Actions de courte durée.** — L'action extérieure a toujours une durée finie θ, mais il est facile de reconnaître qu'elle équivaut dans tous les cas à une percussion instantanée.

Comme on ne considère que des oscillations faiblement amorties, si la durée θ est petite par rapport à la période T, on peut supposer la vibration primitive sinusoïdale [1]. Il résulte des équations (12) et (12)' que, pour une percussion ωz, les valeurs relatives à l'origine du temps sont, en posant $\omega t_1 = \delta$,

$$x_0 = -a'\sin\varepsilon = -z\sin\delta,$$
$$y_0 = a'\cos\varepsilon = a + z\cos\delta,$$

[1] O. Chwolson, *Mélanges de chim. et de phys.*, St-Pétersbourg, 1881, p. 403. — E. Dorn, *Wied. Ann.*, t. XVII, p. 634 ; 1882.

et la vitesse maximum est

$$(13)\qquad \omega^2 a'^2 = \omega^2 (x_0^2 + y_0^2) = \omega^2 \left[(a+z)^2 - 4az \sin^2 \frac{\delta}{2} \right].$$

On aurait, de même, pour une série d'actions instantanées, respectivement définies par des quantités z et δ,

$$(13)'\quad \begin{cases} x_0 = -\Sigma z \sin\delta = -z_m \sin\delta_m, \\ y_0 = a + \Sigma z \cos\delta = a + z_m \cos\delta_m, \\ z_m^2 = (\Sigma z \sin\delta)^2 + (\Sigma z \cos\delta)^2 = (\Sigma z)^2 - 4\Sigma z z' \sin^2 \dfrac{\delta - \delta'}{2}, \\ \operatorname{tang} \delta_m = \dfrac{\Sigma z \sin\delta}{\Sigma z \cos\delta}. \end{cases}$$

Le résultat est identique à celui que produirait une percussion instantanée définie par z_m, à l'époque $t_m = \frac{\delta_m}{\omega}$.

Un effet quelconque, représentant une série de percussions qui se succèdent suivant une certaine loi, équivaut ainsi à une percussion unique provoquée à une époque intermédiaire.

Si l'action est continue et capable de produire sur un système sans vitesse initiale, ou de très longue période, l'accélération $w = \omega^2 z$, l'accroissement de vitesse pendant le temps dt serait

$$w\,dt = \omega z \omega\,dt = \omega z\,d\delta.$$

Les sommes que renferment les équations (13)′ doivent être remplacées par des intégrales étendues à la durée totale $\theta = t_2 - t_1$ des observations, c'est-à-dire à l'intervalle des angles $\delta_1 = \omega t_1$ et $\delta_2 = \omega t_2$, ce qui donne

$$(14)\qquad \begin{cases} z_m \sin\delta_m = \displaystyle\int z \sin\delta\,d\delta, \\ z_m \cos\delta_m = \displaystyle\int z \cos\delta\,d\delta. \end{cases}$$

Supposons que la quantité z soit constante, c'est-à-dire l'impulsion uniforme, et posons

$$z_1 = \int z\,d\delta = z(\delta_2 - \delta_1).$$

On a alors

$$z_m \sin\delta_m = z\int_1^2 \sin\delta\, d\delta = z_1 \frac{\sin\frac{\delta_2-\delta_1}{2}}{\frac{\delta_2-\delta_1}{2}} \sin\frac{\delta_1+\delta_2}{2},$$

$$z_m \cos\delta_m = z\int_1^2 \cos\delta\, d\delta = z_1 \frac{\sin\frac{\delta_2-\delta_1}{2}}{\frac{\delta_2-\delta_1}{2}} \cos\frac{\delta_1+\delta_2}{2};$$

$$(14)' \qquad \delta_m = \frac{\delta_1+\delta_2}{2}, \qquad z_m = z_1 \frac{\sin\frac{\delta_2-\delta_1}{2}}{\frac{\delta_2-\delta_1}{2}} = z_1 \frac{\sin\frac{\omega\theta}{2}}{\frac{\omega\theta}{2}}.$$

On voit par ces résultats que l'action continue équivaut à une percussion ωz_m, indépendante des conditions du mouvement primitif, produite à l'époque moyenne.

Considérons encore une impulsion sinusoïdale, prise seulement pendant la demi-période où elle conserve le même sens; telle serait l'action du courant induit dans un cadre tournant à vitesse constante dans un champ uniforme, si on utilise ce courant pendant une demi-période entre deux passages par zéro.

Pour la période $T' = 2\theta$ du phénomène, $\omega'\theta = \pi$ et l'accroissement de vitesse peut être représenté à chaque instant par

$$(15) \qquad w \sin\omega'(t-t_1)\, dt = \omega z \sin\frac{\omega'}{\omega}(\delta-\delta_1)\, d\delta.$$

Pendant le temps $t_2 - t_1 = \theta$, la variation $\delta_2 - \delta_1$ de l'angle δ est $\omega'(\delta_2 - \delta_1) = \pi\omega$; il en résulte

$$z_1 = z\int_1^2 \sin\omega'(t-t_1)\, dt = \frac{2z}{\omega'} = z\,\frac{\theta}{\pi},$$

$$z_m \sin\delta_m = z_1 \frac{\omega'}{2}\int_1^2 \sin\frac{\omega'}{\omega}(\delta-\delta_1)\sin\delta\, d\delta,$$

$$z_m \cos\delta_m = z_1 \frac{\omega'}{2}\int_1^2 \sin\frac{\omega'}{\omega}(\delta-\delta_1)\cos\delta\, d\delta.$$

En remplaçant les produits de sinus et cosinus par des sommes ou des différences, on trouve aisément

$$z_m \sin \delta_m = z_1 \omega \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega^2} \cos \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \sin \frac{\delta_1 + \delta_2}{2},$$

$$z_m \cos \delta_m = z_1 \omega \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega^2} \cos \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}.$$

L'effet est encore le même que si l'on avait provoqué, à l'époque moyenne, une percussion définie par

$$(15)' \qquad z_m = z_1 \omega \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega^2} \cos \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = z_1 \omega \frac{\cos \frac{\omega\theta}{2}}{1 - \left(\frac{2\theta}{T}\right)^2}.$$

538. Tracé de l'indicatrice. — Pour contrôler ces résultats, M. Cornu a imaginé une expérience qui permet d'obtenir l'enregistrement photographique de la courbe indicatrice.

L'appareil oscillant est un pendule battant à peu près la seconde. Un barreau aimanté perpendiculaire à la tige est disposé de manière que l'un des pôles se meut dans une bobine à circuit fermé, qui permet de modifier l'amortissement; l'autre pôle se meut dans une bobine qui reçoit à chaque période un courant de courte durée, fermé par une horloge astronomique. Ce courant exerce sur le pôle correspondant une attraction destinée à produire le synchronisme.

Des aiguilles aimantées, attachées au même pendule, oscillent dans des solénoïdes et produisent un courant induit dont l'intensité est, à part les effets de self-induction, proportionnelle à la vitesse. Ce courant traverse ensuite un cadre oscillant dans un champ magnétique (galvanomètre Deprez-d'Arsonval) réglé de manière que, dans le régime stable, ses écarts soient sensiblement proportionnels au courant.

On a ainsi deux appareils, pendule et galvanomètre, dont l'un reproduit les écarts du pendule et l'autre sa vitesse. Si on les munit de miroirs oscillant dans des plans rectangulaires, et qu'on observe l'image d'une source de lumière après double réflexion, on obtiendra les figures utilisées en acoustique.

La figure est en général elliptique, mais il est facile de la

ramener à la forme circulaire en modifiant la résistance du circuit induit.

Il suffit maintenant de cacher la source par un obturateur, qui s'efface à chaque passage du courant de synchronisation. L'ensemble des points observés, dans l'intervalle de transition qui précède l'établissement du synchronisme, a pour coordonnées l'écart du pendule et la vitesse modifiée; c'est la courbe indicatrice. Une plaque sensible placée au foyer de la lunette conserve la trace de tous ces points dont la succession est bien la spirale fournie par le calcul.

539. **Observation des oscillations.** — Toutes les circonstances d'un mouvement oscillatoire sont déterminées par la valeur et l'époque des élongations successives. Comme la vitesse est nulle au moment des élongations, les intervalles correspondants ne pourraient être évalués avec exactitude; il est préférable de choisir les positions où le système a sa plus grande vitesse, c'est-à-dire celles qui sont voisines de l'équilibre.

Pour étudier ce mouvement, on observera, soit le passage d'un index devant une échelle divisée, soit l'image d'un trait sur un micromètre placé au foyer d'une lunette, soit l'image d'une échelle divisée sur le réticule, que cette échelle ait été tracée sur le système mobile ou provienne de la réflexion par un miroir, etc. On note les passages du système par une position déterminée et on évalue les élongations.

Quelle que soit d'ailleurs la position de repère, la différence des époques de deux passages successifs dans le *même sens* représente la période ou le double de la durée de l'oscillation simple, telle qu'on la considère habituellement.

A moins que l'amortissement ne soit rapide, cette période s'obtiendra très exactement par l'intervalle d'un grand nombre de passages. Quand les oscillations sont de très longue durée, comme celles du pendule, la méthode des *coïncidences* de Borda permet de résoudre le problème avec toute la précision désirable. D'ailleurs, la manière d'observer dépend beaucoup du caractère que présente le phénomène.

Si le mouvement est observable pendant quelque temps, un quart d'heure par exemple, on pourra déterminer la durée des oscillations de la manière suivante.

Supposons, comme dans le cas d'une aiguille aimantée, que

la durée des oscillations soit de 3 à 5 secondes et que les divisions d'une échelle passent sur le réticule d'une lunette. On choisit comme repère une division voisine de celle qui correspond à l'équilibre. Avec un compteur à pointage, on note l'époque t_0 à laquelle cette division passe sur le fil en marchant dans un certain sens, soit de gauche à droite, c'est le passage d'ordre zéro; puis on compte les oscillations suivantes et on note l'époque t_1 du 20e passage, lequel s'effectue dans le sens primitif, c'est-à-dire de la 10e période. En même temps, on a observé les divisions extrêmes qui correspondent à l'oscillation initiale et celles de la 20e, d'où l'on déduira les élongations correspondantes a_0 et a_1. Il n'est plus nécessaire de compter les oscillations suivantes, car on sait que le 40e passage aura lieu au voisinage de l'époque $t_1 + (t_1 - t_0)$. On se prépare à l'observation un peu avant et on note exactement l'époque t_2 du 40e passage, puis l'élongation correspondante a_2. On déterminera, de même, les époques t_3, t_4, t_5, et les élongations a_3, a_4, a_5 des 60e, 80e et 100e passages.

On en déduit les valeurs $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$,..... de la durée de 20 oscillations pendant les séries successives, et les élongations moyennes $\frac{a_0 + a_1}{2}$, $\frac{a_1 + a_2}{2}$,..... correspondantes.

Si les durées successives ne diffèrent pas d'une manière appréciable, pour de grandes variations dans les écarts, on en conclut que le couple directeur est proportionnel à la déviation; la durée de l'oscillation sera donnée alors par le centième de la différence totale.

Dans la plupart des cas, le couple directeur est proportionnel au sinus de la déviation; la durée d'oscillation varie alors avec l'amplitude, suivant la loi du mouvement pendulaire (**529**). La durée τ' d'une oscillation simple se déduira alors de la durée τ relative aux oscillations infiniment petites par l'équation (5)', que l'on peut écrire

$$\tau' = \tau(1 + \beta).$$

Pour simplifier les opérations, on a calculé des tables qui donnent les valeurs de la parenthèse $1 + \beta$ pour différents angles d'écart. Voici, par exemple, les valeurs de cette table.

de 2 en 2 degrés, jusqu'à 60 degrés, les quantités intermédiaires pouvant se déterminer par interpolation [1] :

Table pour la réduction des oscillations pendulaires aux angles infiniment petits.

Écart.	$1+\beta$	Écart.	$1+\beta$	Écart.	$1+\beta$
2°	1,0001	22°	1,0093	42°	1,0346
4	1,0003	24	1,0111	44	1,0381
6	1,0007	26	1,0130	46	1,0418
8	1,0011	28	1,0151	48	1,0456
10	1,0019	30	1,0174	50	1,0497
12	1,0027	32	1,0199	52	1,0539
14	1,0037	34	1,0225	54	1,0584
16	1,0049	36	1,0252	56	1,0630
18	1,0062	38	1,0282	58	1,0678
20	1,0077	40	1,0313	60	1,0728

Comme l'amplitude diminue d'une manière continue, on divise chaque durée partielle $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$,..... par le nombre $1+\beta_0$, $1+\beta_1$,..... qui convient à l'écart correspondant réduit en angle et on obtient des valeurs approchées t'_1, t'_2,..... de la durée de 20 oscillations infiniment petites. Si elles ne diffèrent pas d'une manière systématique, c'est que le phénomène est régulier et la correction exacte. On prendra enfin comme durée d'oscillation la moyenne de toutes ces valeurs.

D'une manière générale, si t'_1, t'_2,..... t'_m, sont les durées réduites de m séries de n oscillations, c'est-à-dire si l'on a observé un nombre total $mn = N$ d'oscillations, la durée τ relative aux amplitudes infiniment petites est

$$\tau = \frac{t'_1 + t'_2 + \cdots\cdots t'_m}{N}. \tag{16}$$

Les erreurs commises sur l'époque des passages intermédiaires n'affectent pas d'une manière appréciable la valeur de τ et la précision dépend surtout de l'exactitude avec laquelle on a pointé le passage initial et le dernier. Si ces observations

[1] DARONDEAU et CHEVALIER, *Voyage de la Bonite. Observations magnétiques*, t. II, p. 9; 1846.

sont faites à $0^s,1$ près, on aura, pour un quart d'heure, une approximation relative d'environ 0,0002.

Quand il n'y a pas intérêt à vérifier l'exactitude de la correction des écarts séparément pour les différentes séries, on peut faire la réduction d'une manière plus rapide. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_m$ les nombres des oscillations infiniment petites de durées τ, qui seraient effectuées pendant les durées $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2, \ldots$ des n oscillations qui forment les séries successives ; on a

$$t_1 - t_0 = p_1 \tau = n\tau(1 + \beta_1),$$
$$t_2 - t_1 = p_2 \tau = n\tau(1 + \beta_2), \quad \ldots.$$

En appelant $N = mn$ le nombre total des oscillations et $\tau' = \frac{t_m - t_0}{N}$ leur durée moyenne, on en déduit

$$N\tau' = \tau \Sigma p = n\tau(m + \Sigma p) = N\tau\left(1 + \frac{\Sigma\beta}{m}\right),$$

$$(17) \qquad \tau = \frac{r'}{1 + \frac{\Sigma\beta}{m}} = \tau'\left(1 - \frac{\Sigma\beta}{m}\right).$$

Lorsque les déviations ne dépassent pas 35°, la valeur de β se réduit sensiblement au premier terme $\frac{a^2}{16}$. Si la suite des amplitudes est assimilable à une progression géométrique, la correction se fera par une autre méthode.

En posant $\alpha = e^{-\frac{\lambda T}{2}} = e^{-\lambda\tau}$, les durées propres de n oscillations successives sont

$$\tau(1 + \beta_1), \quad \tau(1 + \beta_1\alpha), \quad \tau(1 + \beta_1\alpha^2), \quad \ldots\ldots, \quad \tau(1 + \beta_1\alpha^{n-1});$$

on a donc

$$n\tau' = \tau[n + \beta_1(1 + \alpha + \ldots\ldots + \alpha^{n-1})] = n\tau\left(1 + \frac{\beta_1}{n}\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}\right),$$

$$(18) \qquad \tau = \frac{\tau'}{1 + \frac{\beta_1}{n}\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}} = \tau'\left[1 - \frac{\beta_1}{n}\cdot\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}\right].$$

Pour déterminer le terme de correction, on prendra le rapport de deux amplitudes a' et a'' séparées par m oscillations, ou la moyenne des rapports analogues empruntés aux meilleures observations, ce qui donne $\alpha^m = \frac{\beta'}{\beta''} = \left(\frac{a'}{a''}\right)^2$.

Lorsque l'amortissement est faible, on a très sensiblement $\alpha = 1 - \lambda\tau$; si le nombre des oscillations n'est pas trop grand, de façon que le produit $n\lambda\tau$ reste de l'ordre des centièmes, on peut écrire

$$\alpha^n = 1 - n\lambda\tau + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2\tau^2 = 1 - n\lambda\tau\left(1 - \frac{n-1}{2}\lambda\tau\right),$$

$$(19) \qquad \tau = \tau'\left[1 - \beta_1\left(1 - \frac{n-1}{2}\lambda\tau\right)\right].$$

Nous prendrons comme exemple l'observation d'une boussole d'intensité horizontale faite à Pondichéry le 7 juin 1837 par Darondeau et Chevalier. Les observateurs avaient pointé 1400 oscillations par séries de 50; nous donnerons seulement les lectures relatives aux différentes centaines.

Nombre des passages.	Durée de 100 oscillations.	Écart moyen.	Durée réduite.
100	369^s,3	31°,5	362^s,33
200	366 ,0	25 ,0	361 ,66
300	364 ,7	19 ,5	362 ,04
400	363 ,3	15 ,5	361 ,64
500	363 ,0	12 ,5	361 ,94
600	362 ,3	9 ,75	361 ,65
700	362 ,0	7 ,75	361 ,70
800	362 ,0	6 ,0	361 ,75
900	362 ,4	4 ,5	362 ,26
1000	362 ,0	3 ,75	361 ,89
1100	362 ,0	3 ,25	361 ,93
1200	362 ,3	2 ,75	362 ,23
1300	362 ,0	2 ,25	361 ,96
1400	362 ,3	1 ,75	262 ,27
Moy.	363^s,257		361^s.94

La durée de l'oscillation, par la formule (16), est donc

$$\tau = 3^s{,}6194.$$

La réduction a été faite par les valeurs de β empruntées à la table par interpolation. La somme de ces valeurs relatives aux 14 séries est $\Sigma\beta = 0{,}0502$; la formule (17) donne alors

$$\tau = \frac{3^s{,}63257}{1 + \frac{0{,}0502}{14}} = \frac{3^s{,}63257}{1{,}003585} = 3^s{,}6196.$$

Enfin, jusqu'au 800e passage, le rapport d'un écart moyen au suivant varie, sans aucune règle, de 1,24 à 1,29 et la moyenne est 1,267; les déviations sont ensuite trop faibles pour qu'on en puisse déduire une évaluation approchée de l'amortissement. On a donc

$$\log.\alpha = \frac{2}{100}\log.\frac{1}{1{,}267}, \qquad \alpha = 0{,}99528 = 1 - 0{,}00472.$$

L'écart de la première oscillation ayant été de 35°, pour lequel $\beta_1 = 0{,}0238$, la formule (18) donne, avec $n = 1400$,

$$\frac{\beta_1}{n}\cdot\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{0{,}0238}{1400}\cdot\frac{1-0{,}001325}{0{,}00472} = 0{,}00360,$$

$$\tau = \frac{3^s{,}63257}{1{,}00360} = 3^s{,}6195.$$

Les observations sont faites avec un compteur dont on doit connaître la marche, et il ne reste plus à faire que la correction relative à la marche de ce compteur.

Toutes les méthodes conduisent pratiquement au même résultat, mais le tableau des réductions successives, malgré les différences qui tiennent aux erreurs d'observation, a l'avantage de montrer, dans le cas actuel, que la durée réduite des oscillations tend à augmenter; cet accroissement était dû à une élévation de température de l'aiguille oscillante.

Si la position d'équilibre se déplace d'une manière continue comme il arrive pour les barreaux aimantés, par suite des variations de la déclinaison, on commet à chaque lecture une erreur égale au temps que le mobile met à parcourir l'arc dont

le zéro s'est déplacé, et cette erreur ne peut être évitée qu'en notant chaque fois le passage sur la division qui correspond au zéro actuel. A cet effet, un peu avant l'observalion, on dictera les valeurs de deux élongations de sens contraires à un aide, qui en déduira immédiatement, en tenant compte de l'amortissement, la division qui correspond au zéro, et le pointé sera fait sur cette division.

Cette méthode de correction suppose évidemment que les changements dans la direction d'équilibre ne sont pas sensibles pendant la durée de quelques oscillations.

Enfin on doit mettre à part les mouvements dans lesquels l'action perturbatrice est constante et toujours opposée à la vitesse (534), ou renferme un terme de même nature proportionnel à une puissance paire de l'écart x.

540. Méthode de Gauss. — Le mode d'observation employé par Gauss ([1]) s'applique à toute espèce d'oscillations, quel

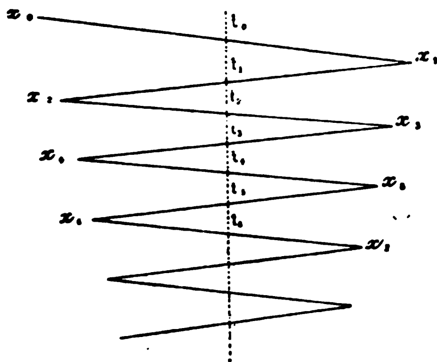


Fig. 135.

que soit l'amortissement, mais il convient surtout au cas où les oscillations sont régulières et très lentes.

Supposons, pour préciser les idées, que l'on observe l'image d'une échelle dont les divisions sont numérotées à partir d'une des extrémités. Nous désignerons par x_0, x_1, x_2, les divisions qui correspondent aux élongations successives (fig. 135); les indices pairs se rapportent aux oscillations de gauche et les indices impairs aux oscillations de droite.

([1]) Gauss, *Resultate aus den Beob. des mag. Vereins*, *Oeuv.* 1837; t. V. p. 374.

La durée de l'oscillation, par la formule (16), e

$$\tau = 3^s,6194.$$

La réduction a été faite par les valeurs de β emp table par interpolation. La somme de ces valeurs i 14 séries est $\Sigma\beta = 0,0502$; la formule (17) donne

$$\tau = \frac{3^s,63257}{1 + \frac{0,0502}{14}} = \frac{3^s,63257}{1,003585} = 3^s,619$$

Enfin, jusqu'au 800e passage, le rapport d'un suivant varie, sans aucune règle, de 1,24 à 1,... est 1,267; les déviations sont ensuite trop f en puisse déduire une évaluation approché ment. On a donc

$$\log.\alpha = \frac{2}{100}\log.\frac{1}{1,267}, \qquad \alpha = 0,99528$$

L'écart de la première oscillation aya lequel $\beta_1 = 0,0238$, la formule (18) donne

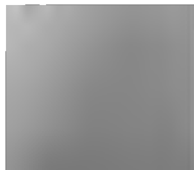
$$\frac{\beta_1}{n}\cdot\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \frac{0,0238}{1400}\cdot\frac{1-0,0013}{0,00472}$$

$$\tau = \frac{3^s,63257}{1,00360} = 3^s,6$$

Les observations sont faites avec u connaître la marche, et il ne reste p tion relative à la marche de ce comp

Toutes les méthodes conduisent résultat, mais le tableau des rédu les différences qui tiennent aux erre tage de montrer, dans le cas actue oscillations tend à augmenter; à une élévation de température d

Si la position d'équilibre se dé comme il arrive pour les barre variations de la déclinaison, on erreur égale au temps que le mo





…oque

....

petites, en
…s de chaque
$t'_1 - \frac{t_0+t_1}{2}\Big)$
dans les séries

…t aux oscillations
…et a'' séparées par

$$\mathfrak{L}.\frac{a'}{a''}.$$

…tude a' comme connue
probable soit la même
…e proposer de choisir le
la valeur de $\lambda\tau$ avec la plus
…signant par $d(\lambda\tau)$ l'erreur
…ur la dernière amplitude a'',

$$\frac{da''}{a''\,\mathfrak{L}.\frac{a'}{a''}}.$$

4

Il faut d'abord déterminer la position d'équ
oscillations elles-mêmes, sans attendre que le s
au repos. Pour la division p, qui correspond à l
peut prendre la position moyenne des milieux
plitudes successives :

$$(20) \qquad p = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_2 + x_1}{2}\right) = \frac{x_0 + 2x_1}{4}$$

Si cette première approximation ne suffit pa
une valeur plus exacte en écrivant que trois am
cessives sont en progression géométrique et qu

$$\frac{x_0 - p}{p - x_1} = \frac{p - x_1}{x_2 - p} = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1},$$

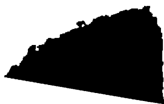
$$(20)' \qquad p = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 + x_2 - 2x_1}.$$

L'amplitude moyenne totale des oscillations

$$a_1 = \frac{x_0 + x_2}{2} - x_1 = \frac{x_0 + x_2 - 2x_1}{2},$$

Pour déterminer la durée des oscillations, o
successives, x_0, x_2, x_4, x_6, d'un côté, et x_1, x
correspondant aux élongations, en notar
t_0, t_1,..... t_5, de passage sur le réticule, dan
d'une division voisine de p; on observe c
séries semblables, à différents intervalles d
Chacune des séries conduit à un tablea
vante, qui donne 5 valeurs moyennes pour
tion, la division d'équilibre et l'amplitude

Lecture des écarts.	Époque du passage.	Époque de l'élongation.	Position du zéro.
x_0			
	t_0		
x_1		$\frac{t_0 + t_1}{2}$	$\frac{x_0 + 2x_1 + x_2}{4}$
	t_1		
x_2		$\frac{t_1 + t_2}{2}$	$\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}$
	t_2		
x_3			



qui est en effet d'ordre impair, portera donc le numéro 147. On opérera de même pour les séries suivantes :

Ordre des élongat.	Lectures.	Epoque du passage.	Epoque de l'élongation.	Position du zéro.	Amplitude totale.
	1755,1	$21^h55^m26^s,9$			
0	266,0	56 8,4	$21^h55^m47^s,65$	1009,72	1487,45
1	1731,8	51,2	56 29,80	1009,52	1484,55
2	268,5	57 33,0	57 12,10	1009,42	1481,85
3	1748,9	58 15,5	57 54,25	1009,47	1478,85
4	271,6	57,4	58 36,45	1009,07	1474,95
	1744,2				
	497,8	23 38 49,2			
147	1502,2	39 31,5	23 39 10,35	1000,57	1003,15
148	500,1	40 13,6	52,55	1000,37	1000,55
149	1499,1	56,0	40 34,80	1000,22	997,75
150	502,6	41 38,1	41 17,05	1000,20	995,20
151	1496,5	42 20,3	59,20	1000,40	992,20
	506,1				
	645,9	1 10 12,6			
277	1341,5	54,2	1 10 33,40	994,05	694,90
278	647,3	11 37,0	11 15,60	993,87	693,15
279	1339,4	12 18,4	57,70	993,70	691,40
280	648,7	13 1,3	12 39,85	993,45	689,50
281	1337,0	43,0	13 22,15	993,35	687,30
	650,7				
	1232,1	2 49 19,7			
418	775,9	50 1,5	2 49 40,60	1003,72	455,65
419	1231,0	44,1	50 22,80	1003,57	454,85
420	776,4	51 25,8	51 4,95	1003,12	453,45
421	1228,7	52 8,5	47,15	1002,95	451,50
422	778,0	50,0	52 29,25	1002,92	449,85
	1227,0				

Les élongations correspondantes dans les deux premières séries donnent, pour la durée de 147 oscillations :

Entre les élongations	0	et	147......	1[1]
—	1	—	148	
—	2	—	149	
—	3	—	150	
—	4	—	151	

La moyenne $1^h 43^m 22^s,74$ donne $42^s,1$…
moyenne d'une oscillation dans le pren…
obtient de même $42^s,176$ pour le second i…
pour le troisième. La moyenne générale …
Entre les séries successives on trouve …
logarithmique, 0,002689, 0,002813 et 0,…
sont légèrement croissantes; les ampli…
un peu plus vite que ne le comportera…
sion géométrique. On voit d'ailleurs …
libre était nettement variable. … u mou-
La distance de l'échelle était de … l'impul-
déviations étant ramenées à leurs … entre deux
duction aux amplitudes infiniment …
donne, pour l'intervalle qui sépare … la différence
consécutives, … est très petite,
… est une petite
… montrent que
… que si elle avait lieu

Élongations.		
2	et	149
149	—	279
279	—	420

La moyenne $42^s,177$ représ… est très voisine
erreur probable inférieure à 5 … aussi de l'équa-
titude n'est pas supérieure à … ne diffère que
vations de Darondeau et … $u_0 + v_0 = u'_0$.
réduction plus simple. … oscillations primitives
541. Mesure des impulsio… en déduira v_0.
force de durée très court… part la variation
capable d'exécuter des o… $a_1 + \frac{a'_1 - a'_2}{4}$
ultérieur permet de déterm…
Si le mouvement est si… la somme
… correspondrait à

sera connue par l'amplitude a du mouvement et par la période T des oscillations.

Si les oscillations sont pendulaires (**529**), on a

$$u_0^2 = \frac{2C}{K}(1 - \cos a) = 4\frac{C}{K}\sin^2\frac{a}{2},$$

$$(21) \qquad u_0 = \frac{2\pi}{T} 2\sin\frac{a}{2},$$

et la période T relative aux amplitudes très faibles se déduit de la valeur observée T' par l'équation (5)'.

Dans le cas où les oscillations s'amortissent en restant isochrones, on aura, pour l'époque t_1 de la première élongation a_1 (**532**),

$$\omega t_1 = \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{\lambda},$$

$$a_1 = ae^{-\lambda t_1}\sin\omega t_1 = ae^{-\lambda t_1}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}},$$

$$(22) \quad u_0 = \omega a = a_1\sqrt{\omega^2+\lambda^2}\,e^{\lambda t_1} = \omega a_1\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}\,e^{\frac{\lambda}{\omega}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{\lambda}}.$$

Si l'amortissement est assez faible pour que le carré du rapport $\frac{\lambda}{\omega}$ soit négligeable devant l'unité, et qu'on appelle a_3 l'élongation suivante, observée du même côté, on peut écrire

$$a_1 = ae^{-\lambda t_1} = a(1 - \lambda t_1),$$

$$u_0 = \omega a = \omega a_1(1 + \lambda t_1),$$

$$a_3 = a_1 e^{-4\lambda t_1} = a_1(1 - 4\lambda t_1), \qquad a_1\lambda t_1 = \frac{a_1 - a_3}{4};$$

$$(23) \qquad u_0 = \omega\left(a_1 + \frac{a_1 - a_3}{4}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(a_1 + \frac{a_1 - a_3}{4}\right).$$

C'est la correction indiquée précédemment (**365**) pour le galvanomètre balistique.

Si l'amortissement est tel que le mouvement soit insensible après un petit nombre d'oscillations, on déterminera les pre-

[illegible] u par deux élongations quel-
[illegible]

$$\frac{-\ x^{p+1}}{-\ x^{n+1}}.$$

[illegible]

$$= \omega a_n \frac{(1-x)\,x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{n+1}}.$$

[illegible] faible, ou l'amortissement assez [illegible] répétée indéfiniment ne donne

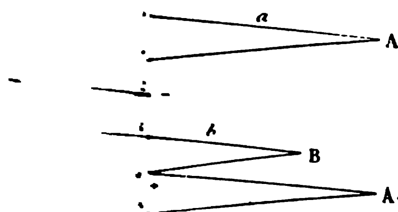


Fig. 136.

[illegible] on arrive bientôt à un régime [illegible] déviation est $\frac{a}{1-x} = b$ et l'on a

$$\omega b(1-x)\,x^{\frac{1}{2}}.$$

[illegible] alors par l'étude des oscillations [illegible] impulsions.

[illegible] a été imaginée par Weber (1). L'ap- [illegible] la direction positive par l'impulsion [illegible] atteindre une première élongation A,

(1) [illegible] zu Gottingen, t. I, p. 349. — *Resultate des*

puis l'élongation négative suivante B′ (fig. 136). Au passage de retour par l'équilibre, on donne une impulsion négative et on laisse produire les deux élongations A′ et B. Une impulsion positive est imprimée de nouveau au système quand il revient au zéro, etc. On aura alors

$$
\begin{aligned}
a &= a_0 e^{-\lambda t_1} = a_0 \alpha^{\frac{1}{2}},\\
b' &= a\alpha,\\
a' &= a - b'\alpha = a(1-\alpha^2),\\
b &= a'\alpha = a\alpha(1-\alpha^2),\\
a_1 &= a - b\alpha = a(1-\alpha^2+\alpha^4),\ \ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

$$\alpha = \frac{b'}{a} = \frac{b}{a'} = \frac{b+b'}{a+a'},$$

$$a = a' + b'\alpha = a_1 + b\alpha = \frac{1}{2}[a' + a_1 + (b'+b)\alpha] = a_0\alpha^{\frac{1}{2}}.$$

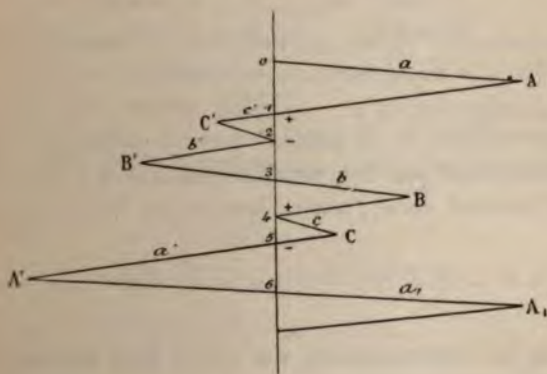


Fig. 137.

La raison α et l'amplitude a_0 seront ainsi déterminées par les distances BB′, AA′ et $A'A_1$, sans qu'il soit nécessaire de connaître la position du zéro.

Si les opérations sont répétées indéfiniment, de manière à produire un régime régulier, les quatre espèces d'élongations deviennent constantes et l'on a $a' = a_1$, $b' = b$.

La méthode de recul ne convient pas lorsque l'amortissement est très faible. Weber et Zöllner (¹) ont employé,

(¹) WEBER et ZÖLLNER, *Berichte der K. S. Gesell.*, Leipzig; 1880.

dans ce cas, une *méthode mixte*, qui consiste encore à donner des impulsions successives de sens contraires, mais qui sont alternativement en accord ou en désaccord avec la vitesse actuelle.

A la suite d'une grande élongation positive A (fig. 137), le système reçoit, au passage par l'équilibre, une impulsion positive, qui réduit l'élongation suivante en C'; au deuxième passage, une impulsion négative produit une élongation moyenne B' et l'oscillation suivante B'B est libre. Au retour, une impulsion positive amène le système en C, puis une impulsion négative produit l'élongation A'. L'oscillation A'A, est encore libre et les mêmes opérations recommencent.

On a ainsi trois espèces d'oscillations. Si l'on pose $a'_0 = a_0 \alpha$, les élongations successives deviennent

$$c' = a\alpha - a'_0, \qquad b' = a'_0 - c'\alpha,$$
$$b = b'\alpha, \qquad c = a'_0 - b\alpha,$$
$$a' = a'_0 + c\alpha, \qquad a_1 = a'\alpha.$$

Ces observations ne se prêtent pas au calcul du rapport α, qu'on déterminera par les oscillations libres; elles donnent différentes valeurs de a'_0, parmi lesquelles l'expression

$$2a'_0 = a' + b\alpha + c(1 - \alpha) = a' + b - (b - c)(1 - \alpha),$$

n'exige pas la connaissance du zéro. Les autres relations peuvent servir de contrôle.

On atteindra encore le régime permanent, ou $a_1 = a$, après un certain nombre d'opérations.

La méthode de multiplication permet de mettre en évidence et d'évaluer des impulsions très faibles. Les deux autres comportent de graves causes d'erreurs qui tiennent à la nécessité de provoquer les impulsions successives à des époques bien déterminées; elles ne paraissent présenter aucun avantage sérieux sur l'observation directe de la première déviation et des oscillations libres qui la suivent.

543. Mouvement apériodique. — Il reste enfin à examiner le cas où l'amortissement est assez grand pour que le sys-

tème n'exécute plus d'oscillations libres [1], ce qui exige la condition (**532**)

$$\omega^2 < 0 \quad \text{ou} \quad C_1^2 > 4KC.$$

Posant cette fois $\gamma^2 = \lambda^2 - \frac{C}{K}$, l'équation qui détermine les exponentielles peut s'écrire

$$\rho^2 + 2\lambda\rho + \lambda^2 - \gamma^2 = 0,$$
$$\rho = -\lambda \pm \gamma,$$

et la solution de l'équation (8) devient

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= e^{-\lambda t}(A e^{\gamma t} + A' e^{-\gamma t}), \\ \frac{dx}{dt} &= -e^{-\lambda t}[A(\lambda - \gamma)e^{\gamma t} + A'(\lambda + \gamma)e^{-\gamma t}]. \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer les constantes, nous supposerons qu'à l'époque $t = 0$ on abandonne le système à lui-même sous l'écart a avec une vitesse initiale $-v_0$ dirigée vers la position d'équilibre. On a alors $x_0 = a$ et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -v_0$; il en résulte

$$a = A + A',$$
$$v_0 = A(\lambda - \gamma) + A'(\lambda + \gamma);$$
$$A = \frac{a(\lambda + \gamma) - v_0}{2\gamma}, \quad A' = \frac{v_0 - a(\lambda - \gamma)}{2\gamma},$$

$$[illegible] \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{e^{-\lambda t}}{2\gamma}\left\{[a(\lambda + \gamma) - v_0]e^{\gamma t} - [a(\lambda - \gamma) - v_0]e^{-\gamma t}\right\}, \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{e^{-\lambda t}}{2\gamma}\left\{[a(\lambda^2 - \gamma^2) - v_0(\lambda - \gamma)]e^{\gamma t} - [a(\lambda^2 - \gamma^2) - v_0(\lambda + \gamma)]e^{-\gamma t}\right\}. \end{aligned} \right.$$

Si la vitesse v_0 est nulle, le système ne revient à sa position d'équilibre qu'au bout d'un temps infini en théorie, et pratiquement assez court, sans que l'écart éprouve aucun changement de signe.

Avec la vitesse v_0, le mouvement est encore apériodique,

[1] DUBOIS-RAYMOND, *Monatsb. der K. P. Ak. der Wiss.*, 1869, 1870, 1873.

mais la valeur de x peut changer de signe. L'époque t_1 du passage à l'équilibre est

$$e^{2\gamma t_1} = \frac{a(\lambda-\gamma)-v_0}{a(\lambda+\gamma)-v_0} = \frac{v_0-a(\lambda-\gamma)}{v_0-a(\lambda+\gamma)},$$

et l'époque t_2 du plus grand écart en sens contraire

$$e^{2\gamma t_2} = \frac{\lambda+\gamma}{\lambda-\gamma}\cdot\frac{v_0-a(\lambda-\gamma)}{v_0-a(\lambda+\gamma)}.$$

Le système revient ensuite lentement à l'équilibre. Pour que la valeur de t_1 soit réelle, il faut qu'on ait $v_0 > a(\lambda+\gamma)$.

Supposons enfin que le système parte de l'équilibre avec une vitesse initiale v_0 ; il suffit de faire $a=0$ dans les équations (24)', en changeant le signe de v_0, ce qui donne

$$(24)'' \quad \begin{cases} x = \dfrac{v_0}{2\gamma} e^{-\lambda t}(e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}), \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{v_0}{2\gamma} e^{-\lambda t}[(\gamma-\lambda)e^{\gamma t} + (\gamma+\lambda)e^{-\gamma t}]. \end{cases}$$

L'époque t_1 de l'élongation est indépendante de la vitesse initiale, car on a

$$e^{2\gamma t_1} = \frac{\lambda+\gamma}{\lambda-\gamma},$$

et l'élongation α_1 est proportionnelle à v_0.

Un cas particulier intéressant est celui où γ est assez petit pour que son carré soit négligeable.

Prenant les deux premiers termes du développement de $e^{\gamma t}$ et $e^{-\gamma t}$, les équations (24) deviennent

$$(25) \quad \begin{cases} x = e^{-\lambda t}[A + A' + (A - A')\gamma t] = e^{-\lambda t}[B + B'\gamma t], \\ \dfrac{dx}{dt} = -e^{-\lambda t}[B\lambda - B'\gamma(1-\lambda t)]. \end{cases}$$

On aura, de même,

$$(25)' \quad \begin{cases} x = e^{-\lambda t}[a + (a\lambda - v_0)t], \\ \dfrac{dx}{dt} = -e^{-\lambda t}[v_0 + \lambda(a\lambda - v_0)t]. \end{cases}$$

Pour $v_0 = o$, le système s'approche asymptotiquement de sa position d'équilibre. La vitesse est d'abord nulle, atteint son maximum au bout du temps déterminé par la condition $\lambda t = 1$ et décroît ensuite jusqu'à zéro.

Quand le système a reçu une vitesse initiale, il ne dépasse sa position d'équilibre que pour la condition $v_0 > a\lambda$.

Enfin, si $a = o$, il vient, en changeant le signe de v_0,

$$(25)' \quad \left\{ \begin{aligned} x &= v_0 t e^{-\lambda t}, \\ \frac{dx}{dt} &= v_0 e^{-\lambda t}(1 - \lambda t). \end{aligned} \right.$$

L'élongation a_1, à l'époque $\lambda t_1 = 1$, est égale à $\frac{v_0}{\lambda e}$.

COUPLES

544. **Moments d'inertie.** — Le couple qui tend à ramener vers sa position d'équilibre un appareil mobile autour d'un axe pourrait être déterminé par l'action d'un couple antagoniste, tel que celui que l'on obtiendrait par un poids attaché à l'extrémité d'un bras de levier de longueur connue ; cette méthode directe a été employée par Wertheim ([1]) pour étudier l'élasticité de torsion des barres métalliques, mais elle est rarement applicable. Dans la plupart des expériences, surtout quand il s'agit d'appareils légers, la valeur des couples de torsion se déduit de l'étude des oscillations.

Lorsque le couple Cx est proportionnel à l'angle d'écart x, ce qui est généralement le cas pour les oscillations de très faible amplitude, et que l'amortissement est négligeable, la période T des oscillations infiniment petites donne (**528**), en appelant N la *fréquence*, c'est-à-dire le nombre des périodes par seconde,

$$\frac{C}{K} = \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = 4\pi^2 N^2.$$

([1]) WERTHEIM. *Ann. de Ch. et de Phys.* (3), t. L, p. 195 et 385 ; 1857.

Si les oscillations sont amorties, en conservant le caractère d'isochronisme, on a (532)

$$\frac{C}{K} = \omega^2 + \lambda^2 = 4\pi^2 N^2 + \lambda^2.$$

La valeur du couple C relatif à l'unité d'angle sera ainsi déterminée par le moment d'inertie K du système et par l'étude des oscillations.

Le *moment d'inertie* d'un système rigide autour d'un axe est la somme des produits de chacune des masses m par le carré r^2 de sa distance à l'axe. On peut toujours poser

$$K = \Sigma m r^2 = k^2 \Sigma m = k^2 M.$$

La quantité k ainsi définie est le *rayon de giration ;* c'est la distance à laquelle devrait être portée la masse totale M du système pour que le moment d'inertie restât le même.

Ces moments d'inertie jouent un rôle si important dans les expériences qu'il est utile d'en rappeler ici les principales propriétés.

Considérons un système quelconque rapporté à des axes rectangulaires d'origine O. Soient x, y, z les coordonnées d'une masse élémentaire m et α, β, γ les cosinus directeurs d'une droite quelconque passant par l'origine. La distance r de l'élément m à la droite considérée est

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2,$$

et le moment d'inertie du système par rapport à cette droite

$$(1) \quad M k^2 = \alpha^2 \Sigma m(z^2 + y^2) + \beta^2 \Sigma m(x^2 + z^2) + \gamma^2 \Sigma m(y^2 + x^2) \\ - 2\alpha\beta \Sigma mxy - 2\beta\gamma \Sigma myz - 2\gamma\alpha \Sigma mzx.$$

Les quantités $\Sigma m\ (z^2 + y^2)$, ... sont des constantes et représentent les moments d'inertie du système par rapport aux axes de coordonnées; les quantités Σmxy, ... sont également des constantes et l'on peut écrire

$$M k^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\gamma\alpha - 2C'\alpha\beta.$$

Portant sur la droite une longueur égale à l'inverse du rayon de giration k et appelant ξ, η, ζ les coordonnées de l'extrémité de cette longueur, on a

$$\alpha = k\xi, \qquad \beta = k\eta, \qquad \gamma = k\zeta,$$

$$(2) \quad \mathrm{M} = \mathrm{A}\xi^2 + \mathrm{B}\eta^2 + \mathrm{C}\zeta^2 - 2\mathrm{A}'\eta\zeta - 2\mathrm{B}'\zeta\xi - 2\mathrm{C}'\xi\eta.$$

Comme le second membre de l'équation (1) est essentiellement positif, l'équation (2) représente un ellipsoïde ; un rayon vecteur quelconque est l'inverse du rayon de giration du système par rapport à la direction correspondante.

Si les axes de coordonnées sont parallèles aux axes de

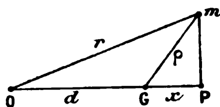


Fig. 138.

l'ellipsoïde (2), les coefficients A', B', C' sont nuls et les coefficients A, B, C positifs. Il en résulte, en posant

$$\mathrm{A} = \mathrm{M}k_1^2, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{M}k_2^2, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{M}k_3^2,$$

$$(3) \qquad k_1^2\xi^2 + k_2^2\eta^2 + k_3^2\zeta^2 = 1.$$

Les quantités k_1, k_2, k_3 sont les rayons principaux de giration relatifs aux droites passant par l'origine. Le rayon de giration k relatif à une droite de direction (α, β, γ) est alors

$$(4) \qquad k^2 = k_1^2\alpha^2 + k_2^2\beta^2 + k_3^2\gamma^2.$$

Menons par le centre de gravité G du système (fig. 138) un plan perpendiculaire à un axe de rotation pour lequel le rayon de giration est k. Soit r la distance d'une masse m à cet axe et ρ sa distance à un axe parallèle au premier passant par le centre de gravité. En appelant d la distance OG, et x la projection GP du rayon ρ sur la droite OG, on a

$$r^2 = \rho^2 + d^2 + 2dx,$$

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m\rho^2 + d^2\Sigma m + 2d\Sigma m x.$$

Le facteur Σmx est nul en raison des propriétés du centre de gravité ; en appelant k_0 le rayon de giration relatif à la droite considérée passant par le point G, il en résulte

$$k^2 = k_0^2 + d^2. \tag{5}$$

La valeur de k est la même pour toutes les génératrices d'un cylindre circulaire droit dont l'axe passe par le centre de gravité.

Dans le cas d'un pendule composé oscillant autour de la droite O supposée horizontale, la période T des oscillations infiniment petites a pour expression

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{k^2}{gd}.$$

La longueur l du pendule simple synchrone est

$$l = \frac{k^2}{d} = d + \frac{k_0^2}{d} = d + d'.$$

La quantité d' est la distance, sur la droite OG, du centre de gravité à un point O′ appelé *centre d'oscillation*. Comme on a $dd' = k_0^2$, il en résulte que si l'on fait osciller le système autour d'une droite parallèle à la première et passant par le point O′, la longueur du pendule simple synchrone ne serait pas changée; c'est le principe du *pendule reversible*.

545. Exemples. — Sans reproduire des calculs connus, il suffira d'indiquer la valeur des rayons de giration principaux de corps homogènes ayant certaines formes simples.

Pour un *parallélipipède rectangle*, dont les côtés sont $2a$, $2b$ et $2c$, le rayon de giration relatif à une droite parallèle au côté $2c$ est

$$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{3}.$$

Les rayons principaux de giration sont parallèles aux arêtes et respectivement proportionnels aux diagonales des faces perpendiculaires.

Lorsque l'une des dimensions transversales, b par exemple,

est très petite, comme dans le cas d'une lame allongée, on peut écrire

$$k = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{b^2}{2a^2}\right).$$

Pour un *cylindre circulaire droit*, à bases perpendiculaires à l'axe, de rayon a, le rayon de giration k_1 relatif à l'axe est égal à $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Si l'on désigne par $2l$ la longueur du cylindre, le rayon de giration k_2 par rapport à une droite perpendiculaire à l'axe est

$$k_2^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{l^2}{3}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{a^2}{l^2}\right).$$

Dans ce cas, l'ellipsoïde des rayons de giration est de révolution. Si l'on veut qu'il devienne sphérique, c'est-à-dire que tous les rayons de giration aient la même valeur, il suffira d'égaler les rayons principaux, ce qui donne la condition

$$\frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}, \qquad 2l = a\sqrt{3}.$$

Le moment d'inertie d'un *cylindre creux*, limité par des surfaces de même axe et de rayons a et a', est la différence des moments d'inertie des cylindres pleins ayant les mêmes rayons. Il en résulte

$$k_1^2 = \frac{a^2 + a'^2}{2} = \left(\frac{a + a'}{2}\right)^2\left[1 + \left(\frac{a - a'}{a + a'}\right)^2\right].$$

Si l'épaisseur $a - a' = e$ est assez petite pour que le carré du rapport $\frac{e}{a}$ soit négligeable devant l'unité, on peut écrire

$$k_1^2 = a^2\left(1 - \frac{e}{a}\right), \qquad k_1 = a\left(1 - \frac{e}{2a}\right).$$

Autour d'une perpendiculaire à l'axe, on aurait, de même,

$$k_2^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{a^2 + a'^2}{4},$$

et la condition d'égalité des deux rayons principaux de giration devient

$$4l^2 = 3(a^2 + a'^2).$$

Enfin, le rayon de giration d'une *sphère* est

$$k^2 = \frac{2}{5}a^2$$

et celui d'une sphère creuse, de rayons a et a',

$$k^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^5 - a'^5}{a^3 - a'^3}.$$

Lorsque l'épaisseur $a - a' = e$ est très petite par rapport au rayon, cette dernière expression se réduit à

$$k^2 = \frac{2}{3}a^2.$$

Le moment d'inertie ne peut être obtenu avec une grande précision par le calcul, que si la forme du corps est de construction simple et les dimensions faciles à mesurer.

Le diamètre d'une *sphère* bien régulière, par exemple, se déterminera plus exactement par la masse totale et la densité que par la mesure directe. Ce n'est pas la forme la plus avantageuse, car il est préférable de charger le moins possible les appareils oscillants et de choisir les corps qui ont pour un même poids le plus grand rayon de giration.

Coulomb se servait d'un *cylindre plein* tournant autour de son axe. Pour éviter la nécessité de régler le parallélisme, il suffit que les dimensions du cylindre satisfassent à la condition $2l = a\sqrt{3}$, auquel cas le rayon de giration est indépendant de la direction de l'axe.

Lord Kelvin recommande plutôt l'emploi d'un *cylindre creux*, reposant sur une lame mince, carrée ou circulaire, qui permette de le centrer exactement sur l'axe de rotation. Ces deux formes ont l'avantage de se prêter au travail du tour, la vérification est facile et les frottements dans l'air

très faibles. En outre, le défaut d'homogénéité de la matière a peu d'importance dans un cylindre creux, puisque toute la masse est à peu près à la même distance de l'axe.

On emploie souvent un *barreau* de grande longueur à section rectangulaire. La seule mesure importante est celle de la longueur, la dimension transversale n'intervenant que dans un terme de correction. La matière doit alors être bien homogène, car il ne suffit pas que le centre de gravité soit au milieu de la longueur pour être assuré que le rayon de giration n'est pas altéré par les variations de densité. A poids égal, le moment d'inertie d'une lame mince peut être notablement plus grand que celui d'un cylindre annulaire. Si l'on coupe en effet cet anneau suivant une génératrice pour en former une lame, le carré du rayon de giration, qui était $a^2\left(1-\frac{e}{a}\right)$, devient $\frac{\pi^2 a^2}{3}\left(1+\frac{l^2}{a^2}\right)$; pour de faibles valeurs des rapports $\frac{e}{a}$ et $\frac{l^2}{a^2}$, le moment d'inertie varie de 1 à $\frac{\pi^2}{3}=3,29$.

546. Déterminations expérimentales. — Lorsque le système est de forme complexe ou hétérogène, son moment d'inertie K s'obtient par comparaison avec un corps homogène de forme simple, en observant leurs oscillations autour d'un axe.

Il se présente deux cas distincts, suivant que le couple directeur, qui tend à ramener l'appareil à sa position d'équilibre, est indépendant ou non du poids du système. On peut d'ailleurs rendre l'amplitude des oscillations assez petite pour que ce couple Cx soit proportionnel à la déviation.

Dans le premier cas, on détermine la période T des oscillations ou, s'il existe un amortissement sensible, la valeur de

$$\frac{1}{p^2}=\omega^2+\lambda^2=\frac{4\pi^2}{T^2}\left(1+\frac{\lambda^2T^2}{4\pi^2}\right).$$

On ajoute ensuite au système un corps auxiliaire, de moment d'inertie connu K′, et on détermine de la même manière, par l'étude des nouvelles oscillations, la quantité

$$\frac{1}{p'^2}=\frac{4\pi^2}{T'^2}\left(1+\frac{\lambda'^2T'^2}{4\pi^2}\right).$$

et la condition d'égalité des deux rayons princip
tion devient

$$4l^2 = 3(a^2 + a'^2).$$

Enfin, le rayon de giration d'une *sphère* est

$$k^2 = \frac{2}{5} a^2$$

et celui d'une sphère creuse, de rayons a et a'

$$k^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^5 - a'^5}{a^3 - a'^3}.$$

Lorsque l'épaisseur $a - a' = e$ est très peti
rayon, cette dernière expression se réduit à

$$k^2 = \frac{2}{3} a^2.$$

Le moment d'inertie ne peut être obte
précision par le calcul, que si la forme d
truction simple et les dimensions faciles

Le diamètre d'une *sphère* bien régul
déterminera plus exactement par la ma
que par la mesure directe. Ce n'est pas
tageuse, car il est préférable de charg
appareils oscillants et de choisir les
même poids le plus grand rayon de

Coulomb se servait d'un *cylindre*
son axe. Pour éviter la nécessité de
suffit que les dimensions du cylind
tion $2l = a\sqrt{3}$, auquel cas le rayo
dant de la direction de l'axe.

Lord Kelvin recommande plu
creux, reposant sur une lame n
qui permette de le centrer exact
Ces deux formes ont l'avantage
tour, la vérification est facile

trois espèces d'oscillations, les quantités C, K et K_1 seront déterminées par les équations

$$C = \frac{K}{p^2} = \frac{K + K_1}{p_1^2} = \frac{K + K_1 + K'}{p'^2} = \frac{K'}{p'^2 - p_1^2} = \frac{K_1}{p_1^2 - p^2}.$$

Il est utile de répéter la troisième observation avec d'autres valeurs de la distance d et de calculer les inconnues en combinant les différentes équations.

Dans plusieurs circonstances, il y a lieu de craindre, quel que soit le mode de suspension du système mobile, que le couple directeur ne soit pas indépendant de la charge.

On dirige alors les expériences de manière à modifier le moment d'inertie du système d'une quantité connue, sans en altérer le poids total. Il suffit que l'équipage oscillant soit composé d'une partie fixe, de moment d'inertie K, et d'une partie mobile dont le moment d'inertie prenne dans deux positions successives des valeurs connues K′ et K″ ; tel est le cas des sphères de Gauss placées à des distances différentes. On a alors

$$C = \frac{K + K'}{p'^2} = \frac{K + K''}{p''^2} = \frac{K'' - K'}{p''^2 - p'^2},$$

$$K = \frac{K'' p'^2 - K' p''^2}{p''^2 - p'^2}.$$

Avec les deux sphères de Gauss, ou des masses m de forme quelconque placées successivement aux distances d' et d'' et d'une manière symétrique par rapport à l'axe de rotation, on aura simplement

$$K'' - K' = \frac{m + m'}{2}(d''^2 - d'^2).$$

Supposons enfin que le couple directeur soit dans un rapport connu avec le poids du système, que ce couple soit proportionnel au poids, par exemple, comme nous le verrons pour la suspension bifilaire. En appelant m la masse et K le moment d'inertie du système primitif, m' et K′ les mêmes

quantités relatives au corps additionnel, et h un coefficient constant, les relations

$$\frac{C}{m} = \frac{C'}{m + m'} = h$$

donnent alors, pour les deux expériences,

$$C = mh = \frac{K}{p^2}, \qquad C' = (m + m')h = \frac{K + K'}{p'^2}.$$

$$h = \frac{K}{mp^2} = \frac{K + K'}{(m + m')p'^2} = \frac{K'}{(m + m')p'^2 - mp^2}.$$

547. Balance unifilaire. — La balance unifilaire, ou *balance de torsion*, a été imaginée par Coulomb qui en a montré les précieuses ressources pour la mesure des petites forces [1]; elle se compose essentiellement d'un fil élastique, ordinairement de métal, fixé à sa partie supérieure et soutenant un système quelconque tel qu'une aiguille légère terminée par une boule électrisée, un barreau aimanté, une sphère métallique, un plateau, etc.

Le fil est attaché par sa partie supérieure à un tambour divisé; ce tambour, mobile en face d'un repère ou d'un vernier, permet de mesurer la rotation qu'on imprime à l'extrémité du fil. Lorsque le système est libre et n'a pas par lui-même de couple directeur, la position d'équilibre correspond au cas où le fil est sans torsion. S'il existe une action extérieure, comme celle du champ terrestre sur un aimant, on peut toujours, par une rotation convenable du tambour, amener le système dans la position qu'il prendrait sous la seule action directrice. Cette condition est évidemment réalisée si la position d'équilibre ne change pas quand on supprime l'action extérieure, quand, par exemple, on remplace le barreau aimanté par un barreau de cuivre de même poids. Tout déplacement angulaire α du corps, à partir de cette position, détermine une torsion de même angle dans le fil. En outre, si l'on a fait tourner le micromètre supérieur d'un

[1] COULOMB, *Mém. des savants étrangers*, t. X; 1777.

angle A compté en sens contraire, la torsion totale du fil est la somme algébrique $A + \alpha$ des deux angles.

548. **Lois de la torsion.** — Si le fil porte un système soustrait à toute action étrangère et qu'on abandonne l'appareil à lui-même après l'avoir écarté de sa position d'équilibre, il exécute une série d'oscillations plus ou moins amorties. Les expériences de Coulomb ont montré que, dans des limites assez étendues, ces oscillations sont très sensiblement isochrones. Il en résulte que le couple qui tend à ramener le fil tordu à sa position d'équilibre est proportionnel à l'angle d'écart x; on peut donc le représenter par Cx.

La constante C représente le couple qui serait nécessaire pour tordre le fil d'un angle égal à l'unité, si la loi de proportionnalité s'étend jusqu'à cette limite; c'est le *coefficient de torsion du fil*. L'expérience montre que sa valeur est sensiblement indépendante du poids du corps suspendu, autrement dit, de la tension du fil.

Lorsque le fil est cylindrique et de section circulaire, de longueur l et de diamètre d, on peut écrire, en désignant par μ une constante,

$$C = \mu \frac{d^4}{l}. \tag{6}$$

Le coefficient de torsion d'un fil est donc en raison inverse de sa longueur et proportionnel à la quatrième puissance du diamètre, ou au carré de la section; le facteur constant μ ne dépend que de la nature du fil et de sa température.

Pour $d = 1$ et $l = 1$, on aurait $C = \mu$. La valeur μ est donc l'expression numérique du couple capable de tordre d'un angle égal à l'unité un cylindre ayant un centimètre de diamètre et un centimètre de hauteur. Ce coefficient μ est le quotient d'une force par une surface, ses dimensions sont $L^{-1}MT^{-2}$; il ne diffère que par un facteur numérique de ce qu'on appelle ordinairement la *rigidité* ou le *second module d'élasticité*.

Considérons, en effet, un cylindre droit de section S, et supposons que, l'une des bases étant fixée d'une manière invariable, on soumette tous les éléments de l'autre à des forces tangentielles, égales et parallèles, dont la somme est F.

Chaque section parallèle aux bases se déplace d'une quantité proportionnelle à sa distance à la base fixe ; le cylindre s'incline donc d'un angle α indépendant de sa hauteur. La déformation étant très faible, l'angle α est proportionnel à la force par unité de section et l'on peut écrire

$$\alpha = \frac{1}{\varphi}\frac{F}{S}, \quad \frac{F}{S} = \alpha\varphi.$$

Le coefficient φ est le second module d'élasticité ; il représente physiquement la force qui serait nécessaire pour incliner, d'un angle égal à l'unité, un cylindre dont la section serait égale à l'unité.

Supposons maintenant qu'un cylindre circulaire, de longueur l et de diamètre d, soit tordu d'un angle x ; chacune des génératrices primitives devient une hélice. La base inférieure étant fixe, le déplacement d'un point de la base supérieure, situé à une distance r de l'axe, est égal à rx, et l'inclinaison de l'hélice correspondante sur l'axe est $\alpha = \frac{rx}{l}$; la réaction élastique par unité de surface est $\alpha\varphi$ et son moment par rapport à l'axe $\alpha\varphi r$.

Le moment des réactions relatives à la surface d'une couronne circulaire comprise entre les rayons r et $r + dr$ a pour valeur $2\pi\alpha\varphi r^2 dr$.

Enfin, le couple de torsion Cx est l'intégrale de cette expression étendue à toute la base du cylindre, ce qui donne

$$C = \frac{2\pi\varphi}{x}\int \alpha r^2 dr = \frac{2\pi\varphi}{l}\int r^3 dr = \frac{\pi}{32}\varphi\frac{d^4}{l},$$

$$\mu = \frac{\pi}{32}\varphi.$$

549. Coefficients d'élasticité. — Les fils élastiques ont de si nombreuses applications dans les appareils de torsion qu'il est utile d'examiner de plus près les propriétés des différentes substances auxquelles on peut avoir recours.

Lorsqu'une tige cylindrique est tendue par un poids compris entre certaines limites, elle éprouve un allongement tem-

poraire δ proportionnel à sa longueur primitive l, au poids tenseur P et en raison inverse de la section S :

$$\delta = \frac{lP}{ES}.$$

Le coefficient E, que l'on appelle *premier module d'élasticité*, ou module d'Young, représenterait la tension nécessaire, par unité de section, pour doubler la longueur du cylindre ; il a les mêmes dimensions que le second module φ.

En fait, on ne tarde pas à dépasser les limites d'élasticité et le cylindre, une fois déchargé, ne reprend plus ses dimensions primitives, il a éprouvé un allongement permanent qui modifie ses propriétés.

Quand on augmente la charge, il arrive enfin que le fil se rompt. La *ténacité* est la tension maximum T par unité de section correspondant à la rupture ; c'est encore une grandeur de mêmes dimensions.

La détermination du coefficient de torsion C d'un fil, ou du second module φ, par les méthodes qui précèdent, ne laisse pas que de présenter des difficultés sérieuses.

Les fils de métal doivent être recuits avec le plus grand soin, de manière à faire disparaître toute trace de torsion antérieure ; sans cette précaution, la position d'équilibre se déplacerait avec le temps et la réaction élastique ne serait pas la même de part et d'autre.

Les expériences de Coulomb tendent à montrer que le coefficient C est indépendant de la tension, mais cette loi n'est qu'approchée. En réalité l'élasticité d'un fil diminue quand la tension augmente, déduction faite de la variation qui résulte des changements de longueur et de diamètre [1].

Un fil tordu d'abord, puis laissé libre, conserve une torsion résiduelle qui disparaît ensuite lentement. D'après M. Wiedemann [2], cet effet se produirait même sous les angles les plus petits ; dans le mouvement oscillatoire d'un système suspendu par un fil métallique, la position d'équilibre serait à chaque instant déplacée par les oscillations.

[1] Sir W. Thomson (Lord Kelvin), *Encyc. Brit.*, article « *Elasticity* », § 81.
[2] G. Wiedemann, *Wied. Ann.*, t. VI, p. 485 ; 1879.

De même, les oscillations ne sont pas absolume chrones; la période croît avec l'angle d'écart, de so la rigidité est d'autant plus grande qu'on la déterm des oscillations de moindre amplitude. On peut attri la même cause une partie des écarts entre les valeı coefficients trouvés par la méthode des oscillations ou méthode statique; ces derniers, qui sont les plus peti toujours été déduits de torsions plus considérables.

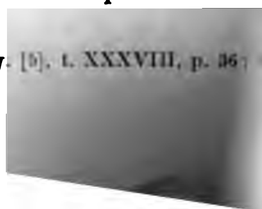
La rigidité diminue quand on maintient la torsion une expérience citée par lord Kelvin, une torsion perm de 10 tours faisait perdre, à un fil de cuivre de $3^m,50$ gueur et de $0^c,154$ de diamètre, la fraction 0,05 de sa pour 100 tours, la diminution dépassait 0,1 et elle d'une manière plus lente jusqu'à la rupture du fil. gement permanent produit le même effet.

Une autre remarque importante, due à lord K que la rigidité d'un fil diminue temporairement longue période d'oscillations; il se produit dans l sorte de *fatigue élastique*.

Les amplitudes successives varient sensiblem gression géométrique, au moins entre certaines l'amortissement croît d'une manière manifeste po écarts. La cause retardatrice est donc à peu tionnelle à la vitesse. Le frottement de l'air que pour une faible part; le phénomène est d de *viscosité* métallique, qui est l'analogue du fr les liquides. Un corps ne peut changer de forr lument élastique, sans qu'il y ait dépense d'énergie. La viscosité augmente avec la tensi du fil; toutes choses égales, les oscillations vite avec un fil maintenu pendant longtemps s'il était resté en repos pendant le même te

La viscosité du zinc est exceptionnelleme peut jamais, avec un fil de ce métal, compt nombre d'oscillations.

Les propriétés élastiques des métaux s plexes ([1]) et varient beaucoup avec le m



([1]) W. Peddie, *Phil. Mag.* [5], t. XXXVIII, p. 36

et le degré de pureté ; les résultats obtenus par divers observateurs présentent les plus grandes divergences.

Les nombres du tableau suivant, que l'on doit ainsi considérer à titre d'indications approximatives, sont rapportés au centimètre et au poids du gramme. Pour avoir leurs valeurs en unités C.G.S., c'est-à-dire en dynes par centimètre carré, il suffit de les multiplier par g, ou 981.

Nature du métal.	1er module d'Young. E	Rigidité 2e module. φ	Ténacité. T	$\frac{E}{\varphi}$	$\frac{\varphi}{T}$	$\frac{E}{T}$	$\sqrt{\frac{E}{T}}$
Aluminium	673.10^6	$265,2.10^6$	»	2,54	»	»	»
Argent	742 »	271,8 »	$2,96.10^6$	2,73	91,8	250	15,8
Or	813 »	281,0 »	2,70 »	2,89	104,1	301	17,3
Zinc	767 »	338,4 »	1,58 »	2,27	214,0	485	22,0
Laiton	988 »	350,5 »	3,43 »	2,82	102,0	288	17,0
Bronze (1)	1038 »	314,5 »	2,56 »	3,30	122,8	405	20,1
Pl.-Arg. (2)	1050 »	369,9 »	»	2,84	»	»	»
Cuivre	1200 »	440,6 »	4,22 »	2,72	104,4	284	16,8
Maillechort	1300 »	493,7 »	»	2,63	»	»	»
Platine	1490 »	692,7 »	3,50 »	2,15	189,0	426	20,7
Fer	2000 »	773,1 »	6,40 »	2,59	136	312	17,6
Acier	2040 »	644,6 »	7,50 »	3,16	86,0	272	16,5

Le rapport des modules E et φ s'écarte peu de la valeur 3 que M. Voigt attribue aux corps parfaitement isotropes.

Toutes choses égales d'ailleurs, un fil sera d'autant plus sensible que, pour un couple de torsion déterminé, il pourra porter la plus grande charge, c'est-à-dire que le rapport des coefficients φ et T sera plus petit. L'argent semble préférable à ce point de vue et il présente d'autres qualités qui l'ont fait souvent employer dans les appareils de torsion, mais sa viscosité paraît un peu trop grande.

550. Influence de la température. — Les propriétés élastiques varient beaucoup avec la température. D'après les expériences de M. Kolhrausch (3) sur quelques métaux, le coefficient de torsion à la température t s'obtient en multi-

(1) Alliage formé de 88 Cuivre + 12 Étain.
(2) Alliage formé de 2 Argent + 1 Platine.
(3) F. Kohlrausch, *Pogg. Ann.* [3], t. CXLI, p. 481 ; 1870.

pliant sa valeur à zéro, par un facteur de la forme $1 - \alpha t - \beta t^2$. On aurait, par exemple :

	α	β
Fer	$4,47.10^{-4}$	$5,2.10^{-7}$
Cuivre	$5,20$	$2,8$
Laiton	$4,28$	$13,4$

Comme le coefficient de torsion, pour un même fil à différentes températures, est proportionnel à son volume, si λ est le coefficient de dilatation linéaire, le coefficient C relatif à la température t sera donné, en fonction de sa valeur C_0 à zéro, par la formule

$$C = C_0(1 - \alpha t - \beta t^2)(1 + 3\lambda t) = C_0[1 - (\alpha - 3\lambda)t].$$

Pour le cuivre, on a $3\lambda = 0,51.10^{-4}$; la variation résultant du changement d'élasticité est donc 10 fois plus grande que celle qui est due à la dilatation.

551. Fils de verre et de quartz. — Fils de cocon. — On a quelquefois remplacé les fils métalliques par des fils de *verre*, que l'on étire aisément d'une grande finesse et d'un diamètre assez régulier; leur viscosité est plus grande que celle des métaux tels que le fer, l'argent ou l'aluminium.

M. Boys [1] a ainsi étudié les fils de différents minéraux fusibles; il les prépare en attachant une flèche au corps et lançant la flèche quand l'action du chalumeau a produit une goutte de matière en fusion.

Le *quartz* est la substance qui paraît donner les meilleurs résultats. On obtient ainsi des fils parfaitement cylindriques dont le diamètre peut être inférieur à $0^{mm},002$ ou même $0^{mm},0003$, c'est-à-dire moindre qu'une longueur d'onde lumineuse. C'est avec ces fils de quartz que M. Boys a répété avec une grande habileté la célèbre expérience de Cavendish sur la densité de la terre.

Le verre conserve encore des traces sensibles de déforma

[1] C.-V. Boys, *Phil. Mag.* [6], t. XXIII, p. 489; 1887; t. XXXVII, p. 463; 1894. — *Phil. Trans. L. R. S.* t. CLXXXVI, A., p. 1; 1895.

tion résiduelle, mais plus faible quand il a été réduit. Pour un fil tordu d'une circonférence et maintenu dans cet état pendant une minute, la position d'équilibre ultérieure a changé d'environ 0,0004 de la torsion primitive et cette altération est réduite au tiers au bout de trois minutes.

Avec un fil de quartz, le déplacement du zéro est huit fois moindre et se réduit encore d'un tiers en quatre minutes.

Pour le quartz fondu [1], le premier module d'Young rapporté au poids du gramme serait 528.10^6 et la rigidité 294.10^6. Les fils fins ont une tenacité voisine de 5.10^6, c'est-à-dire comparable à celle du fer.

Les fils de *soie*, tels qu'ils sortent du cocon, sont bien cylindriques, très réguliers et très résistants.

D'après les nombres cités par Coulomb [2], un fil simple peut porter 10 grammes sans se rompre. Un petit cylindre de cuivre de 1 pouce de longueur ($2^c,707$) pesant 6 grains ($0^{gr},3187$), suspendu à un fil de cocon de 1 pouce de long, avait une période de 180 secondes. On déduit de ces nombres que le coefficient de torsion d'un fil de soie simple de 1 centimètre de longueur est, en unités C. G. S., de 0,003254.

Un fil d'argent de même coefficient n'aurait qu'un diamètre de $0^{mm},00595$ et ne pourrait supporter un poids supérieur à $0^{gr},818$, tandis que le fil de cocon peut porter jusqu'à 10 grammes, c'est-à-dire 13 fois plus. Pour la même charge, il faudrait une section 13 fois plus grande; le coefficient de torsion serait alors 169 fois celui du fil de cocon.

L'influence de la température et de l'état hygrométrique sur les fils de soie seraient deux fois moindres environ que sur les cheveux [3].

Ces propriétés montrent l'avantage des fils de cocon dans toutes les suspensions, comme celle des aimants, où le système mobile a par lui-même une force directrice et où il y a intérêt à diminuer autant que possible celle de la suspension. En associant ces fils parallèlement entre eux et de manière que tous éprouvent sensiblement la même tension, on peut obtenir un faisceau aussi résistant qu'il est nécessaire et

(1) R. Threlfall, *Ph. Mag.* [5], t. XXX, p. 99; 1890.
(2) Coulomb, *Mém. de l'Acad. des sc.* pour 1777.
(3) Fresnel, *Ann. de chim. et de phys.* [2], t. XXVI, p. 367; 1824.

s tame des e

s a l'eau
surface.
es pour l
s servir d
convénient
leur l

a dim
es vaut
totale.
tace des
uniq
au carr
fois plu

lcare, pro
ple de t
employée
dans la p

est susp
en haut et
Lorsque l'a
son système
le ramen

fils de susp
face supér
centre de
passe par
A et
pas de
points d'a
AA et BB
symé

rapport à la verticale passant par le centre de gravité ;ystème.

rsqu'on fait tourner le levier AA′ d'un angle x autour de ›ite OO′, son milieu O s'élève en O_1 et les fils prennent sitions BA_1 et $B'A'_1$. Appelant h la distance $O'O_1 = BD$,

Fig. 139.

gueur AB des fils, $2a$ et $2b$ les distances AA′ et BB′ nts d'attache, on a

$$h^2 = l^2 - \overline{A_1 D}^2 = l^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos x,$$

$$= l^2 - (b-a)^2 - 4ab\sin^2\frac{x}{2},$$

$$h\,dh = -ab\sin x\,dx.$$

est le moment par rapport à l'axe du couple néces- ›ur maintenir cette déviation x, le travail $Q\,dx$ du relatif à une rotation infiniment petite est égal et ·e au travail correspondant de la pesanteur sur le du système, ce qui donne

$$Q\,dx = -P\,dh = P\,\frac{ab\sin x}{h}\,dx,$$

$$Q = P\,\frac{ab\sin x}{h}.$$

dont le cou… …très parallèles dans la
relatifs à … …i reste

Ajoutons …
pour enle…

$$\frac{\quad}{\frac{l^2}{2}\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Les fil-
truction
appareil-
trop éla- … distances a et b sont très
sans ri- … des fils, et l'on peut écrire

D'un
couple

$$C'\sin x.$$

mieux
pouv
d'att… coefficient de torsion du
port… …duirait une déviation de 90°.
nom… la charge, au produit des dis-
que… en raison inverse de la lon-

5
la … passer 90°, parce que le couple
T… Snow Harris évitait cette restric-
p… …filaire dont il réunissait les fils
p… plusieurs traverses, de longueurs
… points de suspension : l'appareil
… de bifilaires ajoutés bout à bout.
… …ques et une déviation totale x, le

$$nC'\sin\frac{x}{n}.$$

… compte de la rigidité des fils, laquelle
… …geable. Lorsque le système éprouve
… des fils est tordu sensiblement du
… ils étaient sans torsion dans la position
… au couple $C'\sin x$ les deux couples
… …ssent dans le même sens ; l'équation

$$C'\sin x\left[1+2\frac{C}{C'}\frac{x}{\sin x}\right].$$

Comme l'angle x est inférieur à 90°, si le rapport des facteurs C et C' est très petit, on peut considérer les termes compris dans la parenthèse comme constants. Le système obéit encore sensiblement à la loi du sinus et le coefficient de torsion C_1 devient

$$C_1 = C'\left(1 + 2\frac{C}{C'}\frac{x}{\sin x}\right) = C' + 2C.$$

Les conditions de symétrie ne peuvent jamais être remplies d'une manière absolue et il est nécessaire d'examiner les conséquences d'un défaut d'ajustement. Quel que soit le mode d'attache, la position d'équilibre correspond au cas où

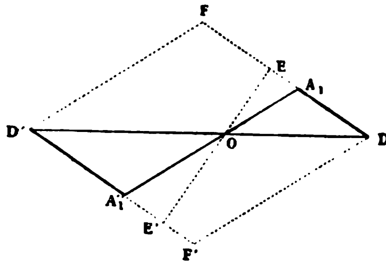


Fig. 140.

les fils sont dans un même plan vertical contenant le centre de gravité du système. Pour une déviation x produite par un couple extérieur, les composantes verticales des tensions des fils font équilibre au poids, les composantes horizontales constituent un couple qui, avec les couples de torsion, fait équilibre au couple extérieur ; ces composantes sont donc égales, parallèles et de sens contraires.

Il résulte de là que si on projette le système sur un plan horizontal (fig. 140), les projections des deux fils A_1D et A'_1D' sont toujours parallèles ; les projections DD' et $A_1A'_1$ des lignes qui joignent les points d'attache se coupent en O, sur la verticale qui passe par le centre de gravité du système, et sont partagées par ce point en parties inversement proportionnelles aux composantes verticales des tensions.

Soient p et p' ces composantes verticales, q la valeur commune des composantes horizontales, h et h' les projections

Lorsque les deux fils sont à peu près parallèles dans la position d'équilibre, on fera $a = b$ et il reste

$$(8) \qquad Q = P\frac{a^2}{l}\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2}\sin^2\frac{x}{2}}}.$$

Dans la plupart de ces cas, les distances a et b sont très petites par rapport à la longueur l des fils, et l'on peut écrire

$$(9) \qquad Q = \frac{Pab}{l}\sin x = C'\sin x.$$

Le facteur C' peut être appelé *coefficient de torsion* du bifilaire; c'est le couple qui produirait une déviation de 90°. Ce couple est proportionnel à la charge, au produit des distances des points d'attache et en raison inverse de la longueur des fils.

La torsion ne peut pas dépasser 90°, parce que le couple irait ensuite en diminuant. Snow Harris évitait cette restriction en employant un long bifilaire dont il réunissait les fils à différentes hauteurs par plusieurs traverses, de longueurs égales à la distance des points de suspension ; l'appareil constituait ainsi une série de bifilaires ajoutés bout à bout. Pour n bifilaires identiques et une déviation totale x, le couple de torsion serait

$$n\frac{Pab}{l}\sin\frac{x}{n} = nC'\sin\frac{x}{n}.$$

On peut encore tenir compte de la rigidité des fils, laquelle n'est pas toujours négligeable. Lorsque le système éprouve une déviation x, chacun des fils est tordu sensiblement du même angle. Si donc ils étaient sans torsion dans la position initiale, il suffit d'ajouter au couple $C'\sin x$ les deux couples de torsion Cx qui agissent dans le même sens ; l'équation d'équilibre devient alors

$$Q = C'\sin x + 2Cx = C'\sin x\left[1 + 2\frac{C}{C'}\frac{x}{\sin x}\right].$$

Comme l'angle x est inférieur à 90°, si le rapport des facteurs C et C′ est très petit, on peut considérer les termes compris dans la parenthèse comme constants. Le système obéit encore sensiblement à la loi du sinus et le coefficient de torsion C_1 devient

$$C_1 = C'\left(1 + 2\frac{C}{C'}\frac{x}{\sin x}\right) = C' + 2C.$$

Les conditions de symétrie ne peuvent jamais être remplies d'une manière absolue et il est nécessaire d'examiner les conséquences d'un défaut d'ajustement. Quel que soit le mode d'attache, la position d'équilibre correspond au cas où

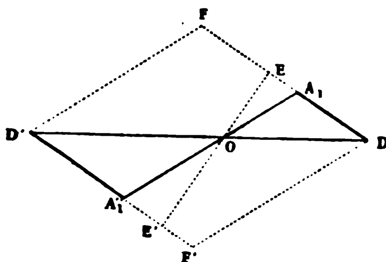


Fig. 140.

les fils sont dans un même plan vertical contenant le centre de gravité du système. Pour une déviation x produite par un couple extérieur, les composantes verticales des tensions des fils font équilibre au poids, les composantes horizontales constituent un couple qui, avec les couples de torsion, fait équilibre au couple extérieur ; ces composantes sont donc égales, parallèles et de sens contraires.

Il résulte de là que si on projette le système sur un plan horizontal (fig. 140), les projections des deux fils A_1D et A'_1D' sont toujours parallèles; les projections DD′ et $A_1A'_1$ des lignes qui joignent les points d'attache se coupent en O, sur la verticale qui passe par le centre de gravité du système, et sont partagées par ce point en parties inversement proportionnelles aux composantes verticales des tensions.

Soient p et p' ces composantes verticales, q la valeur commune des composantes horizontales, h et h' les projections

dont le couple de torsion est à peu près la somme des couples relatifs à chacun des fils.

Ajoutons que l'on doit d'abord laver ces fils à l'eau chaude pour enlever la matière agglutinante de la surface.

Les fils de *cocon d'araignée*, si employés pour la construction des micromètres, pourraient aussi servir dans les appareils de suspension, mais ils ont l'inconvénient d'être trop élastiques, car on peut aisément tripler leur longueur sans risquer de les rompre.

D'une manière générale, quand on cherche à diminuer le couple de torsion, un faisceau de fils parallèles vaut toujours mieux qu'un seul fil ayant la même section totale. Si l'on pouvait négliger l'effet provenant de la distance des points d'attache, le couple résultant serait, avec un fil unique, proportionnel au carré de la section, c'est-à-dire au carré n^2 du nombre des fils équivalents, et par suite n fois plus grand que le couple constitué par ces n fils.

552. Balance bifilaire. — On peut au contraire, profiter de la distance même des fils pour produire le couple de torsion. Tel est le principe de la *balance bifilaire*, employée d'abord par Snow Harris [1] mais en réalité introduite dans la pratique par les travaux de Gauss et de Weber [2].

Dans la balance bifilaire, le système mobile est suspendu à deux fils voisins dont les points d'attache en haut et en bas sont habituellement à la même hauteur. Lorsque l'appareil est dévié de sa position d'équilibre, le poids du système donne naissance à un couple horizontal qui tend à le ramener à sa direction primitive.

Nous supposerons d'abord que les deux fils de suspension sont égaux entre eux, les deux points d'attache supérieurs B et B′ (fig. 139) à la même hauteur, et que le centre de gravité du corps suspendu est sur la verticale qui passe par le milieu O de la distance des deux points d'attache A et A′ des extrémités inférieures des fils. Si les fils n'ont pas de torsion propre, l'équilibre existe quand les quatre points d'attache sont dans le même plan vertical, les lignes AA′ et BB′ étant parallèles, et que, par suite, les deux fils sont symétriques

(1) Snow Harris, *Phil. Trans.*, 1836, p. 417.
(2) Gauss et Weber, *Resultate aus den Beob. des Magn. Vereins*, 1837.

Comme l'angle x est inférieur à 90°, si le rapport des facteurs C et C′ est très petit, on peut considérer les termes compris dans la parenthèse comme constants. Le système obéit encore sensiblement à la loi du sinus et le coefficient de torsion C_1 devient

$$C_1 = C'\left(1 + 2\frac{C}{C'}\frac{x}{\sin x}\right) = C' + 2C.$$

Les conditions de symétrie ne peuvent jamais être remplies d'une manière absolue et il est nécessaire d'examiner les conséquences d'un défaut d'ajustement. Quel que soit le mode d'attache, la position d'équilibre correspond au cas où

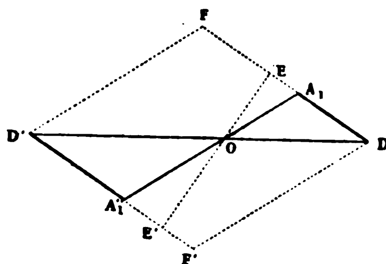


Fig. 140.

les fils sont dans un même plan vertical contenant le centre de gravité du système. Pour une déviation x produite par un couple extérieur, les composantes verticales des tensions des fils font équilibre au poids, les composantes horizontales constituent un couple qui, avec les couples de torsion, fait équilibre au couple extérieur ; ces composantes sont donc égales, parallèles et de sens contraires.

Il résulte de là que si on projette le système sur un plan horizontal (fig. 140), les projections des deux fils A_1D et A'_1D' sont toujours parallèles; les projections DD' et $A_1A'_1$ des lignes qui joignent les points d'attache se coupent en O, sur la verticale qui passe par le centre de gravité du système, et sont partagées par ce point en parties inversement proportionnelles aux composantes verticales des tensions.

Soient p et p' ces composantes verticales, q la valeur commune des composantes horizontales, h et h' les projections

Lorsque les deux fils sont à peu près parallèles dans la position d'équilibre, on fera $a=b$ et il reste

$$(8)\qquad Q = P\frac{a^2}{l}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\frac{4a^2}{l^2}\sin^2\frac{x}{2}}}.$$

Dans la plupart de ces cas, les distances a et b sont très petites par rapport à la longueur l des fils, et l'on peut écrire

$$(9)\qquad Q = \frac{Pab}{l}\sin x = C'\sin x.$$

Le facteur C′ peut être appelé *coefficient de torsion* du bifilaire; c'est le couple qui produirait une déviation de 90°. Ce couple est proportionnel à la charge, au produit des distances des points d'attache et en raison inverse de la longueur des fils.

La torsion ne peut pas dépasser 90°, parce que le couple irait ensuite en diminuant. Snow Harris évitait cette restriction en employant un long bifilaire dont il réunissait les fils à différentes hauteurs par plusieurs traverses, de longueurs égales à la distance des points de suspension; l'appareil constituait ainsi une série de bifilaires ajoutés bout à bout. Pour n bifilaires identiques et une déviation totale x, le couple de torsion serait

$$n\frac{Pab}{l}\sin\frac{x}{n} = nC'\sin\frac{x}{n}.$$

On peut encore tenir compte de la rigidité des fils, laquelle n'est pas toujours négligeable. Lorsque le système éprouve une déviation x, chacun des fils est tordu sensiblement du même angle. Si donc ils étaient sans torsion dans la position initiale, il suffit d'ajouter au couple $C'\sin x$ les deux couples de torsion Cx qui agissent dans le même sens; l'équation d'équilibre devient alors

$$Q = C'\sin x + 2Cx = C'\sin x\left[1+2\frac{C}{C'}\frac{x}{\sin x}\right].$$

Comme l'angle x est inférieur à 90°, si le rapport des facteurs C et C' est très petit, on peut considérer les termes compris dans la parenthèse comme constants. Le système obéit encore sensiblement à la loi du sinus et le coefficient de torsion C_1 devient

$$C_1 = C'\left(1 + 2\frac{C}{C'}\frac{x}{\sin x}\right) = C' + 2C.$$

Les conditions de symétrie ne peuvent jamais être remplies d'une manière absolue et il est nécessaire d'examiner les conséquences d'un défaut d'ajustement. Quel que soit le mode d'attache, la position d'équilibre correspond au cas où

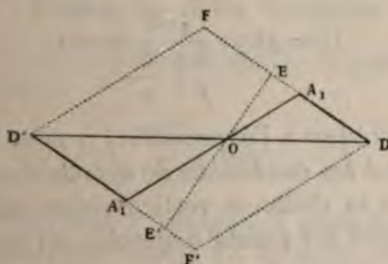


Fig. 140.

les fils sont dans un même plan vertical contenant le centre de gravité du système. Pour une déviation x produite par un couple extérieur, les composantes verticales des tensions des fils font équilibre au poids, les composantes horizontales constituent un couple qui, avec les couples de torsion, fait équilibre au couple extérieur ; ces composantes sont donc égales, parallèles et de sens contraires.

Il résulte de là que si on projette le système sur un plan horizontal (fig. 140), les projections des deux fils A_1D et $A_1'D'$ sont toujours parallèles; les projections DD' et A_1A_1' des lignes qui joignent les points d'attache se coupent en O, sur la verticale qui passe par le centre de gravité du système, et sont partagées par ce point en parties inversement proportionnelles aux composantes verticales des tensions.

Soient p et p' ces composantes verticales, q la valeur commune des composantes horizontales, h et h' les projections

verticales des deux fils, λ et λ' leurs projections enfin $2a$ et $2b$ les projections des distances de tache; on a les relations

$$P = p + p', \qquad q = p\frac{\lambda}{h} = p'\frac{\lambda'}{h'}.$$

D'autre part, en appelant k la perpendiculaire aux projections des deux fils, on a aussi

$$4ab \sin x = (\lambda + \lambda')k = qk\left(\frac{h}{p} + \frac{h'}{p'}\right)$$

car les deux premières expressions représentent parallélogramme DFD'F'.

Le moment Q du couple des forces q a pour

(10) $$Q = qk = \frac{4ab}{\frac{h}{p} + \frac{h'}{p'}} \sin x;$$

cette formule se réduit à l'expression (7) pour h c'est-à-dire quand les conditions de symétrie so

En appelant z la distance verticale des mil lignes qui joignent les points d'attache, on p

$$h = z(1 - \varepsilon), \qquad h' = z(1 + \varepsilon).$$

Posons de même, en remarquant que la pl de p correspond à la plus petite valeur de h

$$p = \frac{P}{2}(1 + \delta), \qquad p' = \frac{P}{2}(1 -$$

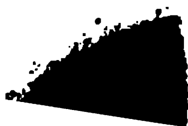
il en résulte

$$\frac{h}{p} + \frac{h'}{p'} = \frac{2z}{P}\left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \delta} + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \delta}\right) =$$

(11) $$Q = P\frac{ab}{z}\frac{1 - \delta^2}{1 + \varepsilon\delta}\sin x$$

Comme δ est un nombre positif, le m pond à $\delta = 0$. Les conditions de symétri lesquelles l'appareil a le minimum de celles qui donnent les oscillations les p cette propriété pour achever le réglag

En général, les points d'attache su hauteur et, d'autre part, le levier A



perpendiculaire à la droite qui joint son milieu au centre de gravité du système mobile ; il ne reste plus alors qu'à donner aux fils la même longueur. La difficulté n'existe pas si on ne conserve que deux points d'attache, en haut ou en bas, avec un fil unique qui passe de l'autre côté sur une poulie.

Si le fil est fixé à ses points d'attache de manière que le premier élément, à chaque bout, soit maintenu vertical, il ne reste plus rigoureusement rectiligne (1). Sous l'action d'un couple horizontal, le système subit alors un déplacement moindre que si le fil était parfaitement flexible. Pour une suspension symétrique, l'extrémité inférieure d'un fil flexible se déplacerait, l'autre extrémité étant supposée fixe, d'une quantité $u = \frac{q}{p} l$. Quand les deux éléments extrêmes sont maintenus verticaux, on trouve que le déplacement a sensiblement pour valeur

$$u_1 = \frac{q}{p}\left(l - 2\sqrt{\frac{EK}{p}}\right) = u\left[1 - \frac{2}{l}\sqrt{\frac{EK}{p}}\right],$$

expression dans laquelle E désigne le premier module d'élasticité et K le moment d'inertie de la section du fil par rapport à un axe passant par son centre de gravité et perpendiculaire au plan de flexion.

Dans le cas d'un fil à section circulaire de rayon r, on a $4K = \pi r^4$ et, par suite,

$$2\sqrt{\frac{EK}{p}} = r^2\sqrt{\frac{E\pi}{p}};$$

la correction revient donc à diminuer la longueur du fil d'une quantité indépendante de cette longueur.

Si on désigne par $T' = \alpha T$ la ténacité pratique du métal, c'est-à-dire le poids qu'on peut faire supporter sans inconvénient à un fil d'un centimètre carré de section, on peut poser

$$p = \pi r^2 T' = \pi r^2 \alpha T.$$

Le terme de correction devient alors $r\sqrt{\frac{E}{\alpha T}}$. Dans le cas où la charge est moitié de celle qui produirait la rupture, $\alpha = 0,5$

(1) F. KOHLRAUSCH, *Wied., Ann.* t. XVII, p. 741 ; 1882.

et le Tableau du n° **549** montre que la valeur du radical est au plus égale à 30; la correction de longueur est voisine de 15 fois le diamètre du fil.

D'ailleurs le couple de torsion du bifilaire sera déterminé le plus souvent par les oscillations, et la valeur expérimentale renfermera en bloc toutes les corrections. Les formules qui précèdent ne seraient utiles que si l'on voulait calculer le coefficient du bifilaire au moyen de ses dimensions.

La suspension bifilaire a sur l'unifilaire l'avantage d'être beaucoup moins sensible aux variations de la température, car le seul effet est la dilatation qui modifie les distances des points d'attache et la longueur des fils. Le coefficient de torsion étant proportionnel au produit des deux premières longueurs et en raison inverse de la dernière, il serait possible, par un choix convenable de la nature des corps, d'établir une compensation complète; mais cette précaution est superflue. Si les fils et les traverses sont en un même métal, la variation est proportionnelle au coefficient de dilatation: elle n'est pas le trentième de celle qui résulterait, pour l'unifilaire, du changement d'élasticité correspondant à la même variation de température.

553. Comparaison de l'unifilaire et du bifilaire. — Supposons qu'on veuille suspendre un système de poids P, en lui donnant une force directrice déterminée.

Si l'on fait usage d'un bifilaire à fils parallèles de diamètre d et distants de $2a$, on aura

$$C' = \frac{Pa^2}{l} + 2\mu\frac{d^4}{l}.$$

Le diamètre du fil étant déterminé, comme plus haut, par la condition que la tension soit αT, il en résulte

$$C' = \frac{d^4}{l}\left(\frac{\pi a^2}{2d^2}\alpha T + 2\mu\right).$$

Pour la même charge, l'unifilaire doit avoir une section double, c'est-à-dire un diamètre égal à $d\sqrt{2}$, et le coefficient de torsion est $C = 4\mu\frac{d^4}{l}$; par suite

$$\frac{C'}{C} = \frac{\pi a^2}{8d^2}\frac{\alpha T}{\mu} + \frac{1}{2}.$$

Ce rapport serait égal à l'unité pour la condition

$$\frac{a^2}{d^2} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mu}{\alpha T} = \frac{\varphi}{8\alpha T}, \qquad \frac{2a}{d} = \sqrt{\frac{\varphi}{2\alpha T}}.$$

Si l'on fait encore $2\alpha = 1$, le Tableau montre que, pour la plupart des métaux usuels, la valeur du radical est voisine de 10; il en résulte que, dans les conditions comparables, l'unifilaire et le bifilaire ont la même sensibilité quand la distance des fils du dernier est 10 fois leur diamètre. On arriverait à un résultat très différent avec des fils non métalliques, par exemple des fils de cocon.

Malgré les avantages du bifilaire, au point de vue des variations de température, ce mode de suspension semble avoir été toujours considéré comme se prêtant moins bien aux mesures absolues que la balance unifilaire, sans doute à cause de sa construction plus compliquée.

Cependant c'est le seul appareil dont le couple de torsion puisse être déterminé directement par ses dimensions. Il est vrai qu'on doit alors connaître avec une grande précision les distances des points d'attache. Comme l'épaisseur du fil lui-même introduit dans la mesure de ces distances une cause d'incertitude, il faut qu'elles soient un peu grandes, ce qui diminue beaucoup la sensibilité. M. F. Kolhrausch a construit ainsi une suspension bifilaire de dimensions exceptionnelles, avec des fils de 2 mètres et demi de longueur, et dans laquelle la distance des points d'attache, qui atteignait plusieurs centimètres, pouvait être mesurée directement à l'aide d'une division micrométrique.

CHAPITRE DEUXIÈME

PROPRIÉTÉS DES COURANTS CIRCULAIRES

554. Bobines cylindriques. — Nous considérerons principalement les bobines circulaires cylindriques, formées par un fil métallique couvert d'une matière isolante et enroulé dans une *gorge* de section rectangulaire. Ces bobines sont les plus faciles à construire, celles qui se prêtent le mieux aux mesures et au calcul et, par suite, celles dont il convient de faire usage dans les appareils de mesures absolues.

Une bobine cylindrique simple (**355**), formée par une couche de spires équidistantes, avec un fil de retour, équivaut à un système de courants circulaires équidistants normaux à l'axe. Le champ d'une pareille bobine traversée par un courant est égal, en chaque point, à l'induction magnétique d'un cylindre de mêmes dimensions aimanté uniformément. Si la bobine comprend plusieurs couches successives, dont les rayons varient en progression arithmétique, le champ produit, au moins en dehors des couches mêmes, s'évaluera également par l'induction d'un cylindre aimanté équivalent. Cette assimilation suppose l'enroulement bien régulier.

L'enroulement d'un fil est *homogène* quand les spires de chaque couche sont équidistantes ainsi que les couches successives, et l'enroulement est *uniforme* quand la distance des couches successives est égale à celle des spires.

On admettra, pour le calcul, que le courant est concentré dans chaque fil sur l'axe même du conducteur. Les résultats obtenus dans cette hypothèse sont exacts quand il s'agit de courants rectilignes (**317**) ; ils sont toujours très approchés tant que le diamètre des fils est très petit par rapport au

rayon de courbure du circuit, et qu'on ne considère pas l'action en un point trop voisin du fil.

Les propriétés d'une bobine doivent se déduire des différentes données qui en définissent les dimensions et le mode de construction. Supposant l'enroulement homogène et la gorge de section rectangulaire, nous appellerons :

y le rayon du fil nu, z l'épaisseur de l'isolant ;

L la longueur du fil comptée suivant son axe ;

d et ρ la masse spécifique et la résistivité du métal, σ la section droite du fil ;

a' et a'' les rayons intérieur et extérieur de la bobine ;

$2c$ l'épaisseur de la gorge suivant le rayon : $2c = a'' - a'$;

$2b$ la longueur de la gorge suivant l'axe ;

ω la section méridienne de la gorge : $\omega = 2b(a'' - a') = 4bc$;

a la distance de l'axe au milieu de la section : $2a = a' + a''$;

U le volume de la gorge : $U = 2\pi(a''^2 - a'^2)b = 2\pi a\omega$;

V le volume du métal et V' le volume des fils couverts ;

$P = Vd$ la masse du métal ;

n_1 et n_2 le nombre des spires par unité de longueur suivant l'axe de la bobine et suivant le rayon, ou h_1 et h_2 leurs distances correspondantes : $n_1 h_1 = n_2 h_2 = 1$;

N le nombre total des spires : $N = n_1 n_2 \omega = 4 n_1 n_2 bc$.

Ces données permettront de déterminer les autres éléments, ainsi que les propriétés électriques de la bobine.

Laissant de côté, pour le moment, les effets d'induction, nous aurons à calculer :

1° La résistance totale R du fil ;

2° La surface totale S, c'est-à-dire la somme des surfaces limitées par les différentes spires, ou le moment magnétique de la bobine pour l'unité de courant ;

3° Le champ électromagnétique G de la bobine en chaque point, pour l'unité de courant.

555. Longueur du fil. — Rayon moyen. — Si le pas h_1 des spires est très petit par rapport au diamètre de la bobine, la longueur d'une spire, dont la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe est une circonférence de rayon r, peut s'écrire

$$\sqrt{4\pi^2 r^2 + h_1^2} = 2\pi r \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2 n_1^2 r^2}} = 2\pi r\left(1 + \frac{1}{8\pi^2 n_1^2 r^2}\right).$$

Dans la plupart des cas, le terme de correction est négligeable et on peut confondre la spire avec sa circonférence de projection.

La *circonférence moyenne* des spires d'une bobine est la moyenne des circonférences de toutes les spires ; le *rayon moyen* est donc la moyenne de tous les rayons, c'est-à-dire la distance a du milieu de la gorge à l'axe de la bobine, et la longueur totale du fil est

$$(1) \qquad L = 2\pi a N = 2\pi a n_1 n_2 \omega = n_1 n_2 U = 8\pi n_1 n_2 abc.$$

Si l'on tient compte de l'obliquité des spires, cette expression doit être multipliée par $1 + \frac{1}{8\pi^2 n_1^2 a^2}$.

556. Volume et masse du fil. — Lorsque l'enroulement est uniforme, $n_1 = n_2$, on peut considérer chaque fil comme occupant, dans la section méridienne de la gorge, le milieu d'un carré dont le côté est h_1.

Le fil nu occupe une fraction $n_1^2 \pi y^2$ de la surface du carré et la section totale du fil couvert une fraction $n_1^2 \pi (y+z)^2$ de la surface de la gorge. Chacune de ces fractions est maximum quand les fils se touchent : le côté du carré est alors égal au diamètre du fil et la dernière fraction a pour valeur $\frac{\pi}{4}$.

Le rapport du volume total du fil à celui de la gorge étant égal à celui des sections, on a, pour des fils en contact,

$$(2) \qquad \frac{V'}{U} = \frac{V}{U}\left(\frac{y+z}{y}\right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

$$(3) \qquad P = Vd = \frac{\pi}{4} U d \left(\frac{y}{y+z}\right)^2.$$

Lorsque l'épaisseur z de l'isolant est dans un rapport constant δ avec le rayon y du fil, le poids du métal est simplement proportionnel au volume de la gorge.

Lorsque les fils sont en contact et l'enroulement uniforme on a $h_1 = 2(y+z)$ et, par suite,

$$(4) \qquad U = h_1^2 L = \frac{L}{n_1^2} = 4(y+z)^2 L.$$

La longueur totale L est égale au quotient du volume de la gorge par le diamètre du fil couvert.

557. Résistance. — D'une manière générale, la résistance de la bobine a pour expression

$$R = \rho \frac{L}{\pi y^2} = \rho \frac{L}{\sigma}.$$

Pour des fils en contact, avec enroulement uniforme,

$$(5) \qquad R = \rho \frac{L}{\pi y^2} = \rho \frac{n_1^2 U}{\pi y^2} = \rho \frac{U}{4\pi(y+z)^2 y^2} = \rho \frac{V}{\sigma^2}.$$

Si le rapport z est constant, la résistance est proportionnelle au volume du fil, ou de la gorge, et en raison inverse du carré de la section. La première conclusion est évidente. On peut arriver directement à la seconde en remarquant que, si l'on réduit de moitié le diamètre du fil, la section devient quatre fois moindre et, pour remplir le même volume de gorge, la longueur doit être quadruplée; la résistance est donc multipliée par 16.

558. Surface. — Moment magnétique. — La surface électromagnétique d'une bobine est la somme des projections, sur un plan perpendiculaire à l'axe, des surfaces entourées par toutes les spires; c'est le moment magnétique de la bobine pour l'unité de courant.

La surface d'une spire de rayon r est πr^2. S'il existe p couches, r_0 étant le rayon de la première, et qu'on représente par $r = r_0 + \alpha$ celui d'une couche quelconque, on a

$$\Sigma r^2 = p r_0^2 + 2 r_0 \Sigma \alpha + \Sigma \alpha^2.$$

Le rayon a_1 du *cercle moyen*, dont la surface est la moyenne de celles de toutes les spires, est défini par l'équation

$$(6) \qquad a_1^2 = r_0^2 + 2 r_0 \frac{\Sigma \alpha}{p} + \frac{\Sigma \alpha^2}{p}.$$

D'autre part, le rayon moyen a donne

$$a = r_0 + \frac{\Sigma \alpha}{p}, \qquad a^2 = r_0^2 + 2 r_0 \frac{\Sigma \alpha}{p} + \left(\frac{\Sigma \alpha}{p}\right)^2.$$

La surface totale S de la bobine est égale à $N\pi a_1^2$ et on peut écrire

$$a_1^2 = a^2 + \frac{\Sigma\alpha^2}{p} - \left(\frac{\Sigma\alpha}{p}\right)^2.$$

Si l'enroulement est homogène, les rayons successifs varient comme les termes d'une progression arithmétique dont la raison est h_2 et l'on devra donner à la quantité α la suite des valeurs o, h_2, $2h_2$, ... $(p-1)h_2$. On a alors

$$\Sigma\alpha = h_2\frac{(p-1)p}{2}, \quad \Sigma\alpha^2 = h_2^2\frac{(p-1)p(2p-1)}{2.3};$$

$$\left(\frac{\Sigma\alpha}{p}\right)^2 = \frac{p^2h_2^2}{4}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2, \quad \frac{\Sigma\alpha^2}{p} = \frac{p^2h_2^2}{3}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{2p}\right).$$

Il en résulte, en tenant compte de la relation $2c = ph_2 = \frac{p}{n_2}$,

$$\frac{\Sigma\alpha^2}{p} - \left(\frac{\Sigma\alpha}{p}\right)^2 = \frac{c^2}{3}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{c^2}{3}\left(1-\frac{1}{4n_2^2c^2}\right),$$

$$(7) \qquad a_1^2 = a^2 + \frac{c^2}{3}\left[1-\frac{1}{4n_2^2c^2}\right].$$

Si les spires sont assez serrées pour que le dernier terme de correction soit négligeable, le rayon a_1 ne dépend que des dimensions de la gorge.

Dans ce cas, pour une gorge donnée, la surface de la bobine est proportionnelle au nombre des spires et, par suite, en raison inverse de la section du fil.

Pour un fil donné et des volumes semblables de la gorge, la surface est, d'une part, proportionnelle au nombre des spires, c'est-à-dire à la section de la gorge et, d'autre part, à la surface du cercle moyen ; elle varie donc comme la quatrième puissance du rapport des dimensions homologues.

559. Champ électromagnétique. — Imaginons d'abord que la gorge soit remplie par une masse métallique homogène et le courant réparti uniformément dans la section méridienne; la *densité du courant* sera l'intensité par unité de surface.

Supposons maintenant que, par une série de lignes, les unes suivant des rayons, les autres perpendiculaires, on partage la section méridienne en carrés égaux de côté h_1; le nombre de ces carrés par unité de surface sera n_1^2. On divisera ensuite la masse métallique en une série d'anneaux de même axe isolés les uns des autres et correspondant aux carrés de la section méridienne ; cette opération ne change rien à la distribution du courant, ni à son action extérieure.

Si chacun des anneaux est parcouru par l'unité de courant, la densité du courant est n_1^2 et le champ G en chaque point est proportionnel à n_1^2, c'est-à-dire qu'il varie en raison inverse de la surface des carrés élémentaires.

En remplaçant chaque anneau par un fil qui occupe la partie centrale du carré correspondant, on constituera une bobine à enroulement uniforme. Si chaque fil est parcouru par la quantité d'électricité qui traversait précédemment le carré, la densité du courant n'est plus uniforme, mais sa valeur moyenne reste la même, quel que soit d'ailleurs le diamètre du fil.

D'un autre côté, si le courant est réparti uniformément dans la section du fil, son action extérieure est sensiblement la même, que l'on suppose le fil réduit à son axe ou qu'il ait pour diamètre le côté du carré.

De même, la différence des actions exercées par la bobine, quand on y remplace le fil cylindrique par un conducteur à section carrée, est négligeable pour tout point situé à une grande distance relativement au diamètre du fil.

Il en résulte que, pour une gorge donnée et, par suite, pour un poids donné de métal, si le rapport δ est constant, l'intensité du champ en chaque point varie en raison inverse du carré du diamètre du fil, ou encore (558) proportionnellement à la racine carrée de la résistance.

Cette conséquence conduit à une remarque curieuse. Si R est la résistance de la bobine et I l'intensité du courant, l'énergie calorifique W dégagée dans chaque unité de temps est égale à RI^2. Comme la résistance R est proportionnelle à n_1^4, ou au carré G^2, l'énergie calorifique W est proportionnelle au produit G^2I^2, c'est-à-dire au carré du champ de la bobine pour le courant I. Il en résulte que si, faisant varier

le diamètre du fil, on modifie l'intensité de manière que le champ reste le même, le travail calorifique de la bobine restera aussi constant ([1]).

560. Action sur l'axe. — Le potentiel d'un courant est le même que celui d'un feuillet magnétique uniforme de même contour dont la puissance est égale à l'intensité du courant. Le champ magnétique d'un courant circulaire, de rayon r et d'intensité égale à l'unité, en un point P de l'axe situé à une distance x du centre, est (**353**), en posant $u^2 = x^2 + r^2$,

$$\frac{2S}{u^3} = \frac{2\pi r^2}{u^3}.$$

L'action du courant par unité de longueur, ou son *action spécifique*, est donc

$$f = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi r^2}{u^3} = \frac{r}{u^3}. \tag{8}$$

Pour une bobine de longueur $2b$ et de rayon r, recouverte par une couche de n_1 spires par unité de longueur et traversée par l'unité du courant, l'expression du champ magnétique est (**355**), en appelant α et β les angles sous lesquels on voit du point P les rayons extrêmes de la bobine,

$$G = 2\pi n_1(\cos\beta - \cos\alpha) = 2\pi n_1\left[\frac{x+b}{\sqrt{r^2+(x+b)^2}} - \frac{x-b}{\sqrt{r^2+(x-b)^2}}\right]. \tag{9}$$

On peut, dans cette formule, donner à x des valeurs absolues, plus grandes ou plus petites que b, suivant que le point P est à l'extérieur ou à l'intérieur de la bobine.

Dans le cas d'un enroulement homogène, la couche d'épaisseur dr contient un nombre $n_1 n_2 dr$ de spires par unité de longueur; l'action de la bobine est alors

$$G = 2\pi n_1 n_2 \int_{a'}^{a''} \left(\frac{x+b}{\sqrt{r^2+(x+b)^2}} - \frac{x-b}{\sqrt{r^2+(x-b)^2}}\right) dr,$$

$$\frac{G}{2\pi n_1 n_2} = (x+b)\,\mathfrak{L}.\frac{a''+\sqrt{a''^2+(x+b)^2}}{a'+\sqrt{a'^2+(x+b)^2}} - (x-b)\,\mathfrak{L}.\frac{a''+\sqrt{a''^2+(x-b)^2}}{a'+\sqrt{a'^2+(x-b)^2}}. \tag{10}$$

([1]) MARCEL DEPREZ, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. XCIV, p. 431; 1882.

On a ainsi, au centre de la bobine, où $x = 0$,

$$(11)\quad G_0 = 4\pi n_1 n_2 b \mathfrak{L}.\frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b^2}} = \pi \frac{N}{c} \mathfrak{L}.\frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b^2}} = 2\pi \frac{N}{a_2}.$$

La quantité a_2, définie par la condition

$$(12)\qquad \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2c} \mathfrak{L}.\frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b^2}},$$

représente le *rayon de la spire d'action moyenne* relativement au centre.

Les rayons extrêmes a'' et a' étant égaux à $a \pm c$, si on peut négliger les quatrièmes puissances des rapports $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, il reste simplement

$$(12)'\qquad a_2 = a\left[1 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{3}\right)\right].$$

561. Influence de la gorge (¹). — La longueur du fil étant donnée, ainsi que le rayon a' du noyau, on peut chercher les dimensions de la gorge qui donne le champ maximum au centre de la bobine, pour un enroulement uniforme, c'est-à-dire choisir les quantités a'' et b qui rendent G_0 maximum.

Au lieu de résoudre ce problème par les méthodes ordinaires des maxima, on y arrivera plus simplement par les considérations suivantes.

Il est évident que, si le maximum est obtenu, l'action spécifique moyenne de la couche extérieure est la même que celle de la tranche latérale, sans quoi il y aurait avantage à transporter les spires d'une région sur l'autre.

Or l'action au centre de la couche extérieure, dont le rayon est a'', a pour valeur, d'après l'équation (9), $4\pi n_1 \frac{b}{\sqrt{a''^2 + b^2}}$. Comme la longueur du fil est $2\pi a'' \times 2 n_1 b = 4\pi a'' n_1 b$, l'action spécifique est $\frac{1}{a''\sqrt{a''^2 + b^2}}$.

(¹) W. WEBER, *Galvanométrie. Abh. der K. G. der Wiss. zu Gött.*, t. X; 1861-1862.

Une couronne de la couche latérale, comprise entre les rayons r et $r+dr$, renferme un nombre $n_1 dr$ de spires ; l'action de cette couche sur le centre est

$$2\pi n_1 \int \frac{r^2 dr}{u^3} = 2\pi n_1 \int \frac{r^2 dr}{(b^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi n_1 \left[\mathcal{L}.(r+\sqrt{b^2+r^2}) - \frac{r}{\sqrt{b^2+r^2}} \right]_{a'}^{a''}.$$

La longueur du fil est $\int 2\pi r.n_1 dr = \pi n_1 (a''^2 - a'^2)$, de sorte que l'action spécifique a pour expression

$$\frac{2}{a''^2 - a'^2} \left[\mathcal{L}.\frac{a''^2 + \sqrt{a''^2+b^2}}{a'^2+\sqrt{a'^2+b^2}} - \frac{a''}{\sqrt{a''^2+b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a'^2+b^2}} \right].$$

En égalant les deux actions spécifiques, on trouve ainsi, pour la condition du maximum,

$$(13) \qquad \mathcal{L}.\frac{a''+\sqrt{a''^2+b^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b^2}} = \frac{3a''^2 - a'^2}{2a''\sqrt{a''^2+b^2}} - \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b^2}}.$$

Si l'on y joint l'équation (4), qui donne la valeur de L, on pourra déterminer les dimensions a'' et b de la bobine.

562. Bobine d'action maximum. — Sans changer les dimensions de la gorge, on peut chercher encore quels doivent être la longueur et le diamètre du fil, pour qu'avec une source donnée, le champ magnétique soit maximum au centre de la bobine. Il est nécessaire de faire intervenir ici les éléments de la source, qui est définie par sa force électromotrice E et par sa résistance propre R′, en y comprenant la résistance du circuit extérieur.

Le champ du courant au centre de la bobine est

$$F_0 = G_0 I = G_0 \frac{E}{R+R'}.$$

La condition du maximum de cette expression s'obtient facilement dans le cas d'un enroulement uniforme, quand on suppose le fil nu ou l'épaisseur de l'isolant proportionnelle au rayon du fil et que toutes les spires sont en contact. En

effet, si on remplace le fil primitif de la bobine par un autre fil de diamètre m fois plus petit, de manière à remplir toujours la gorge, les nouvelles valeurs de R et de G_0 deviennent $m^4 R$ et $m^2 G_0$ et celle du champ magnétique au centre

$$F_0 = \frac{E m^2 G_0}{m^4 R + R'} = \frac{E G_0}{m^2 R + \frac{R'}{m^2}}.$$

Le facteur m étant ici la seule variable, la condition du maximum est $R' = m^4 R$.

Il faut donc que *la résistance de la bobine soit égale à la résistance du circuit extérieur.*

Il en serait de même pour la décharge produite par une variation φ du flux d'induction dans le circuit, car la quantité q d'électricité est $(R + R')q = \varphi$ et l'impulsion sur une aiguille placée au centre est proportionnelle à $G_0 q$.

La condition de l'égalité des résistances est indépendante de la forme de la bobine. Elle serait encore vraie si le diamètre du fil, au lieu d'être uniforme, variait d'une spire à l'autre, pourvu que le rapport des diamètres dans les deux bobines que l'on compare fût le même en tous les points.

Dans le cas général, on remplacera la résistance R par sa valeur $\rho \frac{L}{\pi y^2}$. Si le volume U de la gorge reste constant, la valeur de G_0 est proportionnelle à la longueur du fil et on peut la remplacer par gL, ce qui donne

$$F_0 = E \frac{gL}{\frac{\rho}{\pi}\frac{L}{y^2} + R'} = E \frac{g}{\frac{\rho}{\pi y^2} + \frac{R'}{L}}.$$

Le dénominateur de la dernière expression est minimum pour la condition

$$2\frac{\rho}{\pi}\frac{dy}{y^3} + \frac{R'dL}{L} = 0, \quad \text{ou} \quad 2R\frac{dy}{y} + R'\frac{dL}{L} = 0.$$

Comme le produit $L(y+z)^2$ est constant (556), on a aussi

$$2\frac{dy + dz}{y + z} + \frac{dL}{L} = 0.$$

Si l'épaisseur z est proportionnelle à y, on retrouve la condition $R=R'$. Si cette épaisseur est constante, il reste

$$\frac{R}{R'}=\frac{y}{y+z},$$

c'est-à-dire que *la résistance de la bobine doit être à la résistance extérieure comme le diamètre du fil nu est au diamètre du fil couvert* (¹). Ce résultat est encore indépendant de la forme de la gorge.

La résistance totale du fil étant déterminée par l'une des conditions précédentes, on pourra calculer le diamètre et la longueur du fil dont il faut couvrir la bobine.

Dans le premier cas, on a

$$\rho\frac{L}{\pi y^2}=R',\quad U=4(y+z)^2L=4y^2(1+\delta)^2L;$$

$$y^4=\frac{U\rho}{4\pi R'(1+\delta)^2},\quad L=\frac{\pi R'}{\rho}y^2.$$

Dans le second cas,

$$\rho\frac{L}{\pi y^2}=\frac{y}{y+z}R',\quad U=4(y+z)^2L;$$

$$y^4\left(1+\frac{z}{y}\right)=\frac{U\rho}{4\pi R'},\quad L=\frac{4\pi^2R'^2}{U\rho^2}y^6.$$

Si l'on désigne par y_0^4 le second membre de l'avant-dernière équation, la valeur approchée y_0 est le rayon qu'il faudrait prendre pour le fil, si l'épaisseur z de l'isolant était nulle. On résoudra cette équation par approximations successives, en commençant par donner une valeur arbitraire à y dans la parenthèse du premier membre, y_0 par exemple.

563. Forme la plus avantageuse de la gorge. — Nous avons supposé jusqu'ici la section de la gorge rectangulaire, mais on voit aisément que cette forme n'est pas la plus avantageuse. L'action d'une spire étant, toutes choses égales, en raison inverse de son rayon, il y a intérêt manifeste à multi-

(¹) Schwendler, *Phil. Mag.*, 4e s., t. XXXIII, p. 29; 1867.

plier celles qui correspondent aux plus petits rayons, dont l'effet est prédominant. On n'est pas maître de diminuer sans limite le rayon des premières spires : d'abord il faut un noyau pour porter les fils et, dans les bobines destinées aux galvanomètres, on doit en outre ménager autour de l'axe la place nécessaire au mouvement de l'aimant.

Quant au contour de la gorge, un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut (561) montre que la meilleure forme correspond au cas où toutes les spires situées sur la surface ont la même action spécifique sur l'aimant, sans quoi

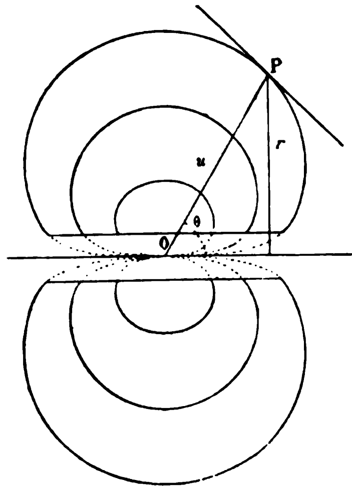


Fig. 141.

il y aurait avantage à déplacer quelques-uns des fils pour les reporter sur un autre point.

Soit P (fig. 141) un point du contour de la section méridienne, r le rayon de la spire correspondante, u le rayon vecteur OP et θ son angle avec l'axe. L'action spécifique (8) de la spire au point O devant être la même, quelle que soit la position du point P sur la courbe, celle-ci sera définie, en appelant c une constante, par l'équation

$$(14) \qquad \frac{1}{c^2} = \frac{r}{u^3} = \frac{\sin\theta}{u^2}, \qquad u^2 = c^2 \sin\theta.$$

La courbe représentée par cette équation a la forme d'un

Si l'épai[illegible]
condition [illegible]

c'est-à-di[illegible]
tance e[illegible]
du fil c[illegible]
forme d[illegible]

La r[illegible]
conditi[illegible]
longue[illegible]

Dan[illegible]

D[illegible]

éq[illegible]
pr[illegible]
rés[illegible]
co[illegible]
pa[illegible]

5[illegible]
sup[illegible]
on[illegible]
gen[illegible]
rais[illegible]

Si l'on assimile le vide intérieur au volume décrit par la courbe de paramètre a, il en résulte

$$G_0 = 3An_1^2(c-a). \tag{17}$$

Le volume U et la résistance R permettront ainsi de déterminer le paramètre c du contour, le diamètre du fil, sa longueur et la valeur de G_0.

564. Fil de diamètre variable. — Il serait préférable, tout en conservant la même gorge et la même résistance totale, de diminuer le diamètre du fil dans les premières couches pour l'augmenter d'une manière progressive dans les couches suivantes ; on aurait ainsi le double avantage d'augmenter le nombre des spires les plus efficaces et de réduire les plus éloignées qui le sont moins.

En supposant qu'on se donne les valeurs de R, R' et U, on peut se proposer de déterminer le diamètre y du fil pour chacune des couches semblables d'épaisseur dc, de manière à rendre maximum l'expression

$$F_0 = E\frac{G_0}{R+R'}.$$

Considérons l'une de ces couches correspondant aux deux valeurs c et $c+dc$ du paramètre. Si on y change le diamètre du fil, la constante de la bobine éprouvera une variation dG_0 et la résistance une variation correspondante dR ; le champ magnétique au centre devient $F_0+\delta F_0$ et, en négligeant les quantités du second ordre, il en résulte

$$\delta F_0 = E\frac{G_0}{R+R'}\left[\frac{dG_0}{G_0} - \frac{dR}{R+R'}\right].$$

La condition du maximum de δF_0 est évidemment

$$\frac{\dfrac{d}{dy}\cdot dG_0}{\dfrac{d}{dy}\cdot dR} = \frac{G_0}{R+R'} = C^{te}.$$

cercle écrasé suivant le diamètre vertical. Sa
verticale au point d'intersection avec la droite d
cient angulaire est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La figure indique
courbes successives pour des valeurs de c crois
gression arithmétique ; les parties pointillées c
au vide central ménagé pour l'aimant.

Le paramètre c sera, en général, déterminé
tance et les dimensions que l'on veut donner à la

Le volume engendré par la surface méridienn
courbe de paramètre c a pour expression

$$\int 2\pi u \sin\theta . u\, du\, d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{u} u^2\, du = \frac{2}{3}\pi c$$

Ce volume est proportionnel au cube du par
être représenté par Ac^3.

D'autre part, la cavité réservée à l'intérieu
y compris le noyau, est habituellement cyl
désignant par Aa^3, le volume réel de la
$A(c^3 - a^3)$. Pour un enroulement uniforn
contact, on aura donc

$$(15) \qquad U = A(c^3 - a^3) = 4(y+z)^2 L =$$

Le champ total au centre est

$$G_0 = \int \frac{dL}{u^2} \sin\theta = \int$$

Considérant aussi le volume U com
on déduit des équations (15)

$$dU = 3Ac^2 dc =$$

$$(16) \quad \begin{cases} dG_0 = \frac{dL}{c^2} = 3An_1^2 dc = \\ dR = \frac{\rho}{\pi y^2} dL = \rho \frac{3A}{4} \end{cases}$$

Les expressions (16) donnent alors, en supposant constante l'épaisseur z de l'isolant,

$$\frac{d}{dy}\,dG_0 = -\frac{3A}{2(y+z)^3}\,dc,$$

$$\frac{d}{dy}\,dR = -\rho\,\frac{3A}{2\pi}\,\frac{c^2(2y+z)}{y^3(y+z)^3}\,dc.$$

La condition cherchée équivaut donc à

$$c^2\,\frac{2y+z}{y^3} = C^{te};$$

le diamètre du fil croît moins vite que le paramètre c.

Si l'épaisseur de l'isolant est proportionnelle au diamètre du fil, ce diamètre dans chaque couche doit être aussi proportionnel au paramètre correspondant.

Dans cette dernière hypothèse, si l'on pose $y = \alpha c$, on a

$$(18)\quad \begin{cases} dG_0 = \dfrac{3A}{4\alpha^2(1+\delta)^2}\cdot\dfrac{dc}{c^2}, & dR = \rho\,\dfrac{3A}{4\pi\alpha^4(1+\delta)^2}\cdot\dfrac{dc}{c^2}; \\[2ex] G_0 = \dfrac{3A}{4\alpha^2(1+\delta)^2}\cdot\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{a}{c}\right), & R = \rho\,\dfrac{3A}{4\pi\alpha^4(1+\delta)^2}\cdot\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{a}{c}\right). \end{cases}$$

L'influence des couches extérieures diminue très rapidement, quand l'épaisseur de la bobine augmente, et le champ magnétique au centre est sensiblement en raison inverse du paramètre de la courbe qui limite la cavité.

Par le même raisonnement que plus haut (**562**) on trouverait que l'action maximum correspond au cas où la résistance de la bobine est égale à celle du circuit extérieur ([1]).

565. Champ magnétique d'une couche circulaire. — Supposons d'abord qu'un cercle de rayon a soit couvert par une couche magnétique homogène, de densité égale à l'unité. Le potentiel P de cette couche en un point dont les coordonnées x et y, dans le plan méridien correspondant, sont rapportées au centre du cercle et à son axe, comme axe des x,

([1]) Ayrton et Perry, *Journal of the S. of teleg. Eng.*, t. VII, p. 297; 1878.

peut être développé en fonction des puissances croissantes de y (**262**); on a alors, en posant

$$u^2 = a^2 + x^2,$$

$$P = 2\pi\left[u - x - \frac{y^2}{2^2}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{y^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{d^4u}{dx^4} - \ldots\right].$$

Les dérivées successives de u par rapport à x intervenant dans tous les problèmes qui s'en déduisent, nous les représenterons, pour abréger l'écriture, par $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$. Les premières valeurs sont

$$u_1 = \frac{x}{u}, \quad u_2 = \frac{a^2}{u^3}, \quad u_3 = -\frac{3a^2x}{u^5},$$

$$u_4 = \frac{3a^2(4x^2 - a^2)}{u^7}, \quad u_5 = -\frac{3.5a^2x(3a^2 - 4x^2)}{u^9},$$

$$u_6 = \frac{3^2 5a^2(a^4 - 12a^2x^2 + 8x^4)}{u^{11}}, \quad u_7 = \frac{3^2 5a^2x(-35a^4 + 140a^2x^2 - 56x^4)}{u^{13}}.$$

On a d'ailleurs, en général,

$$u_{n+1} = \frac{\partial u_n}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{x}{u}\frac{\partial u_n}{\partial u} + \frac{\partial u_n}{\partial x}.$$

Le potentiel P et les composantes (X_a, Y_a) du champ correspondant peuvent alors s'écrire

$$(19) \qquad P = 2\pi\left[u - x - \frac{y^2}{2^2}u_2 + \frac{y^4}{(2.4)^2}u_4 - \ldots\ldots\right],$$

$$(20) \qquad \begin{cases} X_a = -\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2\pi\left[1 - u_1 + \dfrac{y^2}{2^2}u_3 - \dfrac{y^4}{(2.4)^2}u_5 + \ldots\ldots\right], \\ Y_a = -\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2\pi y\left[\dfrac{2}{2^2}u_2 - \dfrac{4y^2}{(2.4)^2}u_4 + \ldots\ldots\right]. \end{cases}$$

Les séries sont évidemment convergentes lorsque le rapport $\frac{y}{u}$ est inférieur à l'unité.

Une autre manière de traiter le problème consiste à faire usage des polynomes de Legendre (**118**).

Si l'on désigne par r le rayon vecteur du point con
par θ l'angle de ce rayon avec l'axe, et que l'on pose μ=
les polynomes X_n sont des fonctions de μ, et l'équat
Laplace donne la condition générale

$$n(n+1)X_n + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial X_n}{\partial\mu}\right] = 0,$$

$$(21) \qquad \int_\mu^1 X_n d\mu = \frac{1-\mu^2}{n(n+1)}\frac{\partial X_n}{\partial\mu} = \frac{1-\mu^2}{n(n+1)}X'_n.$$

Chacun des polynomes et sa dérivée se déduisent
leurs précédentes par les relations connues

$$(22) \quad X_{n+1} = \mu X_n - \frac{1-\mu^2}{n+1}X'_n, \quad X'_{n+1} = (n+1)X_n +$$

On a ainsi, pour $\theta = 0$ ou $\mu = 1$,

$$X_n = 1, \quad X'_{2n} = n(2n+1), \quad X'_{2n+1} = (n+1)(2n+1$$

et, pour $\theta = 90^\circ$ ou $\mu = 0$,

$$X_{2n} = (-1)^n \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}, \quad X_{2n+1} = 0,$$

$$X'_{2n} = 0, \quad X'_{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots2n}.$$

Nous reproduirons également les premières valeurs

$X_1 = \mu,$ $\qquad$ $X'_1 = 1,$

$X_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1),$ $\qquad$ $X'_2 = 3\mu,$

$X_3 = \frac{\mu}{2}(5\mu^2 - 3),$ $\qquad$ $X'_3 = \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1),$

$X_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{5.7}{2}\mu^4 - 3.5\mu^2 + \frac{3}{2}\right),$ $\qquad$ $X'_4 = \frac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3),$

$X_5 = \frac{\mu}{4}\left(\frac{7.9}{2}\mu^4 - 5.7\mu^2 + \frac{3.5}{2}\right),$ $\qquad$ $X'_5 = \frac{15}{8}(21\mu^4 - 1$

$X_6 = \frac{1}{8}\left(\frac{7.9.11}{2.3}\mu^6 - \frac{5.7.9}{2}\mu^4\right.$ $\qquad$ $X'_6 = \frac{21}{8}\mu(33\mu^4 -$

$\left. + \frac{3.5.7}{2}\mu^2 - \frac{5}{2}\right);$

Le potentiel P peut être représenté suivant que $r \lesseqgtr a$, par l'une des séries (262)

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} P &= 2\pi a\left[1 - X_1\frac{r}{a} + \frac{1}{2}X_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \ldots - (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}X_{2n}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right] \\ P &= 2\pi a\left[\frac{1}{2}\frac{a}{r} - \frac{1}{2.4}X_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \ldots + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n+2)}X_{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}\right]. \end{aligned}\right.$$

Pour calculer les composantes (X_a, Y_a) du champ correspondant, on utilisera les relations

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad x = r\cos\theta = \mu r, \qquad y = r\sin\theta;$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \mu, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta;$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1-\mu^2}{r}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\mu\sin\theta}{r};$$

$$\frac{\partial X_n}{\partial x} = X'_n\frac{1-\mu^2}{r}, \qquad \frac{\partial X_n}{\partial y} = -X'_n\frac{\mu\sin\theta}{r}.$$

Dans le cas de $r > a$, on aura alors, en tenant compte des relations (22) et désignant par S la surface πa^2 du cercle,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} X_a &= \frac{2S}{r^2}\left[\frac{X_1}{2} - \frac{1.3}{2.4}X_3\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)}X_{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right], \\ Y_a &= \frac{2S}{r^2}\sin\theta\left[\frac{X'_1}{2} - \frac{1}{2.4}X'_3\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n+2)}X'_{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right]. \end{aligned}\right.$$

Pour les points situés dans le plan de la couche, en particulier, auquel cas $\mu = 0$, la valeur de X_a est nulle et les autres se réduisent à

$$P_0 = \frac{S}{r}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right\},$$

$$Y_0 = \frac{S}{r^2}\left\{1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n+1}\left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right\}.$$

566. Champ d'un courant circulaire. — Le potentiel V d'un feuillet magnétique uniforme, d'unité de puissance, limité au

contour du cercle, ou le potentiel de l'unité de
suivrait le contour (261), est alors égal à $-\frac{\partial P}{\partial x}$,
à la valeur précédemment calculée pour la coı
parallèle à l'axe. Les composantes X et Y du ch
tique correspondant ont alors pour expression

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{\partial X_a}{\partial x},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial X_a}{\partial y}.$$

On a ainsi, par les équations (20),

$$(23)\quad \begin{cases} X = 2\pi\left[u_2 - \frac{y^2}{2^2}u_4 + \frac{y^4}{(2.4)^2}u_6 - \ldots\right] \\ Y = -2\pi y\left[\frac{2}{2^2}u_3 - \frac{4y^2}{(2.4)^2}u_5 + \frac{6y^4}{(2.4.6)^2}\right. \end{cases}$$

et par les équations (20)',

$$(23)'\quad \begin{cases} X = \frac{2S}{r^3}\left[X_2 - \frac{3}{2}X_4\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdots + (-1)^n \frac{3.5\ldots(2n}{2.4\ldots}\right. \\ Y = \frac{2S}{r^3}\sin\theta\left[\frac{X_2'}{2} - \frac{1.3}{2.4}X_4'\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdots + (-1)^n \frac{1.3\ldots}{2.4\ldots}\right. \end{cases}$$

Dans le plan du courant, où $x = 0$ et
et $Y = 0$; suivant que le point est intéri
valeur de la composante X se réduit à

$$(24)\quad \begin{cases} X_0 = \frac{2\pi}{a}\left[1 - \frac{3}{2^2}\cdot\frac{y^2}{a^2} + \frac{3^2 5}{(2.4)^2}\cdot\frac{y^4}{a^4} - \frac{3}{(2}\right. \\ X_0 = -\frac{S}{r^3}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right\} \end{cases}$$

Lorsque le point est assez rapproc
pour que l'on puisse négliger les tern
en posant $\theta = 90° - \delta$, les termes en

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= X_0 - \frac{2\pi}{a}\cdot\frac{x^2}{a^2}\left[\frac{3}{2} - \frac{3^2 5}{2.2^2}\,\frac{y^2}{a^2} + \frac{3^2 5^2 7}{2.(2.4)^2}\cdot\frac{y^4}{a^4} - \ldots\right],\\
X &= X_0 + \frac{3S}{r^3}\,z^2\left[1 + \frac{3.5}{2^2}\cdot\frac{a^2}{r^2} + \frac{3.5^2 7}{(2.4)^2}\cdot\frac{a^4}{r^4} + \ldots\right];\\
Y &= \frac{2\pi x y}{a^3}\left[2\,\frac{3}{2^2} - 4\,\frac{3^2 5}{(2.4)^2}\,\frac{y^2}{a^2} + 6\,\frac{3^2 5^2 7}{(2.4.6)^2}\cdot\frac{y^4}{a^4} - \ldots\right],\\
Y &= \frac{2S}{r^3}\,z\left[\frac{3}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{3.5}{2}\,\frac{a^2}{r^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{3.5.7}{2.4}\cdot\frac{a^4}{r^4} + \ldots\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on borne les séries (23) aux termes du quatrième ordre de l'ordonnée y, en remplaçant les dérivées de u par leurs valeurs, il en résulte

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= \frac{2S}{u^3}\left[1 - \frac{3}{2^2}\,\frac{4x^2 - a^2}{u^2}\,\frac{y^2}{u^2} + \frac{3^2 5}{(2.4)^2}\cdot\frac{a^4 - 12a^2x^2 + 8x^4}{u^4}\,\frac{y^4}{u^4}\right],\\
Y &= \frac{3S}{u^3}\cdot\frac{xy}{u^2}\left[1 + \frac{5}{2.4}\,\frac{(3a^2 - 4x^2)}{u^2}\,\frac{y^2}{u^2}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

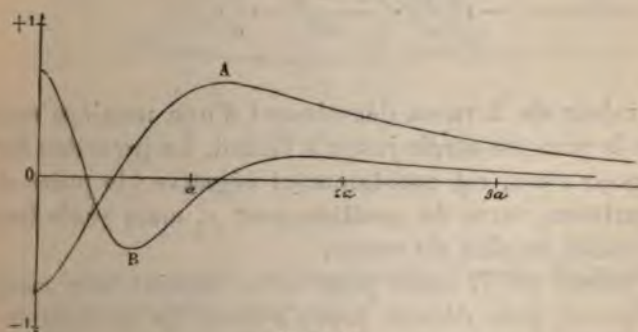


Fig. 142.

En écrivant la valeur de X sous la forme

$$
X = \frac{2S}{u^3}\left(1 + A\frac{y^2}{a^2} + B\frac{y^4}{a^4}\right),
$$

les facteurs A et B sont des nombres dont les valeurs en fonction de x ont été représentées sur la figure 142 par les courbes A et B.

Le facteur A est négatif et égal à 0,75 pour $x = 0$, c'est-à-dire que la composante X est un minimum au centre par

rapport au plan du courant. Ce facteur devient $x=0{,}5a$ et prend sa valeur maximum 0,6 pour $x=$

Le facteur B, d'abord positif, s'annule pour l $x=0{,}3a$ et $x=1{,}187a$; il atteint sa valeur max tive quand $x=0{,}586a$, c'est-à-dire au voisinage c pour laquelle le facteur A s'annule. Ce terme d est le plus souvent négligeable.

A part les termes d'ordre supérieur au second, partielles de ces composantes par rapport à x so

$$\frac{\partial X}{\partial x}=2\pi\left(u_3-\frac{y^2}{4}u_5\right)=-6\frac{Sx}{u^5}\left[1+\frac{5}{4}\cdot\frac{3a^2-4x^2}{u^2}\cdot\frac{y^2}{u^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=2\pi\left(u_4-\frac{y^2}{4}u_6\right)=-6\frac{S}{u^5}\left[\frac{a^2-4x^2}{u^2}+\frac{15}{4}\frac{a^4-12a^2x}{u^4}\right.$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=-\pi y u_4=3\frac{S}{u^4}\cdot\frac{a^2-4x^2}{u^2}\cdot\frac{y}{u},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}=-\pi y u_5=-15\frac{Sx}{u^6}\cdot\frac{3a^2-4x^2}{u^2}\cdot\frac{y}{u}.$$

La valeur de X va en décroissant d'une man depuis le plan du cercle jusqu'à l'infini. La pr nulle pour $x=0$, est constamment négative; l est maximum varie de position avec y, mais assez voisin du plan du cercle.

La valeur de Y, nulle pour $x=0$, atteint pour $2x=a$, puis décroît jusqu'à zéro. La est nulle pour $x=0$ et pour $4x^2=3a^2$. Cett correspond au maximum négatif de la prem

567. Potentiel d'une calotte sphérique. - des courants circulaires peuvent encore autre manière par les polynomes de Legen

Considérons une couche sphérique ho par un cercle HK (fig. 143) de rayon a et le centre de la sphère, u son rayon, A le et M_0 un point de l'axe situé à la distanc

La distance $\rho=MM_0$ d'un point quelc face au point M_0 s'exprimera, en fonctio



la
e A,
tive,
es du

la valeur $4\pi n$
et du champ
e aisément que
s, suivant que x

s fonctions des va-

$\varphi_2(r, \theta)$.

qui correspondent à la

$\varphi_1(r, \theta')$],
$\varphi_2(r, \theta')$].

La relation (21) permet d'éliminer toutes les intégrales. En se rappelant que la valeur limite de μ est $\cos\alpha$, on aura

$$(28)\quad \begin{cases} P_0 = 2\pi u\left[1-\mu+\frac{x}{u}\frac{1-\mu^2}{1.2}X'_1(\alpha)+\frac{x^2}{u^2}\frac{1-\mu^2}{2.3}X'_2(\alpha)+\cdots\right] \\ \quad = 2\pi\frac{u^2}{x}\left[1-\mu+\frac{u}{x}\frac{1-\mu^2}{1.2}X'_1(\alpha)+\frac{u^2}{x^2}\frac{1-\mu^2}{2.3}X'_2(\alpha)+\cdots\right]. \end{cases}$$

568. Feuillet sphérique. — Le potentiel V_0 au point M_0 d'un feuillet magnétique uniforme de même surface S et de puissance égale à l'unité, ou de l'unité de courant qui suivrait le contour HK, est égal (**261**) à $-\frac{1}{u}\frac{\partial(xP_0)}{\partial x}$. On obtient ainsi

$$(29)\quad \begin{cases} V_0 = -2\pi\left[1-\mu+\frac{x}{u}\frac{1-\mu^2}{1}X'_1(\alpha)+\cdots+\left(\frac{x}{u}\right)^n\frac{1-\mu^2}{n}X'_n(\alpha)\right] \\ \quad = 2\pi(1-\mu^2)\left[\frac{1}{2}\frac{u^2}{x^2}X'_1(\alpha)+\cdots+\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{u}\right)^{n+1}X'_n(\alpha)\right]. \end{cases}$$

On en déduira, par le théorème de Legendre (**262**) la valeur du potentiel V en un point situé à la distance r du centre C de la sphère, dans une direction qui fait l'angle θ avec l'axe du système. Remplaçant dans les expressions (29) la quantité μ par sa valeur $\cos\alpha$, il en résulte

$$(30)\quad \begin{cases} V = -2\pi\left\{1-\cos\alpha+\sin^2\alpha\left[\frac{r}{u}X'_1(\alpha)X_1(\theta)+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{r}{u}\right)^n X'_n(\alpha)X_n(\theta)\right]\right\} \\ \quad = 2\pi\sin^2\alpha\left[\frac{1}{2}\frac{u^2}{r^2}X'_1(\alpha)X_1(\theta)+\cdots+\frac{1}{n+1}\left(\frac{u}{r}\right)^{n+1}X'_n(\alpha)X_n(\theta)\right]. \end{cases}$$

La première série est convergente pour les points dans l'intérieur de la sphère ($r < u$) et la seconde pour les points extérieurs. Sur la surface même, les deux séries ont la même valeur si $\theta > \alpha$, c'est-à-dire si le point considéré est en dehors de la surface S du feuillet. Pour $\theta < \alpha$, c'est-à-dire sur le feuillet lui-même, la différence des deux séries est égale à 4π.

L'avantage de ces nouvelles formules, pour certaines applications, consiste à rapporter le potentiel d'un courant circulaire à une origine quelconque C située sur l'axe de symétrie.

Quand on fait $u=a$ et $\sin\alpha=1$, auquel cas le point C coïncide avec le centre O du cercle, les polynomes $X'_n(\alpha)$ ont des valeurs très simples (**565**) et on retrouve la formule (27).

569. Champ d'une bobine simple. — Le champ d'une bobine cylindrique de longueur $2b$, comprenant n spires par unité de longueur et parcourue par l'unité de courant, est égal à l'induction d'un cylindre aimanté uniformément (**354**), dont l'intensité d'aimantation serait n.

Si le point considéré est extérieur à la bobine, le champ est le même que celui de deux surfaces magnétiques A et A' de densités constantes $+n$ et $-n$ qui couvriraient les bases.

Les quantités P, X_a et Y_a données par les équations (19) et (20) sont des fonctions de x que l'on peut écrire

$$P=2\pi f(x),\qquad X_a=2\pi[1+f_1(x)],\qquad Y_a=2\pi f_2(x).$$

Si l'on reporte l'origine des coordonnées au centre de la bobine, on devra y remplacer x par $x-b$ pour la surface A, et par $x+b$ pour la surface A'. Cette dernière étant négative, le potentiel extérieur de la bobine et les composantes du champ sont

$$V=2\pi n[f(x-b)-f(x+b)];$$

$$(31)\qquad \begin{cases} X=2\pi n[f_1(x-b)-f_1(x+b)],\\ Y=2\pi n[f_2(x-b)-f_2(x+b)].\end{cases}$$

Pour l'intérieur, le champ est la résultante de la valeur $4\pi n$ qui conviendrait à une bobine illimitée (**355**) et du champ produit par les bases. On reconnaîtrait encore aisément que les expressions (31) conviennent aux deux cas, suivant que x est plus grand ou plus petit que b.

De même, les expressions (20)' sont des fonctions des variables r et θ que l'on peut écrire

$$X_a=2S\varphi_1(r,\theta),\qquad Y_a=2S\varphi_2(r,\theta).$$

Désignant par r' et θ' les valeurs qui correspondent à la couche négative, on aura

$$(32)\qquad \begin{cases} X=2nS[\varphi_1(r,\theta)-\varphi_1(r,\theta')],\\ Y=2nS[\varphi_1(r,\theta)-\varphi_2(r,\theta')].\end{cases}$$

Il est clair que $\varphi_1(r,\theta) = -\varphi_1(r, \pi - \theta)$ et $\varphi_2(r$

Pour un point situé à la distance r_0 dans l

la bobine, la composante Y est nulle et

$$X_0 = -4nS\varphi_1(r_0, \theta_0).$$

Lorsque l'angle θ_0 est très grand, c'est-à-c

éloigné par rapport à la longueur $2b$ de la b

de $\varphi_1(r_0, \theta_0)$ se réduit à $\frac{\cos\theta_0}{2r_0^2} = \frac{b}{2r_0^3}$; il reste a

$$X_0 = -\frac{2bnS}{r_0^3} = -\frac{NS}{r_0^3}.$$

Les expressions (32) ne conviennent pas

intérieur, parce que le rayon vecteur r n'

supérieur au rayon a.

570. Bobine à plusieurs couches. — Si l'

bobine simple de rayon r, en posant

$$u^2 = r^2 + (x-b)^2, \qquad v^2 = r^2 + ($$

et remplaçant les dérivées de u et v par leu

posantes (31) du champ deviennent

$$X_r = 2\pi n\left[\frac{x+b}{v} - \frac{x-b}{u} + \frac{3}{4}\left(\frac{x+b}{v^5} - \frac{x-b}{u^5}\right.\right.$$

$$Y_r = \pi n r^2 y\left[\frac{1}{u^3} - \frac{1}{v^3} + \frac{3}{8}\left\{\frac{4(x+b)^2 - r^2}{v^7} - \right.\right.$$

Pour une bobine d'épaisseur dr,

homogène, on remplacera dans ces ex

L'intégration par rapport à r, entre

nera ensuite les composantes X et Y

d'une bobine d'épaisseur $a'' - a'$.

Si on représente ces composant

$$X = A_0 + A_2 y^2 + A$$

$$Y = B_1 y + B_3 y^3 +$$

2° La valeur du champ à une *grande distance* par rapport au rayon de la bobine se déterminera d'une manière analogue, en partant de la série convergente

$$u = x\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = x\left[1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}-\ldots-(-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots\;2n}\left(\frac{a}{x}\right)^{2n}\right].$$

On a alors, pour un courant de rayon r,

$$\begin{aligned} X_r = \frac{2\pi r^2}{x^3}\Bigg\{ & 1-\frac{3}{2}\frac{r^2}{x^2}+\frac{3.5}{2.4}\frac{r^4}{x^4}-\frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{r^6}{x^6}+\ldots \\ & -\frac{1}{2^2}\frac{y^2}{x^2}\left[\frac{1}{2}2.3.4-\frac{1.3}{2.4}4.5.6\frac{r^2}{x^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}6.7.8\frac{r^4}{x^4}-\ldots\right] \\ & +\frac{1}{(2.4)^2}\frac{y^4}{x^4}\left[\frac{1}{2}2.3.4.5.6-\frac{1.3}{2.4}4.5.6.7.8\frac{r^2}{x^2}+\ldots\right] \\ & -\frac{1}{(2.4.6)^2}\frac{y^6}{x^6}\left[\frac{1}{2}2.3.4.5.6.7.8-\frac{1.3}{2.4}4.5.6.7.8.9.10\frac{r^2}{x^2}+\ldots\right]+\ldots\Bigg\}. \end{aligned} \tag{35}$$

Si on peut négliger les quatrièmes puissances des rapports $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{a}$ et le rapport $\frac{c^2}{x^2}$, qui est de même ordre, une double intégration donne, pour une bobine homogène,

$$\begin{aligned} X = \frac{2N\pi a^2}{x^3}\Bigg\{ & 1+\frac{c^2}{3a^2}+\frac{2b^2}{x^2}-\frac{3}{2}\frac{a^2}{x^2} \\ & -\frac{3.4}{2^2}\frac{y^2}{x^2}\left[1+\frac{c^2}{3a^2}+\frac{5.6}{2.3}\frac{b^2}{x^2}-\frac{5.6}{2.4}\frac{a^2}{x^2}\right] \\ & +\frac{3.4.5.6}{(2.4)^2}\frac{y^4}{x^4}\left[1+\frac{c^2}{3a^2}+\frac{7.8}{2.3}\frac{b^2}{x^2}-\frac{7.8}{2.4}\frac{a^2}{x^2}\right]-\ldots\Bigg\}. \end{aligned} \tag{36}$$

Cette composante tend à devenir en raison inverse du cube de la distance, comme on pouvait le voir directement par l'assimilation de la bobine à un aimant.

3° Dans l'intérieur d'une bobine simple de *grande longueur* par rapport à son rayon r, le champ est sensiblement uniforme et sa composante axiale est

$$X_r = 4\pi n - (X_a + X'_a),$$

X_a et X'_a désignant les valeurs absolues relatives aux bases A et A' où la densité magnétique serait n.

En posant $u^2 = r^2 + (b-x)^2$, les séries (23) peuvent être développées en fonction du rapport

$$p = \frac{r}{b-x}, \quad \text{qui donne} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p^2}{r},$$

$$u_1 = \frac{b-x}{u} = (1+p^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1.3}{2.4}p^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}p^6 + $$

On en déduira les valeurs successives des dérivé entrent dans l'expression de X_a ; il suffira ensuite d'y c le signe de x pour avoir celle de X'_a. On trouve ainsi

$$(37) \quad \begin{aligned} X_r = 4\pi n \Big\{ & 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{b^2}\left(1 + \frac{2.3}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^4}{b^4}\left(1 + \frac{4.5}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \dots \\ & - \frac{y^2 r^2}{2^2 b^4}\left[\frac{1}{2}2.3\left(1 + \frac{4.5}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \frac{1.3}{2.4}4.5\frac{r^2}{b^2}\left(1 + \frac{6.7}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \dots \right. \\ & + \frac{y^4 r^2}{(2.4)^2 b^6}\left[\frac{1}{2}2.3.4.5\left(1 + \frac{6.7}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \frac{1.3}{2.4}4.5.6.7\frac{r^2}{b^2}\left(1 + \frac{8.9}{1.2} \dots \right.\right. \\ & - \frac{y^6 r^2}{(2.4.6)^2 b^8}\left[\frac{1}{2}2.3.4.5.6.7\left(1 + \frac{8.9}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

La composante X relative à une bobine homogène s' dra en remplaçant n par $n_1 n_2 dr$, puis intégrant en limites $a-c$ et $a+c$. Si l'on néglige les quatrième: sances des rapports $\frac{x}{b}$ et $\frac{c}{a}$, on obtient

$$(38) \quad \begin{aligned} X = \frac{2N\pi}{b}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{c^2}{a^2} + 3\frac{x^2}{b^2}\right) + \frac{3}{8}\frac{a^4}{b^4}\left(1 + 2\frac{c^2}{a^2} + \dots \right. \\ & - \frac{y^2 a^2}{2^2 b^4}\left[3\left(1 + \frac{1}{3}\frac{c^2}{a^2} + 10\frac{x^2}{b^2}\right) - \frac{15}{2}\frac{a^2}{b^2}\left(1 + 2\frac{c^2}{a^2} + \dots \right.\right. \\ & + \frac{15}{16}\frac{y^4 a^2}{b^6}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{c^2}{a^2} + 21\frac{x^2}{b^2}\right) - \dots \Big\}. \end{aligned}$$

Lorsque les rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{x}{b}$ et $\frac{a^2}{b^2}$ sont de même or reste simplement, au même degré d'approximation,

$$(39) \quad \begin{aligned} X = \frac{2N\pi}{b}\Big[& 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2} + \frac{3}{8}\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{4}{9}\frac{c^2}{a^2} - 4\frac{x^2}{b^2}\right) \\ & - \frac{3}{4}\frac{a^2 y^2}{b^4}\left(1 - \frac{5}{2}\frac{a^2}{b^2}\right) + \frac{15}{16}\frac{a^2 y^4}{b^6}\Big]. \end{aligned}$$

572. Méthode de Maxwell. — Quand on veut passer de l'action d'un courant unique à celle d'une bobine, il est quelquefois plus avantageux, au lieu d'employer les quadratures comme dans les paragraphes précédents, d'appliquer la méthode suivante indiquée par Maxwell.

Soit P une fonction de deux variables α et β, dont les limites sont $\pm p$ et $\pm q$; on se propose d'en calculer la valeur moyenne

$$\bar{P} = \frac{1}{4pq}\int_{-p}^{+p} d\alpha \int_{-q}^{+q} P\,d\beta.$$

Si P_0 est la valeur de P pour $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, on peut développer cette fonction par la formule de Taylor

$$P = P_0 + \alpha\left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)_0 + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial \beta}\right)_0 + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2}\right)_0 + \dots$$

Quand on effectue ensuite les intégrations entre les limites indiquées, tous les termes de degré impair en p et q disparaissent et il reste

$$\begin{aligned}\bar{P} = P_0 &+ \frac{1}{2.3}\left[p^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2}\right)_0 + q^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2}\right)_0\right] \\ &+ \frac{2}{3.4.5}\left[p^4\left(\frac{\partial^4 P}{\partial \alpha^4}\right)_0 + 2p^2q^2\left(\frac{\partial^4 P}{\partial \alpha^2\,\partial \beta^2}\right)_0 + q^4\left(\frac{\partial^4 P}{\partial \beta^4}\right)_0\right] + \dots\end{aligned}$$

Si l'on applique cette formule au premier terme de X dans l'équation (23), lequel représente l'action sur l'axe d'un courant circulaire, pour en déduire la valeur relative à une bobine d'enroulement homogène, on remplacera a par $a + \alpha$, x par $x + \beta$, les valeurs de p et q étant c et b. Il en résulte alors, en posant

$$P = u_2 = \frac{(a+\alpha)^2}{\left[(a+\alpha)^2 + (x+\beta)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\bar{P} = \frac{a^2}{u^3}\left[1 + \frac{a^2(4x^2 - a^2)}{2u^4}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{2x^4 - 11a^2x^2 + 2a^4}{6u^4}\cdot\frac{c^2}{a^2} + \dots\right],$$

et la valeur de X pour la bobine est $2\pi N\bar{P}$.

En posant $u^2 = r^2 + (b - x)^2$, les séries
être développées en fonction du rapport

$$p = \frac{r}{b - x}, \quad \text{qui donne} \quad \frac{dp}{d.}$$

$$u_1 = \frac{b - x}{u} = (1 + p^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{,}$$

On en déduira les valeurs succe[illegible] ... un
entrent dans l'expression de X_a ; il su[illegible] ... la v
le signe de x pour avoir celle de X'_a. ... d'un

$$X_r = 4\pi n \Big\{ 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{b^2}\left(1 + \frac{2.3}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) + \frac{1.3}{2.}$$

... est représ

$$- \frac{y^2 r^2}{2^2 b^4}\left[\frac{1}{2} 2.3\left(1 + \frac{4.5}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right) - \frac{1.3}{2.4} 4$$

$A_n y^n$,

$$(37) \quad + \frac{y^4 r^2}{(2.4)^2 b^6}\left[\frac{1}{2} 2.3.4.5\left(1 + \frac{6.7}{1.2}\frac{x^2}{b^2}\right)\right.$$

...nctions de x, il
...un terme quelc

$$- \frac{y^6 r^2}{(2.4.6)^2 b^8}\left[\frac{1}{2} 2.3.4.5.6.7\left(1 - \right.\right.$$

La composante X relative à ... $\frac{y^4}{4 - 2}$.
dra en remplaçant n par n, ...
limites $a - c$ et $a + c$. Si l'... U est donc
sances des rapports $\frac{x}{b}$ et ...

$$\ldots - A_n \frac{y^n}{n+2}\Big).$$

$$X = \frac{2N\pi}{b}\Big\{ 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\Big(1 +$$

$$(38) \quad - \frac{y^2 a^2}{2^2 b^4}\left[3\left(1 + \frac{1}{3}\frac{c^2}{a^2}\right.\right.$$

$$+ \frac{15}{16}\frac{y^4 a^2}{b^6}\left(1 + \frac{1}{3}\right.$$

...détermineront ainsi, s
...surface magnétique
...champ produit par un

... — Dans l'étud
... particulier pour la bo
Lorsque les rapport... considérer l'action e
reste simplement, au... courant d'une bobine.
... uniforme, ou l'aiguill

$$X = \frac{2N\pi}{b}\Big[$$

... se réduirait
(39) ... général, mais on
... de l'aiguille est fixe

... de rayon a, dont
... aiguille dont le mi-
... istance x du centre.
... z et y les coordon-
... nt $x-z$ et $-y$; nous
...
... composantes du champ
... points A_1 et A_2. Comme

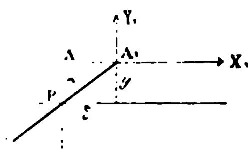


Fig. 144.

... sont de signes contraires, le couple C cor-

$$(X_1+X_2)y-(Y_1-Y_2)z.$$

... té, appelant X et Y les composantes du champ
... ont les coordonnées sont x et y, on a

$$... \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{z^2}{1.2}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{z^3}{1.2.3}\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}+\ldots,$$

$$... z\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{z^2}{1.2}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{z^3}{1.2.3}\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}+\ldots.$$

... leurs de X_2 et Y_2 se déduiraient des précédentes en
... ant le signe de z; il en résulte

$$X_1+X_2=2\left[X+\frac{z^2}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{z^4}{24}\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}+\ldots\right],$$

$$Y_1-Y_2=2z\left[\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{z^2}{6}\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}+\ldots\right].$$

Les équations (23) donnent, en bornant le développement aux termes du 5e ordre en δ et y,

$$X_1 + X_2 = 4\pi\left[u_2 - \frac{y^2}{4}u_4 + \frac{y^4}{(2.4)^2}u_6 + \frac{\delta^2}{2}\left(u_4 - \frac{y^2}{4}u_6\right) + \frac{\delta^4}{24}u_6\right],$$

$$Y_1 - Y_2 = -2\pi y\delta\left[u_4 - \frac{y^2}{8}u_6 + \frac{\delta^2}{6}u_6\right];$$

$$C = 4\pi y\left[u_2 + \left(\delta^2 - \frac{y^2}{4}\right)u_4 + \frac{1}{64}(y^4 - 12y^2\delta^2 + 8\delta^4)u_6\right].$$

En appelant α l'angle que fait l'axe magnétique A_2A_1 avec le plan du courant, on a $\delta = l\sin\alpha$ et $y = l\cos\alpha$.

Comme le produit $2l$, qui vient en facteur commun, représente le moment magnétique m de l'aiguille, il en résulte

$$(41)\quad C = 2\pi m\cos\alpha\left[u_2 + \frac{5\sin^2\alpha - 1}{4}l^2u_4 + \frac{1 - 14\sin^2\alpha + 21\sin^4\alpha}{64}l^4u_6\right].$$

Quand on fait $x = 0$, c'est-à-dire quand le milieu de l'aiguille est au centre du cadre, le couple se réduit à

$$C = \frac{2\pi m\cos\alpha}{a}\left[1 + \frac{3}{4}(1 - 5\sin^2\alpha)\frac{l^2}{r^2} + \frac{45}{64}(1 - 14\sin^2\alpha + 21\sin^4\alpha)\frac{l^4}{r^4}\right].$$

Lorsque le cadre est formé par une bobine à gorge rectangulaire, il faut remplacer le terme principal $2\pi u_2$ par la valeur de G que donne l'équation (10). Quant aux termes de correction compris dans la parenthèse de l'expression (41), il suffira en général, à moins que l'aiguille n'ait une longueur notable par rapport au diamètre du cadre, de prendre pour les quantités a et u les valeurs qui correspondent au rayon moyen de la bobine.

Si l'aiguille, supposée symétrique, ne peut pas être réduite à deux pôles, il est facile de voir que l'on doit remplacer les facteurs l^2 et l^4 par $\frac{\sum\mu\lambda^3}{\sum\mu\lambda}$ et $\frac{\sum\mu\lambda^5}{\sum\mu\lambda}$, μ désignant la masse magnétique située à une distance λ de l'axe de rotation.

Le terme principal, dans l'expression du couple, représente le moment de l'action que subirait l'aiguille dans un champ uniforme dont l'intensité serait la même qu'au point P.

Le premier terme de correction dans la parenthèse est proportionnel au facteur $(1 - 5\sin^2\alpha)$. Ce facteur est positif et égal à l'unité pour $\alpha = 0$; il s'annule pour $5\sin^2\alpha = 1$ ou $2\tang\alpha = 1$, c'est-à-dire pour un angle de $26°4'$. Il devient ensuite négatif et atteint la valeur 1,5 pour $\alpha = 45°$.

Le second terme, proportionnel à $(1 - 14\sin^2\alpha + 21\sin^4\alpha)$, est nul pour $\alpha = 4°40'$ et $\alpha = 35°49'$. Ce facteur est positif et égal à l'unité pour $\alpha = 0$, passe par un minimum égal à $-\frac{4}{3}$, vers $19°28'$, et reprend la même valeur positive vers $43°36'$. Dans la plupart des cas, ce terme sera négligeable.

575. Bobine de Gaugain. — Différents artifices peuvent être employés pour faire disparaître le second terme de l'expression (41) du couple; dans ce cas, l'effet est sensiblement le même que si le champ était uniforme.

Une première méthode consiste à disposer les expériences de façon que l'aiguille fasse toujours avec le cadre un angle voisin de 26°, qui rend le facteur $(1 - 5\sin^2\alpha)$ très petit.

Un autre moyen est de placer le centre de l'aiguille à une distance égale à la moitié du rayon du cercle, $2x = a$, condition qui annule le facteur u_4.

Gaugain avait trouvé par expérience [1] que, dans un galvanomètre ainsi constitué, la tangente de la déviation est très exactement proportionnelle à l'intensité du courant, c'est-à-dire que le couple est proportionnel au cosinus de la déviation. Partant de cette remarque, il avait construit des bobines ayant la forme d'un tronc de cône tel que la tangente du demi-angle au sommet fût égale à 2. Si on place le centre de l'aiguille au sommet du cône, la condition précédente sera satisfaite pour toutes les spires, mais cette disposition présente de grandes difficultés pratiques pour l'enroulement du fil et le centrage de l'aiguille. Il est plus avantageux de combiner des bobines à section rectangulaire de manière à réaliser un champ très sensiblement uniforme.

576. Cadres de von Helmholtz. — Si l'on considère deux circonférences B_1 et B_2 (fig. 145) de même rayon r, ayant même axe O_1O_2 et parcourues par des courants parallèles, on

[1] GAUGAIN, *Comptes rendus de l'Acad. des sc.*, t. XXXVI, p. 191; 1853.

voit aisément, par raison de symétrie, qu'au point O, milieu de la distance $O_1 O_2$, la composante X parallèle à l'axe est un minimum ou un maximum relativement aux points situés sur l'axe, ou dans un plan perpendiculaire à l'axe, et que la composante Y est nulle dans le plan perpendiculaire à l'axe qui passe par ce point O. Le champ est donc sensiblement uniforme au voisinage du point O, et le couple produit par les deux courants, sur une aiguille aimantée située dans cette région, est sensiblement le même que si l'aiguille était centrée ; on supprimera ainsi une difficulté de réglage.

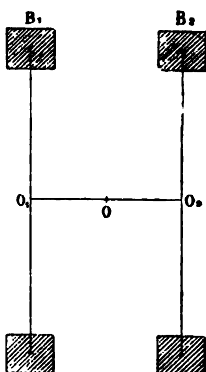


Fig. 145.

En outre, si la distance des cadres est égale au rayon r, les dérivées de u deviennent

$$u_2 = \frac{r^2}{u^3} = \frac{8}{5r\sqrt{5}}, \qquad u_4 = 0,$$

$$u_6 = \frac{3^3 5}{2}\,\frac{r^6}{u^{11}} = \frac{3^3 5}{2}\,\frac{r^2}{u^3}\cdot\frac{r^4}{u^8}.$$

La composante X du champ des deux cadres est alors

$$(42) \qquad X = 4\pi\frac{r^2}{u^3}\left[1 - \frac{3^3 5}{2^3 4^2}\,\frac{r^4 y^4}{u^8}\right] = \frac{32\pi}{5r\sqrt{5}}\left[1 - \frac{54}{125}\cdot\frac{y^4}{r^4}\right].$$

Telle est la disposition imaginée par von Helmholtz [1].

[1] WIEDEMANN, *Galvanismus*, Bd II, p. 225 (2e éd.).

L'état du champ magnétique est représenté par la figure 146 empruntée à Maxwell; les deux systèmes de lignes orthogo-

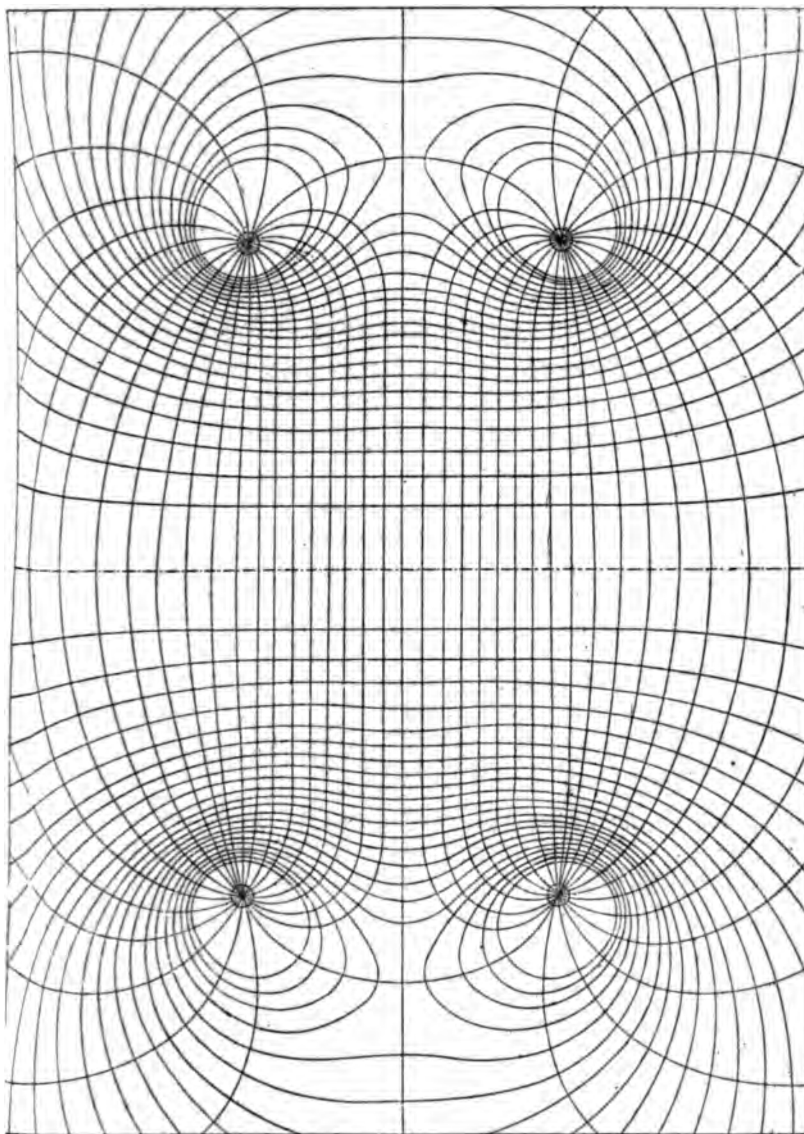


Fig. 146.

nales représentent, soit les lignes de force, soit l'intersection du plan de figure par les surfaces de niveau.

Le premier facteur de l'expression (42) représente la valeur G_0 du champ au centre O du système. Si on remplace les courants circulaires par des bobines de dimensions $2b$ et $2c$, chacune d'elles contenant N spires, et qu'on s'en tienne aux termes du second ordre, on pourra remplacer r par le rayon moyen a dans le terme de correction; le terme en c^2 disparaît alors comme ayant en facteur $a^2 - 4x^2$ et la valeur relative au point O devient

$$G_0 = \frac{32 N \pi}{5 a \sqrt{5}} \left[1 - \frac{1}{15} \frac{b^2}{a^2} \right].$$

Si l'on pousse l'approximation jusqu'aux termes du quatrième ordre, on trouve que le terme en y^2 renferme le facteur $(31 b^2 - 36 c^2)$; on fera disparaître ce terme en choisissant la section de la gorge de manière que

$$\frac{b}{c} = \frac{6}{\sqrt{31}} = 1{,}079.$$

Il ne restera alors du quatrième ordre que le terme en y^4, lequel a pour valeur $-\frac{54}{125} \frac{y^4}{a^4}$.

577. Bobine à quatre cercles. — On obtient une solution plus complète du problème au moyen de quatre courants circulaires ayant même axe et symétriques deux à deux par rapport à un point de cet axe.

Nous supposerons que ces courants, de rayon r et r', aux distances x et x' du centre de symétrie, sont situés sur une sphère de rayon a. Si les courants sont de même sens, les composantes du champ parallèles à l'axe s'ajoutent. Désignant par p le rapport du nombre de spires des grands circuits à celui des petits, on peut choisir deux des trois quantités r, r', p de manière à annuler les deux premiers termes de correction, c'est-à-dire la somme des valeurs de u_4 et u_6 relatives aux quatre courants. Comme $u = a$ pour tous les courants, cette double condition est exprimée par les équations

$$p r^2 (4x^2 - r^2) + r'^2 (4x'^2 - r'^2) = 0,$$
$$p r^2 (r^4 - 12 r^2 x^2 + 8 x^4) + r'^2 (r'^4 - 12 r'^2 x'^2 + 8 x'^4) = 0.$$

Si l'on pose $r = ma$ et $r' = m'a$, ce qui donne

$$x^2 = a^2 - r^2 = a^2(1 - m^2), \quad x'^2 = a^2(1 - m'^2),$$

ces équations deviennent

$$pm^2(4 - 5m^2) + m'^2(4 - 5m'^2) = 0,$$
$$pm^2(21m^4 - 28m^2 + 8) + m'^2(21m'^4 - 28m'^2 + 8) = 0.$$

Retranchant deux fois la première de la seconde, on peut remplacer la dernière par l'équation plus simple

$$pm^4(7m^2 - 6) + m'^4(7m'^2 - 6) = 0.$$

On en déduit

$$p = -\frac{m'^2}{m^2} \cdot \frac{4 - 5m'^2}{4 - 5m^2} = -\frac{m'^4}{m^4} \cdot \frac{7m'^2 - 6}{7m^2 - 6},$$

$$\frac{m^2(7m^2 - 6)}{4 - 5m^2} = \frac{m'^2(7m'^2 - 6)}{4 - 5m'^2} = \frac{6 - 7(m^2 + m'^2)}{5};$$

$$m'^2 = \frac{4}{7} \cdot \frac{7m^2 - 6}{5m^2 - 4}, \quad p = \frac{32}{49} \cdot \frac{7m^2 - 6}{m^2(5m^2 - 4)^3}.$$

On remarquera que m et m' sont les sinus des angles α et α' sous lesquels on voit du centre les deux rayons r et r'; leurs carrés doivent donc être compris entre zéro et l'unité.

Pour que la valeur de p soit positive, avec ces conditions, il faut que l'on ait $7m^2 - 6 > 0$ ou $7m'^2 - 4 < 0$.

578. Bobine à trois cercles. — Un cas particulier remarquable est celui où $7m'^2 = 4 = 7\sin^2\alpha'$, d'où $m = 1$ et $p = \frac{32}{49}$; les deux cercles de rayon r forment alors une seule bobine de rayon a, dont le nombre N des spires est un multiple q de 64, si chacun des petits cercles a $N' = 49q$ spires, soit en tout $N + 2N' = 162q$ spires.

Le rayon de ces petits cercles étant $a\sin\alpha'$, le champ magnétique au centre est alors

$$G_0 = \frac{2\pi}{a}(N + 2N'\sin\alpha') = \frac{2\pi}{a}\,120q = \frac{20}{27} \cdot \frac{2\pi}{a}(N + 2N').$$

D'autre part, dans une bobine sphérique contenant n spires par unité de longueur, le champ intérieur est uniforme et égal à $\frac{8}{3}\pi n = \frac{2\pi}{a}\frac{4na}{3}$ (357). Cet enroulement sphérique serait difficile à réaliser, tandis que les dispositions précédentes en fournissent à peu près l'équivalent.

Le nombre des spires sur la sphère étant $2na$, si l'on veut que le champ magnétique au centre soit le même que celui d'une bobine à trois cercles, il faut qu'on ait

$$\frac{4na}{3} = 120q, \qquad 2na = 180q = \frac{10}{9}(N + 2N').$$

Pour la sphère, si on pose $r = a\cos\theta$, ou $x = a\sin\theta$, le nombre des spires dans l'intervalle dx est $ndx = na\cos\theta\,d\theta$ et la longueur des spires correspondantes $2\pi r n dx = 2\pi n a^2 \cos^2\theta\,d\theta$. La longueur totale du fil est donc

$$L = 2\pi n a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = n\pi^2 a^2 = 2\pi a.q.45\pi = 2\pi aq.141,4.$$

Pour la bobine à trois cercles, la longueur totale L' de l'ensemble des spires serait

$$L' = 2\pi a(N + 2N'\sin\alpha') = 2\pi aq\left(64 + \frac{196}{\sqrt{7}}\right) = 2\pi aq.138.$$

L'égalité des champs au centre exigerait donc sur la sphère un plus grand nombre de spires et un fil plus long que dans la bobine à trois cercles.

579. Bobines annulaires. — Dans une bobine *annulaire* (356) contenant N spires, le flux de force qui traverse un élément dS de la section, situé sur une circonférence de longueur l, pour l'unité de courant, est égal à $4\pi N\frac{dS}{l}$. La valeur moyenne du champ sur une surface S est donc

$$F_m = \frac{4\pi N}{S}\int\frac{dS}{l}.$$

Si la surface S est un cercle de rayon a dont le centre soit situé à une distance R de l'axe de la bobine, on a

$$\int \frac{dS}{l} = R - \sqrt{R^2 - a^2} = R\left[1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}\right],$$

$$F_m = \frac{4N}{a^2} R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}\right) = \frac{2N}{R}\left[1 + \frac{1}{4}\frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{8}\frac{a^4}{R^4} + \ldots\right].$$

Si la section est une ellipse dont les axes sont $2a$ et $2b$, l'un perpendiculaire et l'autre parallèle à l'axe de l'anneau, le champ moyen est le même que pour une section circulaire de rayon a, car la première intégrale a pour expression

$$\int \frac{dS}{l} = \frac{b}{a}\left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right).$$

Pour un anneau à section rectangulaire, de côtés $2a$ et $2b$, on aurait encore

$$F_m = \frac{N}{a}\mathfrak{L}.\frac{R + a}{R - a} = \frac{2N}{R}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{5}\frac{a^4}{R^4} + \ldots\right].$$

Cette valeur moyenne du champ est aussi indépendante de la dimension b; il en serait de même pour toute section symétrique par rapport à une droite parallèle à l'axe.

CHAPITRE TROISIÈME

COEFFICIENTS D'INDUCTION

580. Courants parallèles. — Dans un grand nombre de cas, les courants parcourent des conducteurs à section constante qui suivent des directions parallèles, soit rectilignes, soit suivant des courbes dont le rayon de courbure est très grand par rapport au diamètre de la section. On peut alors assimiler leurs différentes parties à des systèmes rectilignes et examiner le cas de n conducteurs cylindriques de sections $S_1, S_2, \ldots S_n$, parcourus par des courants $I_1, I_2, \ldots I_n$, les uns dans un sens et formant une somme I, les autres en sens contraire et formant une somme égale $-I$. Les deux groupes de conducteurs sont reliés à leurs extrémités, pour fermer le circuit, mais on supposera ces jonctions assez éloignées pour qu'elles ne modifient pas le champ dans la région considérée.

Quand il s'agit de courants superficiels, leur distribution est la même que celle de l'électricité dans le problème correspondant d'électrostatique (**410**).

Considérons, par exemple, deux cylindres à sections circulaires de rayon ρ et ρ', dont l'un sert pour l'aller et l'autre pour le retour du courant.

Dans le problème correspondant (**120**) de deux lignes électrisées parallèles, à la distance $2a$, dont la charge par unité de longueur est $\pm\lambda$, le potentiel sur la surface d'un cylindre défini par le rapport k^2 est

$$V = 2\lambda \mathfrak{L}.\frac{r'}{r} = 2\lambda\mathfrak{L}.k^2.$$

Les deux cylindres étant supposés extérieurs l'un à l'autre,

le potentiel est positif sur l'un d'eux et négatif sur l'autre ; la différence de ces potentiels est donc $2\lambda\mathfrak{L}.k^2k'^2$, et le coefficient de self-induction l, pour l'unité de longueur, est

$$(1)\qquad l = 2\mathfrak{L}.k^2k'^2 = 2\mathfrak{L}.\frac{(a+\sqrt{a^2+\rho^2})(a+\sqrt{a^2+\rho'^2})}{\rho\rho'}.$$

Les distances des axes au milieu de la longueur $2a$ (121) étant $\sqrt{a^2+\rho^2}$ et $\sqrt{a^2+\rho'^2}$, la distance D de ces axes est

$$D = \sqrt{a^2+\rho^2}+\sqrt{a^2+\rho'^2}.$$

On déduit de cette relation, comme au n° 122,

$$2D\sqrt{a^2+\rho^2} = D^2+\rho^2-\rho'^2,\qquad 2D\sqrt{a^2+\rho'^2} = D^2+\rho'^2-\rho^2,$$
$$4a^2D^2 = (D+\rho+\rho')(D+\rho-\rho')(D-\rho+\rho')(D-\rho-\rho').$$

La valeur du produit $2aD$ étant donnée par cette dernière expression, on trouve aisément que l'équation (1) peut s'écrire

$$(1)'\qquad l = 2\mathfrak{L}.\frac{D^2-\rho^2-\rho'^2+2aD}{2\rho\rho'}.$$

Lorsque les rayons ρ et ρ' sont égaux, il reste

$$(1)''\qquad l = 2\mathfrak{L}.\frac{D^2-2\rho^2+D\sqrt{D^2-4\rho^2}}{2\rho^2}.$$

Si les rayons ρ et ρ' sont assez petits pour que les carrés de leurs rapports à la distance D soient négligeables devant l'unité, on a simplement

$$(2)\qquad l = 2\mathfrak{L}.\frac{D^2}{\rho\rho'}.$$

Lorsque les courants sont homogènes, on peut encore, au moins comme première approximation, appliquer les considérations simples appliquées précédemment (402 à 411). Le flux de force moyen émis par un conducteur à section circulaire dans son propre circuit, pour l'unité de courant et

l'unité de longueur, est égal à 0,5. Dans la surface intermédiaire, comptée jusqu'à l'axe du second conducteur, le flux de force est (**316**)

$$2\int_{\rho}^{D-\rho}\frac{dr}{r} = 2\mathfrak{L}.\frac{D-\rho}{\rho}.$$

Le même calcul étant appliqué au second conducteur, dont le flux de force est de même sens dans la région considérée, on aura ainsi

$$(3)\qquad l = 1 + 2\mathfrak{L}.\frac{(D-\rho)(D-\rho')}{\rho\rho'}.$$

En négligeant les rapports des rayons à la distance δ, on retrouve la formule (2) augmentée de l'unité, conformément à la règle déjà utilisée.

581. Moyennes distances géométriques. — Cette manière de traiter le problème est insuffisante, surtout quand les milieux sont magnétiques. Maxwell a recours aux propriétés générales du champ électromagnétique et le calcul renferme alors des grandeurs particulières qu'il importe de définir.

Supposons qu'un conducteur cylindrique de section S soit parcouru par un courant uniforme I de densité σ.

L'action produite par le filet σdS sur l'unité de courant parallèle qui coupe la section au point P, à la distance r, est dirigée suivant la droite r et égale à $-2\sigma\frac{dS}{r}$. Cette action a pour potentiel, à une constante près, $2\sigma dS\mathfrak{L}.r$ et le potentiel relatif au courant total est

$$V = 2\sigma\int dS\mathfrak{L}.r,$$

expression qu'on peut écrire, en posant $S\mathfrak{L}.R_p = \int dS\mathfrak{L}\,r$,

$$(4)\qquad V = 2\sigma S\mathfrak{L}.R_p = 2I\mathfrak{L}.R_p.$$

La grandeur R_p ainsi définie est la *moyenne distance géométrique* du point P à la surface S.

De même, si S_1 et S_2 sont les sections de deux conducteurs cylindriques parallèles parcourus par les courants

uniformes I_1 et I_2 de densités σ_1 et σ_2, l'action du filet $\sigma_1 dS_1$ sur le filet $\sigma_2 dS_2$ situé à la distance r est $-2\sigma_1\sigma_2 \dfrac{dS_1\, dS_2}{r}$ et son potentiel $2\sigma_1\sigma_2 dS_1 dS_2\, \mathcal{L}.r$. Le potentiel relatif à l'action réciproque des deux conducteurs est l'intégrale de cette expression, ou, en posant

$$S_1 S_2 \mathcal{L}.R_{1.2} = \iint dS_1 dS_2 \mathcal{L}.r,$$

(5) $$V = 2\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \mathcal{L}.R_{1.2} = 2 I_1 I_2 \mathcal{L}.R_{1.2}.$$

La quantité $R_{1.2}$ est la moyenne distance géométrique des surfaces S_1 et S_2 situées dans le même plan.

Enfin, si les éléments dS_1 et dS_2 appartiennent à la même surface S et qu'on écrive

$$S^2 \mathcal{L}.R = \iint dS_1 dS_2 \mathcal{L}.r,$$

la quantité R représente la moyenne distance géométrique de tous les points de la surface S.

Si $R_{a.c}$ et $R_{b.c}$ sont les moyennes distances géométriques de deux figures A et B à une troisième C et $R_{(a+b).c}$ la moyenne distance géométrique de la somme des figures A et B à la troisième, il résulte de la définition même que l'on a

$$(A+B)\mathcal{L}.R_{(a+b).c} = A\mathcal{L}.R_{a.c} + B\mathcal{L}.R_{b.c}.$$

Cette relation permet de déterminer la moyenne distance géométrique d'une figure à une autre quand on connaît les valeurs relatives aux différentes parties de la première.

Nous donnerons quelques exemples de ce problème:

1° Soit x la perpendiculaire abaissée du point P sur la direction d'une *droite* de longueur a, s la distance d'un élément ds de la droite au pied de la perpendiculaire et s_0 celle de l'extrémité la plus voisine. La moyenne distance géométrique du point à la droite est

$$a\mathcal{L}.R_p = \int ds\,\mathcal{L}.r = \int ds\,\mathcal{L}.\sqrt{x^2+s^2},$$

$$a\mathcal{L}.R_p = \left[s\mathcal{L}.\sqrt{x^2+s^2} - s + x \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{x} \right]_{s_0}^{s_0+a}.$$

Lorsque la valeur de s_0 est nulle, il reste

$$\mathfrak{L}.\mathrm{R}_p = \mathfrak{L}.\sqrt{a^2+x^2} - 1 + \frac{x}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}.$$

2° En multipliant cette expression par $a\,dx$, on aura la moyenne distance géométrique du point au rectangle $a\,dx$ et une intégration donnera la valeur relative à un *rectangle* de dimensions finies. On a ainsi, pour le sommet P d'un rectangle dont les côtés sont a et b,

$$2\mathfrak{L}.\mathrm{R}_p + 3 = 2\mathfrak{L}.\sqrt{a^2+b^2} + \frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + \frac{b}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}.$$

Si le point considéré occupe une position quelconque, on décomposera la surface en quatre rectangles ayant un sommet en ce point et on fera la somme ou la différence des termes, suivant que le point est à l'intérieur ou à l'extérieur.

3° Le champ produit par un courant uniforme, qui parcourt un cylindre dont la section est une couronne circulaire, est nul à l'intérieur et en raison inverse de la distance à l'axe pour un point extérieur.

Il résulte alors de l'équation (4) que la moyenne distance d'un point à une *circonférence* est égale à la distance au centre, si le point est extérieur, constante et égale au rayon si le point est intérieur.

4° Pour une *couronne* limitée par les rayons a_1 et a, la moyenne distance d'un point extérieur est encore égale à la distance au centre.

Si le point est intérieur, la moyenne distance est constante et la même que pour le centre, ce qui donne

$$\pi(a^2-a_1^2)\mathfrak{L}.\mathrm{R}_p = \int_{a_1}^{a} 2\pi r\,dr\,\mathfrak{L}.r = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\mathfrak{L}.r - \frac{r^2}{4}\right]_{a_1}^{a},$$

$$\mathfrak{L}.\mathrm{R}_p = \frac{a^2\mathfrak{L}.a - a_1^2\mathfrak{L}.a_1}{a^2-a_1^2} - \frac{1}{2}.$$

5° La moyenne distance géométrique d'une couronne à une figure quelconque est égale à la moyenne distance du centre à la figure, si celle-ci est extérieure.

Si la figure est comprise dans la couronne, la moyenne distance géométrique est la même que celle du centre à la figure considérée.

6° Pour un point situé dans un *cercle* de rayon a, à la distance r du centre, la moyenne distance s'obtiendra en considérant le point comme extérieur au cercle de rayon r et intérieur à la couronne complémentaire; on a alors

$$\mathcal{L}.R_p = \mathcal{L}.a - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

ce qui donne, pour le centre, $R_0 = ae^{-\frac{1}{2}} = 0{,}60663\,a$.

7° La moyenne distance géométrique de *deux cercles* extérieurs l'un à l'autre, d'après l'équation (5), est égale à la distance de leurs centres, puisque l'action des courants correspondants est en raison inverse de cette distance.

8° La moyenne distance géométrique d'un point à une droite permet de déterminer la moyenne distance géométrique de tous les points d'une *droite* de longueur a, ce qui donne

$$\mathcal{L}.R = \mathcal{L}.a - \frac{3}{2}, \qquad \text{ou} \qquad R = ae^{-\frac{3}{2}} = 0{,}22313\,a.$$

9° On a, de même, pour un *rectangle* de côtés a et b,

$$\mathcal{L}.R = \mathcal{L}.\sqrt{a^2+b^2} - \frac{1}{6}\frac{a^2}{b^2}\mathcal{L}.\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\mathcal{L}.\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$$
$$+ \frac{2}{3}\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} + \frac{2}{3}\frac{b}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{b} - \frac{25}{12},$$

et, pour un carré de côté a,

$$\mathcal{L}.R = \mathcal{L}.a + \frac{1}{3}\mathcal{L}.2 + \frac{\pi}{3} - \frac{25}{12} = \mathcal{L}.a - 0{,}80508,$$
$$R = 0{,}44705\,a.$$

10° La moyenne distance géométrique de tous les points d'une *couronne* de rayons a et a_1 se déduira de la moyenne distance géométrique d'un point à la couronne, ce qui donne

$$\mathcal{L}.R = \mathcal{L}.a - \frac{a_1^2}{(a^2-a_1^2)^2}\mathcal{L}.\frac{a}{a_1} + \frac{1}{4}\frac{3a_1^2 - a^2}{a^2 - a_1^2}.$$

Lorsque la valeur

$$\mathfrak{L}.R_p.$$

2° En multiplia moyenne distanc une intégration d dimensions finie tangle dont les

$$2\mathfrak{L}.R_p$$

Si le point décompose en ce point suivant que

3° Le ch un cylindr nul à l'int pour un p

Il résul d'un poi centre, s si le po

4° P moyen distan

Si l et la

parallèles. — Quand il ... la force électro- ... symétrie, parallèle ... pour axe des ... potentiel vecteur (432) ... de la compo- ... données x et y. ... se réduit au terme ... du courant en ... l'énergie W du milieu. ... direction commune et

... système par unité de

... il en résulte

... toute l'étendue du plan ... de zéro que pour les ... dans les sections

... compose de plu- ... courant propre du ... viennent des

... gènes, leur ... d'équi-

fig à l

Le champ produit par un élément de courant σdS, en un int P situé à la distance r, est $2\frac{\sigma dS}{r}\cdot$ Si ce point se trouve · l'axe des x, le champ est de direction opposée à l'axe y. D'après les équations (A) du n° **432**, la valeur dH du entiel vecteur produit par ce courant est

$$Y = -2\frac{\sigma dS}{r} = \frac{d(dH)}{dr}$$

à une constante près, qui disparaîtra finalement par la lition que la somme algébrique des courants soit nulle,

$$dH = -2\sigma dS\,\pounds.r.$$

ur la section S_1, le potentiel vecteur produit par l'en- ble des autres éléments $\sigma dS'_1$ du même conducteur est

$$H_1 = -2\sigma_1\int dS'_1\,\pounds.r$$

terme correspondant de l'intégrale (6) devient, en dési- it par R_1 la moyenne distance géométrique de la section idérée,

$$\int H_1\sigma_1 dS_1 = -2\sigma_1^2\int dS_1 dS'_1\,\pounds.r = -2I_1^2\,\pounds.R_1.$$

ı même point, la valeur de $H_{2.1}$ est l'intégrale des termes ifs aux éléments $\sigma_2 dS_2$ du conducteur de section S_2, ce lonne

$$H_{2.1} = -2\int\sigma_2 dS_2\,\pounds.r = -2\sigma_2\int dS_2\,\pounds.r,$$

$$H_{2.1}\sigma_1 dS_1 = -2\sigma_1\sigma_2\iint dS_1 dS_2\,\pounds.r = -2I_1I_2\,\pounds.R_{1.2}.$$

l'on fait le même raisonnement pour les autres conduc- , en remarquant qu'un terme tel que $I_1I_2\pounds.R_{1.2}$ paraît fois, pour S_1 et pour S_2, il reste finalement

$$lI^2 = -2\Sigma I_1^2\,\pounds.R_1 - 2\Sigma I_1I_2\,\pounds.R_{1.2}^2.$$

Les rapports des courants partiels au courant total étant déterminés par la loi d'Ohm, on en déduira la valeur de l.

Lorsque les sections sont circulaires, de rayons $\rho_1, \rho_2, \ldots$, la moyenne distance géométrique $R_{1.2}$ est simplement la distance $D_{1.2}$ des centres et $\mathfrak{L}.R_1 = \mathfrak{L}.\rho_1 - 0,25$; on a alors

$$(8) \qquad l I^2 = \Sigma \frac{I_1^2}{2} - 2\Sigma I_1^2 \mathfrak{L}.\rho_1 - 2\Sigma I_1 I_2 \mathfrak{L}.D_{1.2}.$$

S'il n'existe que deux conducteurs, auquel cas $I_1 = -I_2 = I$, la formule (8) se réduit à

$$(7) \qquad l = 2\mathfrak{L}.\frac{R_{1.2}^2}{R_1 R_2},$$

et pour des sections circulaires de rayons ρ et ρ', dont les centres sont à la distance D,

$$(8) \qquad l = 1 + 2\mathfrak{L}.\frac{D^2}{\rho\rho'}.$$

Cette expression ne diffère sensiblement de la formule approchée (3) que pour des conducteurs très voisins.

Si les sections sont de même diamètre et en contact, $D = \rho + \rho' = 2\rho$ et, par suite,

$$l = 1 + 2\mathfrak{L}.4 = 3,7726.$$

C'est la moindre valeur qui corresponde à un double fil, replié sur lui-même, comme ceux que l'on emploie pour construire des bobines de résistance dont on cherche à diminuer autant que possible l'induction propre.

Lorsque les fils, supposés en contact, sont couverts d'une matière isolante d'épaisseur z, le rayon du métal étant désigné comme précédemment par y, la distance des axes est $D = 2(y + z)$ et l'équation (8)' donne

$$l = 1 + 4\mathfrak{L}.\frac{2(y+z)}{y} = 3,7726 + 4\mathfrak{L}.\left(1 + \frac{z}{y}\right).$$

On diminuerait beaucoup l'induction propre d'un fil double,

même couvert d'isolant, par l'emploi de lamelles métalliques très minces appliquées l'un sur l'autre.

Quand les fils d'une bobine sont ainsi rapprochés au contact, chacun d'eux occupant la place d'un carré circonscrit dont le côté est $2(y+z)$, la moyenne distance géométrique R du carré est

$$\mathfrak{L}.R' = \mathfrak{L}.2(y+z) - 0,80508 = \mathfrak{L}.(y+z) - 0,11194.$$

Toutes choses égales, l'excès du coefficient de self-induction produit par l'emploi d'un fil couvert à section circulaire, par rapport à un fil carré nu qui occuperait le même emplacement est, par unité de longueur,

$$2[\mathfrak{L}.R' - \mathfrak{L}.R] = 2\left[\mathfrak{L}.\frac{y+z}{y} + \frac{1}{4} - 0,11194\right] = 2\left[\mathfrak{L}.\frac{y+z}{y} + 0,13806\right].$$

583. **Milieux magnétiques.** — Supposons enfin que les conducteurs aient des perméabilités magnétiques $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots$ et soient placés dans un milieu de perméabilité μ_0. Les valeurs de $H_{2.1}, \ldots\ldots$, relatives à l'action réciproque de deux conducteurs différents, doivent être multipliées par la perméabilité μ_0 du milieu dans lequel elle s'exerce.

Les sections étant supposées circulaires, le champ magnétique dans le conducteur S_1 à la distance r du centre est $2\pi\sigma_1 r$, l'induction $2\pi\mu_1\sigma_1 r$ et l'on a

$$H_1 = C - 2\pi\mu_1\sigma_1 \int_{\rho_1}^{r} r\,dr = C + \pi\mu_1\sigma_1(\rho_1^2 - r^2).$$

Le potentiel vecteur devant être continu, la constante C représente la valeur $-2\mu_0 I_1 \mathfrak{L}.\rho_1$, qui correspond à la surface, dans le milieu extérieur, ce qui donne

$$H_1 = -2\mu_0 I_1 \mathfrak{L}.\rho_1 + \mu_1 I_1\left(1 + \frac{r^2}{\rho_2^1}\right).$$

Il faut ensuite multiplier cette expression par $\sigma_1 dS_1$ et l'intégrer pour toute la surface S_1 ou, ce qui revient au même, multiplier par $\sigma_1 S_1 = I_1$ la valeur moyenne de H_1 relative à cette surface.

Comme la valeur moyenne de r^2 est $\frac{\rho_1^2}{2}$, il en résulte

$$\int H_1 \sigma_1 dS_1 = -2\mu_0 I_1^2 \mathfrak{L}.\rho_1 - \frac{\mu_1 I_1^2}{2},$$

$$(9) \quad l I^2 = \frac{\mu_1 I_1^2 + \mu_2 I_2^2}{2} - 2\mu_0 \Sigma I_1^2 \mathfrak{L}.\rho_1 - 2\mu_0 \Sigma I_1 I_2 \mathfrak{L}.D_{1.2}^2.$$

Pour deux conducteurs de perméabilités μ et μ', il reste

$$(9)' \qquad l = \frac{\mu + \mu'}{2} + 2\mu_0 \mathfrak{L}.\frac{D^2}{\rho\rho'}.$$

Toutefois, cette expression de Maxwell ne paraît pas suffisante lorsque la perméabilité est très grande, comme pour le cas du fer, parce que les conducteurs s'aimantent par le passage du courant et qu'alors les lignes de force ne sont plus tangentes à leur contour en tous les points.

Si l'on fait $\mu' = \mu_0 = 1$, c'est-à-dire si l'un des conducteurs est seul magnétique, on aurait, d'après M. Potier (¹),

$$l = \frac{1+\mu}{2} + 2\mathfrak{L}.\frac{D^2}{\rho\rho'} - 2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\mathfrak{L}.\frac{D}{d},$$

expression dans laquelle d désigne la distance du centre O de la section du premier conducteur au point conjugué du centre O' de la section du second par rapport à la circonférence de rayon ρ.

La correction que l'on devrait ainsi apporter à la formule (9)' est très notable, car on a, en tenant compte de la relation de conjugaison

$$d D = \rho^2 \quad \text{ou} \quad \frac{D}{d} = \frac{D^2}{\rho^2},$$

$$l = \frac{1+\mu}{2} + 2\mathfrak{L}.\frac{\rho}{\rho'} + \frac{1}{\mu}\mathfrak{L}.\frac{D^2}{\rho^2}.$$

Dans le cas de rayons égaux, le dernier terme est 2μ fois moindre que le terme correspondant de (9)'.

(¹) A. POTIER, *Traduction franç.* de MAXWELL, t. II, p. 372; 1889.

584. Induction mutuelle de deux cadres circulaires. — Nous supposerons que le milieu n'est pas magnétique et nous négligerons d'abord l'épaisseur des fils. D'une manière générale, si l'on considère deux circuits plans de surfaces S et S′ et que X_m soit la valeur moyenne de la composante normale à la surface S′ du champ produit par le circuit S, pour l'unité de courant, le coefficient d'induction mutuelle est

$$M = X_m S'.$$

Les formules établies dans le chapitre précédent pour le champ magnétique d'un courant circulaire (566) permettront ainsi de traiter le cas de cadres circulaires.

Considérons deux circuits circulaires et de même axe, de rayon a et a' et à la distance x.

D'après les équations (23) et la remarque du n° 573, on a

$$X_m = 2\pi\left[u_2 - \frac{a'^2}{2^2}\frac{u_4}{2} + \frac{a'^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{u_6}{3} - \ldots\ldots\right],$$

$$M = 2\pi S'\left[u_2 - \frac{a'^2}{2^2}\frac{u_4}{2} + \frac{a'^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{u_6}{3} - \ldots\ldots\right],$$

ou, en ne prenant que les termes en a'^4,

$$(10)\quad M = \frac{2SS'}{u^3}\left[1 - \frac{3}{2^3}\frac{4x^2-a^2}{u^2}\cdot\frac{a'^2}{u^2} + \frac{3.5}{(2.4)^2}\frac{a^4-12a^2x^2+8x^4}{u^4}\cdot\frac{a'^4}{u^4}\right].$$

De même, les différentes valeurs obtenues pour les composantes du champ des bobines donneraient directement l'induction mutuelle entre ces bobines et un cadre circulaire.

585. Deux bobines de même axe. — Connaissant le flux de force $\pi y^2 X_m$ d'une bobine sur un cercle coaxial de rayon y, on en déduira l'induction mutuelle de deux bobines.

Si l'on distingue par un accent les données relatives à la seconde bobine, le flux total émané de la première et qui traverse les différentes spires de la seconde, s'obtiendra en multipliant l'expression précédente par $n'_1\, n'_2\, dx\, dy$ et intégrant ensuite entre $a'-c'$ et $a'+c'$ pour y, $x-b'$ et $x+b'$, la

valeur finale de x désignant la distance des centres des deux bobines. On aura ainsi

$$M = \pi n'_1 n'_2 \iint y^2 X_m \, dx \, dy.$$

Supposons, par exemple, que les dimensions des gorges et la distance x soient telles que l'on puisse négliger les quatrièmes puissances des rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c'}{a'}$, $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{x}{a}$.

La valeur de X_m se déduira de l'équation (34) du n° 571 et les intégrations ne présentent aucune difficulté.

On trouve alors, en appelant N et N' le nombre de spires des deux bobines, S et S' les surfaces relatives aux rayons moyens, L et L' les longueurs des fils, et posant

$$M_0 = 2\frac{NN'SS'}{a^3} = 2\pi^2 NN' \frac{a'^2}{a} = \pi \frac{N^2}{N'} \cdot \frac{L'^2}{L},$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{M}{M_0} = 1 &+ \frac{1}{3}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right) - \frac{b^2 + b'^2 + 3x^2}{2a^2} \\ &+ \frac{3}{2.2^2}\frac{a'^2}{a^2}\left[1 + \frac{3.4}{2.3}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right) - \frac{3.5}{2.3}\frac{b^2 + b'^2}{a^2}\right] \\ &+ \frac{3^2 5}{3(2.4)^2}\frac{a'^4}{a^4}\left[1 + \frac{5.6}{2.3}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right) - \frac{5.7}{2.3}\frac{b^2 + b'^2}{a^2}\right] \\ &+ \frac{3^2 5^2 7}{4(2.4.6)^2}\frac{a'^6}{a^6}\left[1 + \frac{7.8}{2.3}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right) - \frac{7.9}{2.3}\cdot\frac{b^2 + b'^2}{a^2}\right] + \ldots \end{aligned}\right.$$

La série est toujours convergente, puisque $a' < a$, et les premiers termes peuvent s'écrire, en posant

$$\alpha = \frac{a'^2}{a^2}, \quad \beta = \frac{b^2 + b'^2}{6a^2}, \quad \gamma = \frac{1}{3}\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right),$$

$$(11)'\quad \left\{\begin{aligned} \frac{M}{M_0} = 1 &+ \gamma - 3\beta - \frac{3x^2}{2a^2} \\ &+ 0{,}37500\,\alpha[1 + 6\gamma - 15\beta] \\ &+ 0{,}23437\,\alpha^2[1 + 15\gamma - 35\beta] \\ &+ 0{,}17090\,\alpha^3[1 + 28\gamma - 63\beta] \\ &+ 0{,}13458\,\alpha^4[1 + 45\gamma - 99\beta] \\ &+ 0{,}11103\,\alpha^5[1 + 66\gamma - 143\beta] \\ &+ 0{,}09451\,\alpha^6[1 + 91\gamma - 195\beta]. \end{aligned}\right.$$

Un calcul analogue appliqué aux expressions (35) ou (37) du n° **571** donnerait le coefficient d'induction mutuelle de deux bobines coaxiales très éloignées ou celui de deux bobines concentriques.

On peut considérer le problème autrement.

Le coefficient d'induction mutuelle de deux bobines simples C et C' (fig. 147) extérieures l'une à l'autre est égal et de

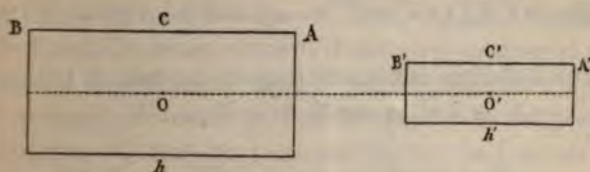


Fig. 147.

signe contraire (**327**) à l'énergie relative de deux groupes de couches magnétiques A et B, A' et B' dont les densités sont respectivement $+n$ et $-n$, $+n'$ et $-n'$.

Soient h et h' les longueurs des deux bobines, x la distance des bases voisines A et B'. Si on représente par $F(x)$ le potentiel moyen de la couche A, pour l'unité de densité, sur la sur-

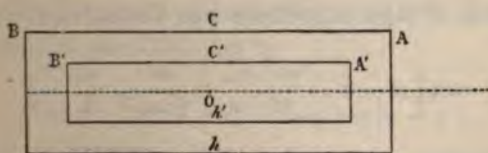


Fig. 148.

face B', le potentiel moyen de la bobine C sur cette surface est $n[F(x) - F(x+h)]$, et l'énergie potentielle de la couche B' par rapport à la bobine C est $-nn'S'[F(x) - F(x+h)]$.

Comme l''énergie potentielle de la couche A' par rapport à la bobine C est aussi $+nn'S'[F(x+h') - F(x+h'+h)]$, il en résulte, pour l'induction mutuelle,

$$(12) \quad M = nn'S'[F(x) - F(x+h) - F(x+h') + F(x+h+h')].$$

Si les bobines sont concentriques (fig. 148), la seconde C ayant un plus petit rayon et une longueur moindre, nous

désignerons par x la demi-différence des longueurs ou la distance des bases voisines B et B'.

Le potentiel moyen de la bobine C sur la base B' peut encore être exprimé par $-4\pi n x - n\mathrm{F}(x) + n\mathrm{F}(h-x)$, et l'énergie potentielle de la base B' est $nn'\mathrm{S}'[4\pi x + \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(h-x)]$. Celle de A' étant de même $-nn'\mathrm{S}'[4\pi(x+h') + \mathrm{F}(x+h') - \mathrm{F}(x)]$, il en résulte

$$(13)\quad M = nn'\mathrm{S}'[4\pi h' + \mathrm{F}(h-x) + \mathrm{F}(h'+x) - 2\mathrm{F}(x)].$$

Pour des bobines concentriques et de même longueur, on aurait $x=0$, $h'=h$ et, avec $\mathrm{N}'=n'h'=n'h$,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} M &= 4\pi n\mathrm{N}'\mathrm{S}' - 2nn'\mathrm{S}'[\mathrm{F}(0) - \mathrm{F}(h)] \\ &= 2n\mathrm{N}'\mathrm{S}'\left\{2\pi + \frac{1}{h}\Big[\mathrm{F}(h) - \mathrm{F}(0)\Big]\right\}. \end{aligned}\right.$$

La valeur de F (o) se déduirait de l'équation (19)' du n° 565 par la règle habituelle, ce qui donne

$$\mathrm{F}(0) = 2\pi a\left\{1 - \frac{1}{4}\frac{a'^2}{2a^2} - \ldots\ldots - \left[\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}\right]^2 \frac{2n-1}{n+1}\left(\frac{a'}{a}\right)^{2n}\right\}.$$

La valeur de F (h) s'exprimera par l'équation (19)

$$\mathrm{F}(x) = 2\pi\left[u - x - \frac{a'^2}{2^2}\frac{u_2}{2} + \frac{a'^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{u_4}{3} - \ldots\ldots\right].$$

Si l'on développe la quantité $u=\sqrt{a^2+x^2}$ en fonction des puissances croissantes du rapport $\frac{a}{x}$ (571, 2°), et qu'on fasse ensuite $x = h$ après avoir effectué les calculs, il reste

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(h) = 2\pi a\frac{a}{h}\Bigg\{ & \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4}\frac{a^2}{h^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{a^4}{h^4} - \ldots \\ & - \frac{1}{2.2^2}\frac{a'^2}{h^2}\left[\frac{2}{2} - \frac{3.4}{2.4}\frac{a^2}{h^2} + \frac{3.5.6}{2.4.6}\cdot\frac{a^4}{h^4} - \ldots\right], \\ & + \frac{1}{3(2.4)^2}\frac{a'^4}{h^4}\left[\frac{2.3.4}{2} - \frac{3.4.5.6}{2.4}\cdot\frac{a^2}{h^2} + \ldots\right], \\ & - \frac{1}{4(2.4.6)^2}\frac{a'^6}{h^6}\left[\frac{2.3.4.5.6}{2} - \frac{3.4.5.6.7.8}{2.4}\frac{a^2}{h^2} + \ldots\right] + \ldots\Bigg\}. \end{aligned}$$

Lorsque les rapports $\frac{a}{h}$ et $\frac{a'^2}{a^2}$ sont de même ordre, la formule réduite aux premiers termes devient

$$(15) \qquad M = 4\pi nn' S' \left[1 - \frac{a}{h} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{a'^2}{a^2} - \frac{a}{2h} \right) \right].$$

586. Emploi des intégrales elliptiques. — Le potentiel d'un courant circulaire en dehors de l'axe est une fonction elliptique des coordonnées, puisqu'il est proportionnel à l'angle apparent de la surface ; toutes les expressions employées jusqu'à présent ne sont en réalité que le développement de ces fonctions elliptiques, auxquelles on doit avoir recours lorsque les séries ne sont pas assez convergentes.

Le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits quelconques s et s' a pour expression générale (**328**)

$$M = \iint \frac{ds\, ds' \cos\varepsilon}{r}.$$

Pour deux cadres circulaires de même axe à la distance x, dont les rayons sont a et a', si l'on désigne par φ et φ' les angles que les éléments ds et ds' font respectivement avec un plan fixe passant par l'axe, on a

$$r^2 = x^2 + a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(\varphi - \varphi'),$$
$$\varepsilon = \varphi - \varphi', \qquad ds = a\, d\varphi, \qquad ds' = a'\, d\varphi'.$$

La formule de Neumann devient alors

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{aa' \cos(\varphi - \varphi')\, d\varphi\, d\varphi'}{\sqrt{a^2 + a'^2 + x^2 - 2aa'\cos(\varphi - \varphi')}}.$$

Cette intégrale est donnée par l'expression

$$(16) \qquad M = 4\pi \sqrt{aa'} \left[\left(k - \frac{2}{k} \right) F + \frac{2}{k} E \right],$$

dans laquelle F et E désignent des intégrales elliptiques com-

désignerons par x la demi-différence des longueu
tance des bases voisines B et B'.

Le potentiel moyen de la bobine C sur la base B
être exprimé par $-4\pi n x - n F(x) + n F(h - x)$,
potentielle de la base B' est $nn'S'[4\pi x + F(x)$
Celle de A' étant de même $-nn'S'[4\pi(x+h') + F(x$
il en résulte

$$(13) \quad M = nn'S'[4\pi h' + F(h-x) + F(h'+x) -$$

Pour des bobines concentriques et de même
aurait $x = 0$, $h' = h$ et, avec $N' = n'h' = n'h$,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= 4\pi n N'S' - 2nn'S'[F(0) - F(\\ &= 2nN'S' \left\{ 2\pi + \frac{1}{h}\left[F(h) - F(\right.\right. \end{aligned} \right.$$

La valeur de F (o) se déduirait de l'équatio
par la règle habituelle, ce qui donne

$$F(0) = 2\pi a \left\{ 1 - \frac{1}{4}\frac{a'^2}{2a^2} - \ldots - \left[\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}\right.\right.$$

La valeur de F (h) s'exprimera par l'équa

$$F(x) = 2\pi\left[u - x - \frac{a'^2}{2^2}\frac{u_2}{2} + \frac{a'^4}{(2.4)^2}\right.$$

Si l'on développe la quantité $u = \sqrt{a^2 -}$
puissances croissantes du rapport $\frac{a}{x}$ (571.
ensuite $x = h$ après avoir effectué les

$$\begin{aligned} F(h) = 2\pi a \frac{a}{h} & \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4}\frac{a^2}{h^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{a^4}{h^4} - \right. \\ & - \frac{1}{2.2^2}\frac{a'^2}{h^2}\left[\frac{2}{2} - \frac{3.4}{2.4}\frac{a^2}{h^2} + \frac{3.5.6}{2.4.6}\cdot\frac{a^4}{h^4}\right. \\ & + \frac{1}{3(2.4)^2}\frac{a'^4}{h^4}\left[\frac{2.3.4}{2} - \frac{3.4.5.6}{2.4}\cdot\frac{a^2}{h^2} -\right. \\ & - \frac{1}{4(2.4.6)^2}\frac{a'^6}{h^6}\left[\frac{2.3.4.5.6}{2} - \frac{3.4}{}\right. \end{aligned}$$

Table des valeurs de $\log \frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.

γ	$\text{Log} \frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.	γ	$\text{Log} \frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.	γ	$\text{Log} \frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}}$.
75° 0′	$\bar{1}$.9185141	80° 0′	0.0741816	85° 0′	0.2654152
6	$\bar{1}$.9214613	6	0.0775316	6	0.2700156
12	$\bar{1}$.9244135	12	0.0808944	12	0.2746655
18	$\bar{1}$.9273707	18	0.0842702	18	0.2793670
24	$\bar{1}$.9303330	24	0.0876592	24	0.2841221
30	$\bar{1}$.9333005	30	0.0910619	30	0.2889329
36	$\bar{1}$.9362733	36	0.0944784	36	0.2938018
42	$\bar{1}$.9392515	42	0.0979091	42	0.2987312
48	$\bar{1}$.9422352	48	0.1013542	48	0.3037238
54	$\bar{1}$.9452246	54	0.1048142	54	0.3087823
76° 0′	$\bar{1}$.9482196	81° 0′	0.1082893	86° 0′	0.3139097
6	$\bar{1}$.9512205	6	0.1117799	6	0.3191092
12	$\bar{1}$.9542272	12	0.1152863	12	0.3243843
18	$\bar{1}$.9572400	18	0.1188089	18	0.3297387
24	$\bar{1}$.9602590	24	0.1223481	24	0.3351762
30	$\bar{1}$.9632841	30	0.1259043	30	0.3407012
36	$\bar{1}$.9663157	36	0.1294778	36	0.3463184
42	$\bar{1}$.9693537	42	0.1330691	42	0.3520327
48	$\bar{1}$.9723983	48	0.1366786	48	0.3578495
54	$\bar{1}$.9754497	54	0.1403067	54	0.3637749
77° 0′	$\bar{1}$.9785079	82° 0′	0.1439539	87° 0′	0.3698153
6	$\bar{1}$.9815731	6	0.1476207	6	0.3759777
12	$\bar{1}$.9846454	12	0.1513075	12	0.3822700
18	$\bar{1}$.9877249	18	0.1550149	18	0.3887006
24	$\bar{1}$.9908118	24	0.1587434	24	0.3952792
30	$\bar{1}$.9939062	30	0.1624935	30	0.4020162
36	$\bar{1}$.9970082	36	0.1662658	36	0.4089234
42	0.0001181	42	0.1700609	42	0.4160138
48	0.0032359	48	0.1738794	48	0.4233022
54	0.0063618	54	0.1777219	54	0.4308053
78° 0′	0.0094959	83° 0′	0.1815890	88° 0′	0.4385420
6	0.0126385	6	0.1854815	6	0.4465341
12	0.0157896	12	0.1894001	12	0.4548064
18	0.0189494	18	0.1933455	18	0.4633880
24	0.0221181	24	0.1973184	24	0.4723127
30	0.0252959	30	0.2013197	30	0.4816206
36	0.0284830	36	0.2053502	36	0.4913595
42	0.0316794	42	0.2094108	42	0.5015870
48	0.0348855	48	0.2135026	48	0.5123738
54	0.0381014	54	0.2176259	54	0.5238079
79° 0′	0.0413273	84° 0′	0.2217823	89° 0′	0.5360007
6	0.0445633	6	0.2259728	6	0.5490969
12	0.0478098	12	0.2301983	12	0.5632886
18	0.0510668	18	0.2344600	18	0.5788406
24	0.0543347	24	0.2387591	24	0.5961320
30	0.0576136	30	0.2430970	30	0.6157370
36	0.0609037	36	0.2474748	36	0.6385907
42	0.0642054	42	0.2518940	42	0.6663883
48	0.0675187	48	0.2563561	48	0.7027765
54	0.0708441	54	0.2608626	54	0.7586941

On passera du cas de deux cercles à celui d'une bobine et d'un cercle, ou de deux bobines ayant même axe, par la méthode du n° 570. On aura alors, en appelant M_0 le coefficient relatif aux cercles de rayons moyens,

$$M = M_0 + \frac{1}{6}\left\{ \frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2}(c^2 + c'^2) + \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2}(b^2 + b'^2) \right\} + \ldots.$$

Si M_0 est exprimé par la formule (16), on trouve, en tenant compte des relations relatives aux intégrales complètes

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{E}{k(1 - k^2)} - \frac{F}{k}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{k}(E - F),$$

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2} = -\frac{\pi}{\sqrt{aa'}}\left\{ \frac{E}{2\sqrt{aa'}(1-k^2)}\left[2\sqrt{aa'}\,k + \frac{4k^3x^2}{8\sqrt{aa'}(1-k^2)}(1 - 3k^2 + 2k^3)\right] - F\left(k + \frac{k^3x^2}{4aa'}\right) \right\},$$

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} = \frac{\pi k}{\sqrt{aa'}(1-k^2)}\left\{ F\left[2(1-k^2) - \frac{k^2x^2}{4aa'}(2-k^2)\right] - E\left[2 - k^2 - k^2x^2\frac{1 - k^2 + k^4}{2aa'(1-k^2)}\right] \right\}.$$

Le calcul se fera plus simplement, au moyen des tables, par la méthode suivante de lord Rayleigh [1].

Si on désigne par $f(a, a', x)$ le coefficient d'induction mutuelle M_0 des deux cercles moyens, par N et N' les nombres de spires des bobines, on a

$$(16)' \quad M = \frac{1}{6}NN'\left\{ \begin{array}{l} f(a+c, a', x) + f(a-c, a', x) \\ + f(a, a'+c', x) + f(a, a'-c', x) \\ + f(a, a', x+b) + f(a, a', x-b) \\ + f(a, a', x+b') + f(a, a', x-b') \\ - 2f(a, a', x) \end{array} \right\}.$$

Il reste alors à calculer les neuf valeurs de γ qui correspondent aux neuf valeurs de la fonction f.

(1) MAXWELL, *Electricity and Magnetism.*, 2e édition, t. II, p. 320.

On obtient ainsi, en utilisant pour l'intégration par rapp
à φ la relation suivante établie par Legendre,

$$\int_0^{2\pi} X_n(\lambda')\,d\varphi = 2\pi X_n(\lambda) X_n(\theta),$$

$$M = -4\pi^2 u' \sin^2\alpha' \sum \left(\frac{u'}{u}\right)^n X_n'(\alpha') X_n(\theta) \int_1^{\mu} X_n(\lambda)\,d\mu,$$

$$(19)\quad M = 4\pi^2 u' \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \sum \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{u'}{u}\right)^n X_n'(\alpha') X_n'(\alpha) X_n$$

Comparant avec l'équation (17), on voit que le coeffici
d'induction de deux courants circulaires, dont les axes
coupent sous l'angle θ, s'obtient par la valeur relative a
courants parallèles, en multipliant respectivement chacun d
termes par le polynome $X_n(\theta)$ de même ordre que celui do
ce terme renferme déjà les dérivées.

588. Cadres circulaires voisins. — Lorsque deux cadr
circulaires de même axe et de rayons très peu différents so
situés dans des plans voisins, on peut utiliser la relati
établie précédemment (**407**) pour les cadres concentrique
à l'aide du théorème suivant de Maxwell :

Dans un cercle défini par sa distance x à un point fixe a l'axe et son rayon a, le flux de force φ émanant d'un systèm quelconque d'aimants ou de courants satisfait à la relation

$$(20)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial a} = 0.$$

En effet, si V est le potentiel du système, le flux de force $d\varphi$
sur la surface d'une couronne de rayon r et de largeur dr a
pour expression

$$d\varphi = -\int \frac{\partial V}{\partial x} r\,dr\,d\theta = -r\,dr \int \frac{\partial V}{\partial x}\,d\theta,$$

l'intégrale relative à θ devant être étendue à la circonfé
rence 2π. On a donc sur le contour

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = -a\int \frac{\partial V}{\partial x}\,d\theta,\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2} = -\int \frac{\partial V}{\partial x}\,d\theta - a\int \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial a}\,d\theta.$$

Pour un accroissement dx de la distance, la variation correspondante est égale et de signe contraire au flux de force coupé par la surface latérale d'un cylindre de rayon a et de hauteur dx, ce qui donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = + a\, dx \int \frac{\partial V}{\partial a} d\theta.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \int \frac{\partial V}{\partial a} d\theta, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a \int \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial x} d\theta;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \int \frac{\partial V}{\partial x} d\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial a}.$$

On retrouve ainsi l'équation (20). Comme cette relation est générale, on peut l'appliquer au coefficient d'induction mutuelle d'un système quelconque de circuits par rapport à la circonférence de rayon a.

Pour deux cadres circulaires concentriques dont les rayons a et $a+c$ sont très grands par rapport à la distance c qui les sépare, on a trouvé

$$(21) \qquad M = 4\pi a \left[\mathfrak{L}.\frac{8a}{c} - 2 \right].$$

Supposons maintenant que les plans des deux cercles soient éloignés d'une distance x très petite, leurs rayons étant a et $a+y$. Le flux de force émis par le second courant dans la surface limitée au contour du premier n'a plus la même valeur, mais on en aura une expression très approchée en remplaçant la plus courte distance c des deux courbes par sa nouvelle valeur $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On pourra donc représenter le coefficient M par une expression de la forme

$$(22) \qquad M = 4\pi \left[A\mathfrak{L}.\frac{8a}{r} + B \right],$$

les coefficients A et B étant des fonctions de x et y, dont les valeurs approchées sont respectivement a et $-2a$, et qu'il s'agit maintenant de déterminer.

...servent ...par ...en x...

...uand on ...par ...uation

...uations ...ains

...reste

...ainsi condu... ...aroulen... ...de la go...

...la gorge. ...es de cor... ...les coura...

relatifs à un élément $dx\,dy$ de la section, situé à la distance r du point P, est $4\pi a n_1 n_2 dx\,dy\left(\mathfrak{L}.\frac{8a}{r}-2\right)$.

Le flux total relatif à la spire considérée est l'intégrale de cette expression étendue à toute la section ω, c'est-à-dire

$$\varphi = 4\pi a n_1 n_2 \iint\left(\mathfrak{L}.\frac{8a}{r}-2\right)dx\,dy.$$

Pour l'ensemble des spires correspondant à l'élément de surface $dx'dy'$ au point P, le flux a pour valeur $\varphi n_1 n_2 dx'dy'$. Enfin le flux total relatif à la bobine entière, ou le coefficient de self-induction L, est l'intégrale de cette expression étendue à la section ω.

En supposant d'abord que la quantité a est une constante, égale au rayon moyen, on peut écrire

$$(24)\quad \begin{cases} L = 4\pi a n_1^2 n_2^2 \iiiint\left(\mathfrak{L}.\frac{8a}{r}-2\right)dx\,dy\,dx'\,dy' \\ \quad = 4\pi a n_1^2 n_2^2 \omega^2(\mathfrak{L}.8a-2) - 4\pi a n_1^2 n_2^2 \iiiint \mathfrak{L}.r\,dx\,dy\,dx'\,dy'. \end{cases}$$

Comme le produit $n_1 n_2 \omega$ représente le nombre total N des spires, il en résulte, en posant

$$\omega^2 \mathfrak{L}.\mathrm{R} = \iiiint \mathfrak{L}.r\,dx\,dy\,dx'\,dy' = \iint \mathfrak{L}.r\,d\mathrm{S}\,d\mathrm{S}',$$

$$(25)\qquad L = 4\pi a \mathrm{N}^2\left(\mathfrak{L}.\frac{8a}{\mathrm{R}}-2\right).$$

Le coefficient de self-induction de la bobine est donc égal au produit par N^2 du coefficient d'induction mutuelle de deux cadres circulaires concentriques, de rayon a et $a+\mathrm{R}$, ou de cadres égaux de rayon a, ayant même axe et situés à la distance R, laquelle est la moyenne distance géométrique de la section de gorge ω.

Si la gorge est rectangulaire, de dimensions $2b$ et $2c$, la

quantité entre parenthèses, que nous représenterons par
pour valeur (581)

$$\lambda = \mathfrak{L}.\frac{4a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{6}\left[\frac{c^2}{b^2}\mathfrak{L}.\sqrt{1+\frac{b^2}{c^2}} + \frac{b^2}{c^2}\mathfrak{L}.\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}}\right]$$

$$-\frac{2}{3}\left[\frac{c}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c} + \frac{b}{c}\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{b}\right] + \frac{1}{12},$$

$$\lambda = \mathfrak{L}.\frac{4a}{\sqrt{b^2+c^2}} - \lambda_1.$$

Le terme complémentaire λ_1 ne dépend que du rapport
des longueurs c et b; il ne change pas quand on permute c
deux dimensions et peut s'écrire

$$12\lambda_1 + 1 = 8\left(m \operatorname{arctg}\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\operatorname{arctg} m\right) - m^2\mathfrak{L}.\left(1+\frac{1}{m^2}\right) - \frac{\mathfrak{L}.(1+m}{m^2}$$

Il suffit de connaître les valeurs de λ_1 correspondant à d
valeurs de m plus petites que l'unité ; on abrégera beauco
les calculs au moyen de la table suivante :

m	λ_1	m	λ_1
0	0,50000	0,50	0,79600
0,05	0,54899	0,55	0,80815
0,10	0,59243	0,60	0,81823
0,15	0,63102	0,65	0,82648
0,20	0,66520	0,70	0,83311
0,25	0,69532	0,75	0,83831
0,30	0,72172	0,80	0,84225
0,35	0,74469	0,85	0,84509
0,40	0,76454	0,90	0,84697
0,45	0,78155	0,95	0,84801
0,50	0,79600	1	0,84834

Si l'on prend comme point de départ la formule plu

approchée (22), le coefficient de self-induction de la bobine rectangulaire peut se mettre sous la forme

$$L = 4\pi a N^2 \left[\lambda + \frac{\mu}{a^2} + \dots\right],$$

avec les valeurs suivantes pour le premier terme de correction :

$$\mu = \frac{3b^2 + c^2}{24} \mathcal{L}. \frac{4a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b^2}{4}\mu_1,$$

$$\mu_1 = \frac{23}{40} + \frac{221}{360}m^2 - \frac{m^4}{30}\mathcal{L}.\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} + \frac{1}{6m^2}\mathcal{L}.\sqrt{1+m^2} - \frac{8}{15m}\operatorname{arctg} m.$$

La valeur de μ_1 ne dépend encore que du rapport m et pourra se déduire d'une table spéciale :

m	μ_1	m	μ_1
0	0,1250	0,50	0,3066
0,05	0,1269	0,55	0,3437
0,10	0,1325	0,60	0,3839
0,15	0,1418	0,65	0,4274
0,20	0,1548	0,70	0,4739
0,25	0,1714	0,75	0,5234
0,30	0,1916	0,80	0,5760
0,35	0,2152	0,85	0,6317
0,40	0,2423	0,90	0,6902
0,45	0,2728	0,95	0,7518
0,50	0,3066	1	0,8162

On aura finalement [1]

$$(24)' \quad L = 4\pi a N^2 \left[\left(1 + \frac{3b^2 + c^2}{24a^2}\right)\mathcal{L}. \frac{4a}{\sqrt{b^2+c^2}} - \lambda_1 + \frac{b^2}{4a^2}\mu_1\right].$$

590. Bobine de self-induction maximum. — On peut alors se proposer de résoudre le problème suivant : le fil étant donné, et la section de la gorge devant rester semblable à

[1] STEFAN, *Sitzb. der K. Ak. d. W.* Wien. Bd LXXXVIII, p. 1201, 1883.

En second lieu, l'action éprouvée par un fil, de la part de ceux qui l'entourent, est plus petite pour des fils cylindriques en contact que pour des fils carrés juxtaposés occupant le même volume ; en réalité, il suffit de tenir compte des fils les plus voisins.

Considérons, par exemple, le fil qui occupe le centre d'un carré de neuf fils, l'action de tous les autres étant négligée comme insensible. Pour deux sections circulaires, la moyenne distance géométrique est celle des centres ; pour deux carrés voisins parallèles, le rapport de la moyenne distance géométrique à celle des centres est 0,99401 ou 1,0011 suivant qu'ils se touchent par un côté ou un sommet. Pour quatre des fils considérés plus haut, la moyenne distance géométrique doit donc être divisée par 0,99401 et pour les quatre autres par 1,0011 ; pour les huit, pris ensemble, par la moyenne 0,9975 des deux facteurs, dont le logarithme népérien est $-0,002463$. Le produit de ce nombre par 8 étant 0,01971, la correction pour l'unité de longueur devient finalement

$$2\left[\mathcal{L}.\frac{y+z}{y}+0,13806-0,01971\right]=2\left[\mathcal{L}.\frac{y+z}{z}+0,11835\right].$$

Si M désigne le coefficient d'induction mutuelle de deux spires dont le rayon est égal au rayon moyen et la distance égale à la moyenne géométrique des distances de tous les points de la section, L la longueur total du fil et N le nombre des spires, le coefficient de self-induction sera finalement

$$(26) \qquad L=\mathrm{N}^2M+2\mathrm{L}\left[\mathcal{L}.\frac{y+z}{y}+0,11835\right].$$

592. Actions réciproques. — Lorsque deux circuits A et A′ parcourus par l'unité de courant éprouvent un déplacement relatif infiniment petit, le travail des actions électrodynamiques (**327**) est égal à la variation correspondante dM de leur coefficient d'induction mutuelle. L'un des circuits étant supposé fixe, si l'autre se déplace parallèlement à l'axe des x, et que X soit la composante suivant cet axe de l'action réci-

proque, supposée répulsive, on a, par la considération du travail correspondant,

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x}\,dx = X\,dx, \qquad X = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

De même, si C représente le moment du couple de l'action réciproque par rapport à un axe, le travail relatif à la rotation $d\theta$ de l'un des circuits autour de cet axe est

$$dM = \frac{\partial M}{\partial \theta}\,d\theta = C\,d\theta, \qquad C = \frac{\partial M}{\partial \theta}.$$

Lorsque les deux circuits sont des bobines de révolution autour du même axe, que nous prendrons pour axe des x, l'action réciproque est parallèle à l'axe, par raison de symétrie; cette action étant nulle pour une position convenable des deux circuits (la position concentrique, par exemple, pour deux bobines cylindriques), et aussi nulle à une très grande distance, elle passe par une valeur maximum qui correspond à la condition $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$ ou $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0$.

593. Deux courants circulaires. — Pour deux courants circulaires de rayons a et a' de même axe et de même sens, situés à la distance x, la valeur de M peut être exprimée en général au moyen des fonctions elliptiques (**586**). En tenant compte des valeurs de $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial k}$ et $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial k}$, on trouve que l'action réciproque, considérée comme attractive, est

$$(27)\quad X = \frac{\pi k x}{\sqrt{aa'}}\left(2\mathrm{F} - \frac{2-k^2}{1-k^2}\mathrm{E}\right) = \frac{\pi x}{\sqrt{aa'}}\sin\gamma\left[2\mathrm{F} - \left(1 + \frac{1}{\cos\gamma}\right)\mathrm{E}\right].$$

Le second membre de cette équation se déterminerait encore par les tables de Legendre. Pour rendre les applications plus faciles, L. Rayleigh (¹) a calculé la table suivante pour des valeurs de l'angle γ variant de 55° à 70°.

(¹) L. Rayleigh, *Ph. Tr. L. R. S.*, t. CLXXV, Pt II, p. 425; 1885.

Table de Log. $\sin\gamma\left[2F-(1+\sec^2\gamma)E\right]$.

1̄,9898899	60° 0′	0,1786408	65° 0′	0,4433405	
9250674	6	1838431	6	4487720	
9302440	12	1890478	12	4542107	
9354198	18	1942546	18	4596565	
9405945	24	1994636	24	4651097	
9457677	30	2046748	30	4705707	
9509400	36	2098887	36	4760395	
9561123	42	2151058	42	4815165	
9612837	48	2203260	48	4870015	
9664536	54	2255491	54	4924944	
9716227	61° 0′	2307753	66° 0′	4979956	
9767918	6	2360045	6	5035052	
9819605	12	2412367	12	5090234	
9871288	18	2464720	18	5145504	
9922966	24	2517106	24	5200861	
9974637	30	2569525	30	5256304	
0,0026304	36	2621981	36	5311838	
0077970	42	2674478	42	5367469	
0129635	48	2727014	48	5423195	
0181298	54	2779585	54	5479017	
0232962	62° 0′	2832194	67° 0′	5534935	
0284628	6	2884843	6	5590948	
0336297	12	2937533	12	5647060	
0387966	18	2990263	18	5703278	
0439638	24	3043035	24	5759599	
0491317	30	3095854	30	5816022	
0542999	36	3148717	36	5872550	
0594684	42	3201621	42	5929188	
0646364	48	3254571	48	5985936	
0698062	54	3307575	54	6042795	
0749769	63° 0′	3360628	68° 0′	6099767	
0801480	6	3413729	6	6156851	
0853198	12	3466879	12	6214051	
0904926	18	3520081	18	6271370	
0956665	24	3573335	24	6328810	
1008414	30	3626642	30	6386371	
1060175	36	3680004	36	6444054	
1111950	42	3733422	42	6501859	
1163737	48	3786896	48	6559791	
1215535	54	3840425	54	6617852	
1267346	64° 0′	3894014	69° 0′	6676045	
1319170	6	3947666	6	6734371	
1371009	12	4001380	12	6792833	
1422865	18	4055155	18	6851433	
1474739	24	4108993	24	6910170	
1526636	30	4162893	30	6969043	
1578552	36	4216858	36	7028058	
1630486	42	4270894	42	7087220	
1682439	48	4324998	48	7146529	
1734412	54	4379166	54	7205985	

on remplace les cercles par deux bobines et qu'on repré-
par $f(a, a', r)$ l'attraction relative aux cercles moyens,

oque, supposée répulsive, on a, par la consic
avail correspondant,

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx = X dx, \qquad X = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

De même, si C représente le moment du couple réciproque par rapport à un axe, le travail relatil tion $d\theta$ de l'un des circuits autour de cet axe est

$$dM = \frac{\partial M}{\partial \theta} d\theta = C d\theta, \qquad C = \frac{\partial M}{\partial \theta}.$$

Lorsque les deux circuits sont des bobines de autour du même axe, que nous prendrons pour axe tion réciproque est parallèle à l'axe, par raison d cette action étant nulle pour une position con deux circuits (la position concentrique, par ex deux bobines cylindriques), et aussi nulle à un distance, elle passe par une valeur maximum q à la condition $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$ ou $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0$.

593. Deux courants circulaires. — Pour de culaires de rayons a et a' de même axe et de n à la distance x, la valeur de M peut être exp au moyen des fonctions elliptiques (**586**). F des valeurs de $\frac{\partial F}{\partial k}$ et $\frac{\partial E}{\partial k}$, on trouve que l' considérée comme attractive, est

$$(27) \quad X = \frac{\pi k x}{\sqrt{aa'}}\left(2F - \frac{2-k^2}{1-k^2}E\right) = \frac{\pi x}{\sqrt{aa'}} \sin\gamma$$

Le second membre de cette équation s par les tables de Legendre. Pour rendr faciles, L. Rayleigh (¹) a calculé la t valeurs de l'angle γ variant de 55° à 7

(¹) RAYLEIGH, *Ph. Tr. L. R. S.*

A mesure que la distance x des deux cercles augmente, l'action est d'abord proportionnelle à cette distance; elle devient ensuite en raison inverse de la quatrième puissance, ce qu'on pouvait voir *a priori* par l'assimilation des courants et des feuillets magnétiques.

D'une manière plus générale, si le coefficient d'induction mutuelle de deux courants circulaires parallèles et de même axe est exprimé à l'aide des polynomes X_n, on a, en utilisant l'équation

$$(1-\mu^2)X_n'' - 2\mu X_n' + n(n+1)X_n = 0,$$

$$(31) \quad X = -\frac{2SS'}{u^4}\left[X_2' - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{1.3\dots(2n+1)}{2.4\dots 2n}X_{2n+2}'\left(\frac{a'}{u}\right)^{2n}\right].$$

Si le circuit A est une bobine à gorge rectangulaire de dimensions $2b$, $2c$ et de rayon moyen a, l'action moyenne sur le cercle A' et l'action réciproque des deux systèmes se calculeront de même par les séries (34), (35) et (36) du chapitre précédent; mais il pourra être utile dans certains cas de pousser plus loin le développement par rapport aux puissances croissantes de x.

Ces expressions ne sont plus assez convergentes quand il s'agit de deux courants circulaires très voisins et de même ordre de grandeur; on peut employer alors la formule (22). On en déduit, avec les valeurs trouvées pour A et B,

$$(32) \quad X = 4\pi a x\left[\frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{y}{2a} + \frac{y^2+3x^2}{16a^2} - \frac{y^3+3yx^2}{32a^3} + \dots\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3}{8a^2}\left(1 - \frac{y}{2a} + \dots\right)\mathcal{L}.\frac{r}{8a} + \frac{1}{8a^2}\left(1 - \frac{2y}{a} + \dots\right)\right],$$

et, lorsque les cercles sont égaux,

$$(32)' \quad X = \frac{4\pi a}{x}\left[\left(1 + \frac{5x^2}{16a^2} + \dots\right) + \left(\frac{3x^2}{8a^2} + \dots\right)\mathcal{L}.\frac{x}{8a}\right].$$

595. **Deux bobines.** — Pour deux bobines à gorges rectangulaires, on pourra employer les fonctions elliptiques (**593**) ou les développements en série.

Si on remplace le circuit A′ par une bobine à gorge rectangulaire de dimensions a', $2b'$, $2c'$, n'_1, et n'_2, on multipliera l'une des expressions trouvées dans le paragraphe précédent par le produit $n'_1 n'_2\, dx\, dy$, en effectuant ensuite la double intégration entre les limites ordinaires $a'-c'$ et $a'+c'$, $x-b'$ et $x+b'$.

Lorsque les rapports $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{c'}{a'}$ sont très petits, on peut calculer l'action moyenne X_m sur le cercle moyen de rayon a'_1, et on a sensiblement

$$X = N'\pi a_1'^2 \frac{\partial X_m}{\partial x}. \tag{33}$$

596. Cas particulier. — Quand on veut déterminer l'action d'un système de courants sur une bobine, il est quelquefois

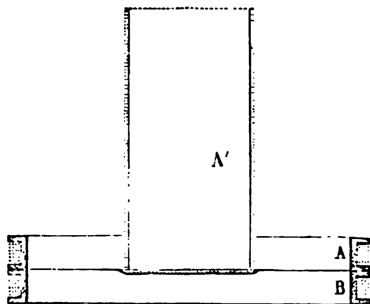


Fig. 151.

plus simple d'évaluer directement celles qui s'exercent sur les surfaces magnétiques équivalentes; nous considérerons un cas particulier comme exemple.

A et B (fig. 151) sont deux bobines égales, à gorges rectangulaires, de dimensions a, $2b$, $2c$ et N, les plans moyens étant à la distance $2x$. Une bobine longue A′ ayant N′ spires, une hauteur h', un diamètre moyen a' et une épaisseur $2c'$, est placée de manière que sa base inférieure soit dans le plan de symétrie des deux bobines A et B.

Le cercle moyen de cette base est

$$S' = \pi a_1'^2 = \pi a'^2 \left(1 + \frac{1}{3}\frac{c'^2}{a'^2}\right)$$

et la masse totale de la couche magnétique équivalente

$$S'\frac{N'}{h'} = \pi\frac{N'}{h'}a'^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{c'^2}{a'^2}\right).$$

Le champ moyen de chacune des bobines A et B sur cette base S' est déterminé par l'expression (34) du n° **571**, dans laquelle on remplacera y par le rayon a'_1 du cercle moyen ou simplement par a'. On peut écrire

$$X_m = \frac{2N\pi}{a}\varphi,$$

en posant

$$\begin{aligned}\varphi = {} & 1 + 1.2\gamma - 1.3\beta + 1.3^2 5\delta \\ & + \frac{3}{2.2^2}\alpha[1 + 3.4\gamma - 3.5\beta + 3.5^2 7\delta] \\ & + \frac{3}{3(2.4)^2}\alpha^2[1 + 5.6\gamma - 5.7\beta + 5.7^2 9\delta] + \ldots\end{aligned}$$

L'action des deux bobines A et B sur la base inférieure de la bobine A' est donc, en appelant L la longueur totale du fil de ces bobines, et L' celle de la bobine A',

$$\frac{4NN'\pi a'^2}{ah}\left(1+\frac{1}{3}\frac{c'^2}{a'^2}\right)\varphi = \pi\frac{N^2L'^2}{N'hL}\left(1+\frac{1}{3}\frac{c'^2}{a'^2}\right)\varphi.$$

Pour calculer le champ moyen X'_m des bobines A et B sur la base supérieure de la bobine A', on supposera ces deux bobines situées dans leur plan moyen, et on utilisera l'équation (35) du n° **571**; la valeur correspondante φ' de la quantité analogue à φ est alors, en négligeant les termes très petits,

$$\varphi' = \frac{a^3}{h'^3}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{a^2+a'^2}{h'^2} + \frac{3.5}{2.4}\frac{a^4+3a^2a'^2+a'^4}{h'^4}\right],$$

et l'action totale devient

$$(34)\qquad X = \pi\frac{N^2L'^2}{N'hL}\left(1+\frac{1}{3}\frac{c'^2}{a'^2}\right)(\varphi-\varphi').$$

597. Système de trois bobines symétriques. — Considérons encore deux bobines égales A et B, ayant chacune N spires,

dont les plans moyens sont à la distance $2x$, mais supposons que les courants y circulent en sens contraires et qu'une troisième bobine A' de même axe, ayant N' spires, soit symétriquement placée entre elles. Dans ce cas, les actions exercée par les bobines A et B sur la troisième sont de même sen et parallèles à l'axe. Il est évident que l'action résultant passe par un maximum ou un minimum lorsque la symétri est complète, mais on peut choisir la distance $2x$ de manière que le déplacement de la bobine intermédiaire n'a pas d'influence appréciable.

Désignant par X_0 l'action de A ou B sur A' à la distance l'action totale X, quand la bobine intermédiaire s'est déplacé de δx par rapport au plan de symétrie, est

$$X = 2\left[X_0 + \frac{(\delta x)^2}{1.2}\frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2} + \frac{(\delta x)^4}{1.2.3.4}\frac{\partial^4 X_0}{\partial x^4} + \dots\right].$$

Lorsque la valeur de x est telle que le second terme de l parenthèse soit nul, la variation de X n'est que du quatrièm ordre en fonction du déplacement δx.

Si M est l'induction mutuelle de A sur A', cette valeur de correspond à la condition

$$\frac{\partial^3 M}{\partial x^3} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} = 0.$$

Réduisant d'abord les bobines A, B et A' aux circonférence moyennes de rayons a et a', la valeur de X_0 est donnée pa l'équation (28) et la condition de maximum pour X devient

$$u_5 - \frac{a'^2}{2.2^2}u_7 + \frac{a'^4}{3.(2.4)^2}u_9 - \dots = 0.$$

Lorsque le rapport $\frac{a'}{a}$ des deux rayons est très petit, il e résulte sensiblement $u_5 = 0$ ou ou $4x^2 = 3a^2$.

Si les puissances de ce rapport supérieures au carré so négligeables, on a $8u_5 = a'^2 u_7$, c'est-à-dire

$$4x^2 = 3a^2\left[1 - \frac{1}{8}\frac{a'^2}{a^2}\frac{35a^4 - 140a^2x^2 + 56x^4}{(a^2+x^2)^2}\right],$$

ou, en remplaçant x dans le second membre par sa valeur approchée,

$$4x^2 = 3a^2\left(1 + \frac{11}{7}\frac{a'^2}{a^2}\right).$$

Enfin, si les rayons a et a' diffèrent très peu l'un de l'autre, on pourra prendre l'expression (32), qui donne

$$3y^2 - x^2 = 0, \qquad x = (a - a')\sqrt{3}.$$

Quand les bobines ont des gorges rectangulaires de petites dimensions, ces différentes conditions, relatives aux rayons moyens, donnent encore une force sensiblement constante.

Cet ensemble de trois bobines dont l'intermédiaire est mobile suivant l'axe commun a été souvent employé comme électrodynamomètre. Les dimensions relatives ayant été ainsi déterminées, on pourrait encore calculer l'action réciproque par des développements en série, mais leur convergence n'est pas assez rapide et il est préférable d'avoir recours aux fonctions elliptiques (593).

598. Couple de rotation de deux cadres circulaires. — Si les axes de deux courants circulaires se rencontrent sous un angle θ (fig. 150), le moment du couple C, dû aux actions réciproques, qui tend à faire varier l'angle θ, c'est-à-dire à faire tourner l'un des courants autour d'une droite passant le point C et perpendiculaire au plan des axes, est

$$C = \frac{\partial M}{\partial \theta} = -4\pi n' \sin^2\alpha \sin^2\alpha' \sin\theta \sum \frac{1}{n(n+1)} X'_n(\alpha') X'_n(\alpha) X'_n(\theta) \left(\frac{u'}{u}\right)^n.$$

Si l'origine C est au centre O' du cercle de rayon a', auquel cas $u' = a'$ et $\mu' = \cos\alpha' = 0$, il vient

$$C = -\frac{2SS'}{u^3} \sin\theta \sum \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} X'_{2n+1}(\alpha) X'_{2n+1}(\theta) \left(\frac{a'}{u}\right)^{2n}.$$

Lorsque les plans des cercles sont presque rectangulaires, on peut poser $\theta = 90° - \delta$, l'angle δ étant très petit, et on a

$$(35) \qquad C = -\frac{2SS'}{u^3}(P - Q\delta^2)\cos\delta.$$

La valeur de P et les premiers termes de Q sont

$$P = 1 + \cdots + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{a'}{u}\right)^{2n}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 X'_{2n+1}(x$$

$$Q = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a'}{u}\right)^2 5X'_3(x) + \frac{5}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{a'}{u}\right)^4 14X'_5(x).$$

Enfin, si les cercles sont concentriques, on a aussi $u =$
$\mu = \cos x = 0$, ce qui donne

$$P = 1 - \frac{3^2}{2.2^3}\frac{a'^2}{a^2}\cdots + (-1)^n\frac{(2n+1)^2}{n+1}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^3\left(\right.$$

$$Q = -5\frac{3^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 14\frac{5^2}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3\left(\frac{a'}{a}\right)^4.$$

Une double intégration appliquée à chacun des ce
dans l'expression du couple *C*, une fois développée, perr
de passer au cas de deux bobines à gorges rectangulair

Si les dimensions des gorges sont petites, on aura un
mière approximation en multipliant la valeur du coupl
culée pour les rayons moyens *a* et *a'* par le produit N
nombres de spires des deux bobines.

Le calcul précédent ne convient plus lorsque la ro
s'effectue autour d'une droite oblique au plan des axes c
ne passe plus par leur point de concours.

Considérons, par exemple, deux courants circulaire
S' de rayons *a* et *a'*, ayant leurs axes situés dans un
plan et dont les plans rectangulaires entre eux sont te
le plan du premier passe par le centre du second.

Désignant par *X* la composante, parallèle à l'inters
des deux plans, de l'action du courant S, donnée par l
tion (31), et *d*S' un élément de la surface S', le couple a
de cette droite est $\int X dS'$, l'intégrale étant étendue à to
surface S'.

Soit *r* la distance de deux centres; si les rapports $\frac{a'}{r}$
sont de même ordre et qu'on néglige les termes d'ordre

rieur au cube, on trouve, en utilisant la valeur de X donnée par l'équation (32),

$$C = -\frac{SS'}{r^3}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{3.5}{2.4}\right)^2 \frac{a^4}{r^4} + \frac{1}{4}\left(\frac{3.5.7}{2.4.6}\right)^2 \frac{a^6}{r^6} + \frac{3}{2}\frac{a'^2}{r^2} - \frac{5}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{a^2 a'^2}{r^4}\right].$$

La valeur du terme principal est la moitié de celle qui correspond au cas où l'axe du courant S passe par le centre du courant S', ce qu'on savait déjà.

599. **Bobine et aimant.** — Si on remplace le courant S' par un aimant de longueur $2l$, faisant un angle δ avec le plan du courant, on trouve, par un raisonnement analogue à celui du n° 574, que le couple produit par l'action du courant S sur l'aimant a pour expression, en négligeant les termes d'ordre supérieur à $\frac{l^2}{r^2}$,

$$D = \frac{\pi a^2}{r^2}\, 2l\cos\delta\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{3.5}{2.4}\right)^2 \frac{a^4}{r^4} + \ldots + 15\frac{l^2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\delta\right)\right].$$

Lorsqu'on remplace le courant S par une bobine de N spires, avec une gorge rectangulaire de dimensions $2b$ et $2c$, on aura, de même, en intégrant la valeur de X donnée par l'équation (31) dans laquelle on donnera à θ une valeur très voisine de 90°, et négligeant les termes d'ordre supérieur au carré des dimensions de la gorge,

$$D = N\frac{\pi a^2}{r^3}\, 2l\cos\delta\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{3.5}{2.4}\right)^2 \frac{a^4}{r^4} + \frac{1}{3}\frac{c^2}{a^2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{c^2}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{b^2}{r^2} + 15\frac{l^2}{r^2}\left(1 - \sin^2\delta\right)\right].$$

DEUXIÈME PARTIE. — MESURES ÉLECTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

ÉLECTROMÉTRIE

600. Caractère général des électromètres. — On appelle souvent *électroscope* un appareil qui sert à reconnaître si un corps est électrisé et de quelle espèce d'électricité. L'instrument devient un *électromètre* s'il permet de mesurer soit une quantité d'électricité, soit la différence de potentiel de deux conducteurs en équilibre ou de deux points quelconques de conducteurs non en équilibre statique.

Dans tout électromètre basé sur les actions électrostatiques, il existe au moins deux conducteurs dont l'action réciproque est répulsive s'ils ont des charges de même espèce ou s'ils sont de même potentiel, cette action étant attractive si les conducteurs sont électrisés en sens contraires. L'appareil peut être appelé *idiostatique* dans le premier cas, *hétérostatique* dans le second, mais dans plusieurs cas cette distinction est plutôt relative au mode d'emploi des instruments qu'au principe de leur construction.

Les conducteurs ainsi mis en présence sont susceptibles de prendre un mouvement relatif et l'action qui s'exerce entre eux est équilibrée par une réaction mécanique, telle que le poids même des organes quand ils sont déviés de leur position d'équilibre naturel, ou la tension d'un ressort, la torsion

d'un fil, le couple produit par un champ magnétique sur une aiguille aimantée, ou encore l'action directe d'un poids utilisé comme dans la balance.

On conçoit ainsi que la forme des électromètres peut varier à l'infini ; il suffira d'indiquer les principaux.

601. Électromètre à feuilles d'or. — L'électromètre le plus simple, comme aussi le plus ancien et le plus répandu, se compose d'un conducteur isolé auquel sont suspendus deux corps légers, tels qu'un double pendule à fils conducteurs (**3**) ou deux feuilles d'or.

La tige qui porte les feuilles d'or est habituellement montée dans la tubulure d'une cloche en verre, qui sert à la fois de support isolant et d'écran contre les courants d'air (fig. 152).

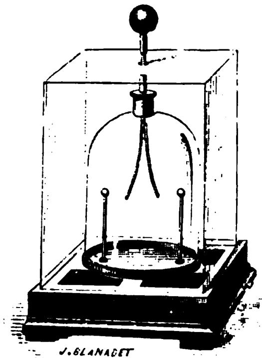


Fig. 152.

A l'intérieur se trouvent deux tiges métalliques reliées au sol, qui ont pour effet d'augmenter la divergence des feuilles et d'empêcher qu'à la suite d'un trop grand écart elles ne viennent au contact des parois.

Cette cloche est quelquefois entourée d'une seconde cage, percée d'un trou qui laisse passer librement la tige ; enfin des matières desséchantes, telles que la chaux vive ou la potasse caustique, placées dans un tiroir au fond de l'appareil, empêchent toute formation d'humidité sur les faces interne ou externe de la cloche, de manière à assurer l'isolement.

L'emploi d'une cage de verre peut présenter de graves

inconvénients, soit à cause des traces d'électricité qui se trouveraient accidentellement sur les parois, soit parce que l'appareil n'est pas protégé contre l'action de masses électriques extérieures.

Il vaut mieux se servir d'une cage conductrice d'assez grand diamètre pour que les feuilles d'or ne puissent la toucher; le conducteur est alors mastiqué dans la tubulure par un isolant convenable. M. Hurmuzescu (¹) emploie, sous le nom de *diélectrine*, un mélange de soufre et de paraffine dont l'isolement est si parfait que l'appareil met plusieurs jours à perdre sa charge.

Supposons maintenant les feuilles électrisées; soit V leur potentiel et V_0 celui de la cage que l'on supposera reliée au sol. La charge des feuilles est proportionnelle au produit de leur capacité, variable en général avec l'angle d'écart, par la différence $V - V_0$ de potentiel.

La divergence des pailles, due à leur répulsion réciproque et à l'attraction de chacune d'elles par la cage, ne dépend que de la charge ou plus généralement du potentiel des corps avec lesquels on les met en relation; cette divergence pourra donc servir, après graduation, à mesurer l'une ou l'autre de ces deux quantités.

Si l'on veut seulement employer l'appareil comme électroscope, on commence par le charger d'une électricité connue. Pour cela, on en approche un bâton de verre électrisé par le drap, les feuilles divergent; on touche le bouton supérieur avec le doigt, elles retombent; on enlève le doigt, puis on écarte le corps électrisé; les feuilles divergent, chargées cette fois d'électricité contraire à celle du corps influent, c'est-à-dire négative.

Pour reconnaître si un corps est électrisé, on l'approche de l'électroscope. Lorsque la divergence des feuilles augmente, le corps est négatif. Si la divergence diminue d'abord, l'expérience n'est pas concluante, parce qu'un corps neutre produirait le même effet; on approche davantage le corps extérieur et l'on est sûr qu'il est positif, si les feuilles reviennent au contact pour diverger de nouveau.

(¹) Hurmuzescu, *Séances de la Soc. fr. de Physique*, 23 janvier 1894.

602. Graduation des électromètres. — Dans certains *électromètres*, dits *absolus*, la forme et les dimensions des conducteurs en présence permettent de déterminer *a priori* la relation qui existe entre les indications de l'instrument et la charge électrique, ou la différence de potentiel des organes. Pour les autres, on fera une graduation empirique.

Considérons, par exemple, l'électromètre à feuilles d'or et supposons que la cage étant métallique soit reliée au sol, c'est-à-dire maintenue au potentiel zéro. Si le système formé par la tige et les feuilles a une capacité sensiblement indépendante de l'angle d'écart, le potentiel V est simplement proportionnel à la charge, qu'il est facile de faire varier dans un rapport connu.

De Saussure [1] se servait de deux électromètres identiques. L'un d'eux étant d'abord électrisé, on observe l'angle d'écart, puis on le met en communication par un conducteur de résistance négligeable avec le second appareil primitivement à l'état neutre. Le nouvel angle d'écart correspond à une charge moitié moindre; l'appareil est ainsi gradué en tant que *mesureur de charges*.

On arriverait plus simplement au même résultat en mettant les feuilles d'or en communication avec un cylindre de Faraday (3), dans lequel on introduirait une succession de charges égales entre elles. Avec cette disposition, la capacité de l'ensemble des conducteurs n'est pas modifiée sensiblement par les variations de divergence des feuilles et l'expérience donne une graduation en fonction des potentiels.

Telle est aussi la méthode employée par Volta [2]. L'électromètre était mis en communication avec le bouton d'une bouteille de Leyde chargée d'un nombre variable d'étincelles par le plateau d'un électrophore. Les étincelles d'un électrophore décroissent rapidement dès le début, mais elles deviennent bientôt sensiblement égales. D'un autre côté, la bouteille de Leyde, à cause de sa grande capacité, peut être considérée comme prenant toujours au plateau la même fraction de sa charge, et, par suite, comme acquérant un potentiel proportionnel au nombre des étincelles. Volta reconnut ainsi

[1] De Saussure, *Voyage dans les Alpes*, t. II, p. 165-175. Neuchâtel, 1804.
[2] Volta, *Della meteorologia elettrica*, 2e lettre.

que, jusqu'à 20 ou 25 degrés, l'écart des pailles de son électromètre était proportionnel au nombre des étincelles.

Pour déterminer la *constante* de l'instrument, c'est-à-dire la valeur absolue du potentiel correspondant à un écart déterminé, Volta suspendait au fléau d'une balance un disque métallique qu'il maintenait à une distance constante d'un plan conducteur horizontal en communication avec le sol. Il évaluait en poids l'attraction exercée à cette distance fixe entre le disque électrisé et le plan, et observait d'autre part l'écart de l'électromètre mis en communication avec le disque et le bouton de la bouteille de Leyde. C'est le principe des électromètres-balance sur lesquels on reviendra plus loin.

Ces différentes méthodes ne sont qu'approximatives, surtout à cause des déperditions par l'air et par les supports. La graduation peut se faire aujourd'hui d'une manière beaucoup plus simple au moyen de couples électriques, des couples Daniell par exemple, bien isolés et disposés en série ; la différence de potentiel entre les deux pôles est proportionnelle au nombre des couples (193), et on détermine la force électromotrice de chaque couple par un électromètre absolu.

603. Balance de Coulomb. — La forme de la balance employée par Coulomb ([1]) pour évaluer à l'aide de la torsion d'un fil l'action qui s'exerce entre deux petites sphères électrisées, est assez connue pour qu'il suffise d'en rappeler les principaux organes (547).

Le fil porte une aiguille horizontale de gomme laque terminée à l'une de ses extrémités par une petite sphère conductrice; une autre boule de même diamètre, placée sur la circonférence que décrit la première, est portée par une tige isolante. Dans les appareils de Coulomb, le diamètre de ces boules ne dépassait pas 5 ou 6 millimètres et le rayon de la circonférence décrite par la boule mobile était d'un peu plus de 10 centimètres. Le fil, en argent, avait une longueur de 76 centimètres et une finesse telle qu'il suffisait d'une force de 0,15 milligrammes appliquée à l'extrémité de l'aiguille pour le tordre de 360°.

Le fil est fixé par sa partie supérieure à un tambour divisé, qui permet d'évaluer les torsions. Quant à la déviation de

([1]) COULOMB, *Mém. de l'Acad. des sc.*, 1785, p. 569, etc.

l'aiguille, on peut la mesurer, soit au moyen d'une division collée sur la cage, soit plus exactement par la méthode du miroir (**521**).

Supposons la position du tambour telle que, pour la position d'équilibre de l'aiguille, le centre de la sphère mobile coïncide avec le centre de la sphère fixe. Quand la boule fixe est en place, les deux sphères sont appliquées l'une contre l'autre par la légère torsion qui résulte du déplacement de la boule mobile. Si on électrise le système, les deux sphères se partagent la charge électrique, elles se repoussent et, par une torsion convenable A du micromètre, on les ramène à une distance angulaire α, de sorte que la torsion du fil est $A+\alpha$ et le moment (**548**) du couple correspondant $C(A+\alpha)$.

Si l est la distance à l'axe du centre de la boule mobile, et f la répulsion qui s'exerce entre les deux boules, le moment de cette force par rapport à l'axe est égal à $fl\cos\frac{\alpha}{2}$. L'équation d'équilibre est donc

$$(1) \qquad fl\cos\frac{\alpha}{2} = C(A+\alpha).$$

En toute rigueur, la répulsion électrique f écarte le fil de la verticale, car si l'on applique sur l'axe deux forces opposées $\pm f'$, respectivement égales à f, le couple est produit par les deux forces f et $-f'$, l'autre force $+f'$ ne pouvant être équilibrée que par une déviation du fil, mais cette action ne modifie pas la torsion et elle est en général si faible qu'il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

On doit considérer ainsi la force f comme déterminée en fonction des dimensions de l'appareil, des angles observés et du coefficient de torsion C.

Soient q et q' les charges des deux boules, exprimées en unités électrostatiques, et $d = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$ la distance des centres. Si l'électricité était distribuée uniformément sur chacune d'elles et qu'il n'existât aucune action étrangère, l'action réciproque serait la même que si les masses étaient respectivement concentrées en leurs centres, et on aurait $fd^2 = qq'$.

Lorsque les boules, étant de même rayon r, se trouvent en

contact au moment de l'électrisation, leurs charges ont la même valeur q, ce qui donne

$$(2) \qquad q^2 = fd^2 = 4Cl(A+\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

Quand les rayons sont inégaux, on peut avoir le rapport des charges q et q' à l'aide de tables calculées par Plana [1].

Si les boules étaient très éloignées, le potentiel V de chacune d'elles dépendrait uniquement de la charge qu'elle possède, mais cette hypothèse est en général insuffisante.

On obtient une première approximation en supposant que l'action extérieure de chaque masse est la même que si elle était concentrée en son centre.

On a ainsi (**115**), dans le cas de deux boules égales de rayons r, et dont la distance d est représentée par cr,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} q &= rV\frac{d}{d+r} = rV\frac{c}{c+1}, \\ f &= V^2\left(\frac{r}{d+r}\right)^2 = \frac{V^2}{(c+1)^2}, \\ f &= \frac{q^2}{d^2} = \frac{q^2}{r^2}\,\frac{1}{c^2}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules ne suffisent pas lorsque la distance minimum des boules ne dépasse pas beaucoup leur diamètre. Les tables de Lord Kelvin s'arrêtent à la valeur $c=4$ qui correspond à cette distance, mais on a vu (**115**) qu'il est facile de les remplacer alors par des expressions très approchées.

Pour employer la balance de Coulomb à la mesure du potentiel d'un corps extérieur, il est nécessaire de rendre conductrice la tige qui porte la boule fixe et l'aiguille de la boule mobile, ces deux conducteurs étant mis en communication par le tambour. Il est difficile d'annuler ou de compenser la part qui revient à ces conducteurs dans la répulsion totale.

604. Influence de la cage. — Lorsque la cage est en verre, aucune correction n'est possible parce qu'on ne connaît pas

(1) PLANA, *Mém. de l'Acad. de Turin* [2], t. VII, p. 71, 1845. — *Voir* MASCART, *Traité d'électricité statique*, t. I, p. 282.

l'état électrique que prend sa surface pour un état donné des boules ; si, de plus, cette surface se trouve électrisée accidentellement en quelques points, il peut en résulter des erreurs très graves. Il est donc indispensable que la surface intérieure soit conductrice et maintenue en communication avec le sol. La charge de la cage est alors égale et de signe contraire à la somme algébrique $q + q'$ des charges des deux sphères, et son potentiel est nul.

La présence de l'électricité induite sur la cage conductrice peut modifier notablement l'action réciproque des sphères et, par suite, le calcul des charges en fonction de la force répulsive; mais elle change surtout la valeur des potentiels et cette influence est d'autant plus grande que la cage est plus étroite.

Le calcul de cette correction présenterait, en général, les plus grandes difficultés d'analyse. Pour donner une idée de son importance, nous considérerons le cas d'une cage sphérique; nous supposerons d'abord que, l'axe de suspension de l'aiguille étant excentrique, les deux boules sont situées au voisinage du centre. L'électricité induite forme alors une couche à peu près uniforme, à potentiel intérieur constant ; l'action réciproque des sphères s'exprimera donc, en fonction des charges, comme si la cage n'existait pas.

Il n'en est plus de même pour les potentiels. Si on continue d'appeler V le potentiel dû aux charges q et q' et qu'on désigne par U le potentiel réel, on a, pour un point voisin du centre, en appelant R le rayon de la cage,

$$U = V - \frac{q + q'}{R}.$$

Lorsque les charges sont égales, et qu'on prend la première approximation donnée par les équations (3), il vient, pour le potentiel de chaque boule,

$$U = V - 2\frac{r}{R}V\frac{d}{d+r} = V\left[1 - 2\frac{r}{R}\frac{d}{d+r}\right],$$

$$U = \frac{q}{r}\left(1 + \frac{r}{d} - \frac{2r}{R}\right).$$

Si l'on fait $r = 1^c$, $R = 20^c$, $d = 10\,r$, ce qui représente à peu

près les conditions d'une balance ordinaire, le terme de correction relatif à l'influence de la cage est de 0,1. On peut remarquer que le potentiel de chaque boule serait simplement $\frac{q}{r}$, si l'on avait $R = 2d$.

L'influence de la cage est beaucoup plus grande lorsque les boules sont rapprochées des parois. On doit en conclure que la balance de Coulomb permet, avec des précautions convenables, d'évaluer les charges électriques, mais cet instrument est mal approprié à la détermination des potentiels.

605. Électromètre absolu de Lord Kelvin. — Volta avait déjà employé la balance pour équilibrer par des poids l'attraction qui s'exerce entre deux plateaux conducteurs parallèles et Snow Harris a imaginé divers électromètres sur ce principe. Lord Kelvin a donné aux instruments toute la précision désirable en entourant le disque mobile d'un *plateau de garde* situé dans le même plan et relié au disque par un fil flexible, afin que la distribution de l'électricité soit sensiblement uniforme sur la surface a du disque qui subit l'attraction de l'autre plateau (58).

Si V_0 est le potentiel commun du disque et du plateau de garde, V le potentiel du second plateau et e la distance des surfaces, l'attraction P a pour expression

$$(4) \qquad P = \frac{a}{8\pi}\left(\frac{V - V_0}{e}\right)^2.$$

En réalité la densité électrique n'est pas rigoureusement uniforme sur les bords du disque et il convient d'ajouter un terme correctif à la surface a. Il est évident que la surface équivalente est plus grande que a et moindre que l'aire a' de l'ouverture ménagée dans le plateau de garde. Si le sillon qui les sépare est très étroit, il suffira de prendre la moyenne des surfaces a et a' ou, dans le cas d'un disque circulaire, d'ajouter au rayon la moitié de la largeur du sillon ([1]).

Dans la forme définitive adoptée par Lord Kelvin pour l'*électromètre absolu* (fig. 153), le disque mobile est entouré par un anneau de garde B et l'intervalle qui les sépare

([1]) Voir A. POTIER, *Édit. franç. de* MAXWELL, t. II, p. 563.

environ) est juste suffisant pour permettre le libre mou-
ıt du disque sans craindre le contact des deux organes.
disque est suspendu à un système de trois ressorts
par une tige en ébonite que l'on peut faire monter ou
:ndre à l'aide d'une vis micrométrique *c*. Pour éviter
: influence extérieure, le disque avec les ressorts est

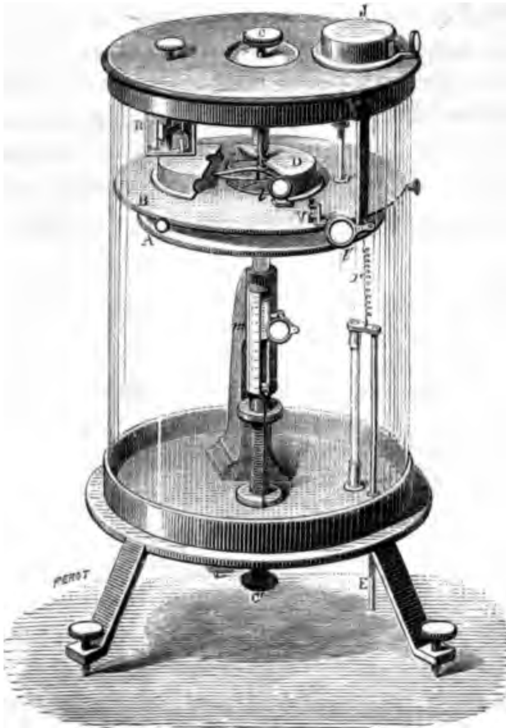


Fig. 153.

:ert par une boîte métallique D, munie d'une petite ou-
ıre et montée sur l'anneau de garde.
: second plateau A, également isolé, peut être mis en com-
ication avec un corps extérieur par une tige latérale, ou
rode E, et une vis micrométrique C′ permet de l'élever
e l'abaisser de manière à modifier la distance *e*.
faut d'abord s'assurer que le disque mobile est amené,
chaque observation, dans le plan de l'anneau de garde.

A cet effet, la pièce d'attache du disque aux ressorts porte une espèce de réticule formé par un fil horizontal. La lentille l donne de ce fil une image réelle qui se forme entre deux pointes très fines V, qui comprennent l'image du fil lorsque le disque est réglé.

Il serait assez difficile d'évaluer exactement la distance e des plateaux, mais on règle l'expérience de manière à n'avoir à mesurer que des différences de distance par l'échelle et le vernier que commande le bouton à vis C'. Le potentiel V_0 étant supposé invariable, on porte successivement l'électrode E à deux potentiels différents V et V' et on déplace le plateau A de manière que le disque prenne chaque fois sa position normale. La tension des ressorts ayant une valeur constante P, si les distances correspondantes sont e et e', on a

$$(5) \qquad \frac{V - V_0}{e} = \frac{V' - V_0}{e'} = \frac{V - V'}{e - e'} = \sqrt{\frac{8\pi}{a} P}.$$

La dernière expression donne la différence de potentiel $V - V'$ en fonction de la variation d'épaisseur $e - e'$.

Ce mode d'opération présente plusieurs avantages. On voit d'abord que le potentiel V_0 disparaît dans l'expression finale. Le disque et l'anneau de garde ne sont pas formés en général du même métal, le premier étant en aluminium et le second en laiton; il existe donc entre eux une différence de potentiel correspondant à la force électromotrice de contact, mais cette circonstance n'influe pas sur le résultat.

En second lieu, l'attraction P étant la même dans les deux cas, les densités électriques sur les surfaces en regard reprennent les mêmes valeurs.

Il faut encore tarer l'instrument, c'est-à-dire connaître la tension P des ressorts.

La tête de la vis supérieure porte un tambour divisé, en face duquel une échelle latérale permet de connaître le nombre de tours et de fractions de tour effectués dans un sens quelconque. L'appareil étant à l'état neutre, on amène le disque dans sa position normale; on le charge alors de masses m distribuées symétriquement et on le remonte par la vis C jusqu'à ce que l'image du réticule se retrouve entre

ses repères. Pour cette position du tambour, la tension des ressorts au moment des observations sera donc $P = mg$.

Il reste enfin à maintenir constant le potentiel V_0. La cloche en verre est une jarre électrique dont les armatures, non représentées sur la figure, sont formées de lames d'étain collées sur la surface intérieure et la surface extérieure, cette dernière étant reliée au sol. Des morceaux de ponce imbibés d'acide sulfurique concentré et contenus dans des boîtes de plomb maintiennent l'air de la cloche à l'état sec. L'anneau de garde B et, par suite, le disque mobile communiquent avec l'armature intérieure.

La jarre, une fois électrisée, conserve sa charge pendant très longtemps, mais il est nécessaire de recourir à deux organes accessoires, le *reproducteur de charge* R (replenisher)

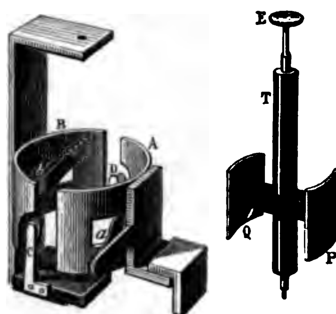


Fig. 154.

et la *jauge* J, pour amener dans chaque expérience le potentiel à la même valeur V_0.

Le *replenisher* (fig. 154) est une de ces machines couplées à induction dont nous avons indiqué le principe général (**146**). A et B sont deux conducteurs hemi-cylindriques, munis de ressorts intérieurs *a* et *b* et reliés l'un A avec l'armature intérieure de la jarre électrique, l'autre B avec le sol; entre eux sont deux ressorts C et D reliés par un fil métallique. Dans la cavité de ces conducteurs se place l'appareil tournant T formé d'une croix en ébonite qui porte deux plaques métalliques courbes P et Q et que l'on peut faire tourner rapidement dans un sens ou dans l'autre par le bouton E.

Supposons que A soit positif et B négatif. Quand les pla-

ques P et Q touchent respectivement les ressorts *a* et *b*, leur charge est nulle. Si la rotation amène P en D et Q en C, ces plaques font partie d'un conducteur disposé obliquement, la plaque P devient négative par influence et la plaque Q positive. La rotation continuant, Q apporte de l'électricité positive au ressort *a* et P de l'électricité négative au ressort *b*.

Une rotation dans ce sens augmente donc la charge de la jarre; une rotation en sens contraire diminuerait la charge.

La *jauge*, qui est construite sur le même principe que l'électromètre lui-même, se compose d'un disque mobile *p* (fig. 155) avec son anneau de garde G, et d'un plateau qui l'attire, le tout enfermé dans une boîte J (fig. 153). Le disque et l'anneau sont en communication avec l'armature extérieure de l'électromètre; le plateau opposé est à une distance fixe et en communication avec l'armature intérieure.

Le disque mobile est carré et peut tourner autour d'un axe

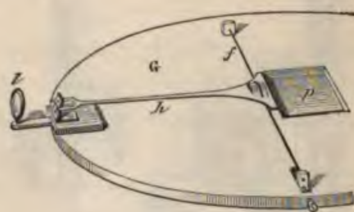


Fig. 155.

formé par un fil de platine *f* fixé à ses extrémités; dans la position d'équilibre du fil, le disque est relevé et son plan coïncide avec celui de l'anneau quand l'attraction électrique fait équilibre à la torsion correspondante du fil. Le potentiel reprend évidemment la même valeur toutes les fois que cette condition est réalisée. La jauge doit être assez sensible pour accuser des différences de potentiel sans effet appréciable sur l'électromètre lui-même.

Le système de visée, qui permet de constater le retour au repère, diffère un peu de celui qui a été décrit plus haut. Le petit disque d'aluminium se prolonge par une queue *h* de même métal un peu plus grande que le rayon de la boîte J et dont l'extrémité, redressée en forme de fourche, porte le fil qui sert de mire. Cette extrémité, étant en dehors de la boîte,

est soumise à l'action des masses électriques extérieures et, à cause de la grandeur du bras de levier qu'elle présente, il en pourrait résulter des erreurs graves. On les évite en protégeant l'extrémité par un grillage métallique en communication avec la boîte et disposé de manière à ne pas gêner la vue. Le fil de mire doit être amené exactement entre deux petits points noirs tracés sur du papier blanc et on vise au moyen d'une loupe. Pour éviter autant que possible les erreurs de parallaxe, la loupe est une petite lentille plan-convexe, la surface plane étant tournée vers l'œil; le fil est à une distance très peu inférieure à la distance focale et l'œil doit être placé de l'autre côté à une distance assez grande, de 20 centimètres au moins. Dans ces conditions, le champ est réduit au minimum; quand la ligne de visée coïncide avec l'axe optique, le fil apparaît comme un trait rectiligne très épanoui à ses extrémités; pour peu qu'elle s'en écarte, l'image se courbe très fortement dans un sens ou dans l'autre. D'après Lord Kelvin, ce mode de visée permet d'estimer un déplacement du fil moindre que 0,0001 millimètre.

Les variations de température ont un effet marqué sur les indications de la jauge, à cause des changements qu'elles apportent dans l'élasticité du fil.

Sous la forme précédente, l'électromètre absolu comporte une grande précision quand il s'agit de potentiels modérés, jusqu'à 3000 volts, par exemple, ou 10 unités électrostatiques. Pour des potentiels plus élevés (*long rang electrometer*), l'appareil est réduit à deux plateaux parallèles, dont l'un porte un disque mobile disposé comme dans la jauge.

Ces plateaux étant portés à des potentiels différents, on modifie leur distance jusqu'à ce que le fil soit ramené entre ses repères. Un premier réglage ayant été fait par comparaison avec l'électromètre absolu, cet instrument permet alors d'évaluer les différences de potentiel qui correspondent des étincelles de 30 centimètres.

M. Baille (1) a suspendu le disque mobile, toujours avec un anneau de garde, au fléau d'une balance, de manière que attraction électrique puisse être équilibrée directement par une variation des poids que porte l'autre plateau.

(1) J.-B. Baille, *Ann. de Chim., et de Phys.* [5], t. XXV, p. 486; 1882.

mobile étant m, la composante horizontale due à la pesanteur est $mg \tan\alpha$, ce qui donne

$$(7) \qquad V^2 = 8mg \tan\alpha.$$

Si l'on renferme les calottes dans une enveloppe sphérique de rayon b en communication avec le sol, la capacité du système (50) est $a\frac{b}{b-a}$; par suite,

$$(7)' \qquad X = \frac{V^2}{8}\cdot\left(\frac{b}{b-a}\right)^2, \qquad V^2 = 8\,\frac{b-a}{b}\,mg \tan\alpha.$$

Avec cette disposition, la sensibilité de l'appareil est augmentée, en même temps que les calottes hémisphériques sont protégées contre toute action extérieure.



Fig. 157.

607. Électromètre à quadrants. — L'électroscope de Bohnenberger se compose d'une feuille d'or suspendue entre deux conducteurs reliés aux pôles d'une pile; la feuille d'or dévie vers l'un ou l'autre conducteur suivant qu'elle est chargée d'électricité positive ou négative. Cet appareil peut être considéré comme le principe des électromètres symétriques.

L'électromètre à quadrants de Lord Kelvin ne se prête pas aussi bien que les précédents aux mesures absolues, mais il peut être beaucoup plus sensible et on le graduera par une méthode de comparaison.

Une boîte cylindrique plate est coupée suivant deux méridiens perpendiculaires de manière à former quatre segments

A, A′, B et B′ (fig. 157), dont les opposés AA′ et BB′ sont reliés électriquement. Chacun des quadrants est échancré dans la partie centrale par une ouverture circulaire.

Au milieu de la boîte est une aiguille, découpée dans une feuille mince d'aluminium, mobile autour d'une axe vertical perpendiculaire au plan des quadrants. Cette aiguille peut avoir une forme quelconque symétrique par rapport à un diamètre; mais, pour se rapprocher autant que possible de la théorie et obtenir des résultats plus réguliers, on la réduit à deux portions de couronne de 90° rattachées au centre par deux bandes étroites qui en figurent les rayons extrêmes.

L'aiguille est portée par un système capable de donner un couple de torsion, tel qu'un bifilaire, un fil métallique ou un fil de cocon muni d'un petit aimant, et réglé de manière que l'équilibre ait lieu, tous les organes étant à l'état neutre, quand l'aiguille est symétriquement placée par rapport aux plans de séparation des quadrants. Les rayons sont alors dans la partie moyenne des quadrants, auquel cas l'action qu'ils éprouvent est sensiblement nulle.

Cette disposition équivaut à l'ensemble symétrique de trois cylindres (71). Si les deux paires de quadrants sont aux potentiels V_1 et V_2, l'aiguille étant au potentiel V, et que l'on désigne par α la capacité de l'aiguille par unité d'angle, la variation d'énergie du système pour une rotation $d\theta$, ou le travail des actions électriques, est

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta = \alpha d\theta (V_1 - V_2)\left[V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right].$$

Le moment du couple qui agit sur l'aiguille est le coefficient de $d\theta$ dans le second membre. Si la suspension est bifilaire et que C soit le coefficient de torsion, l'équilibre a lieu sous l'angle θ pour la condition

$$(8) \qquad \alpha(V_1 - V_2)\left[V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right] = C \sin\theta.$$

On remplacera $\sin\theta$ par l'angle θ si la suspension est unifilaire ou les déviations très petites. La sensibilité de l'ins-

trument est proportionnelle à la capacité α et en raison inverse du coefficient C de torsion.

On peut calculer la constante α. Soit S la surface de la couronne qui correspond à l'unité d'angle, d et d' les distances des faces aux côtés opposés de la boîte. La portion de l'aiguille comprise dans la paire de quadrants au potentiel V_1 a sur ses deux faces des couches électriques dont les densités sont respectivement (**58**)

$$\sigma = \frac{V - V_1}{4\pi d}, \qquad \sigma' = \frac{V - V_1}{4\pi d'}.$$

La charge de la surface S étant $S(\sigma + \sigma') = \alpha(V - V_1)$, on a

$$(9) \qquad \alpha = \frac{S}{V - V_1} = \frac{S}{4\pi}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d'}\right).$$

Cette expression est minimum pour $d = d'$, c'est-à-dire quand l'aiguille occupe exactement le milieu de la boîte.

Si l'on désigne par c la capacité de l'aiguille par rapport aux quadrants supposés reliés au sol, la charge q qu'elle prendrait dans la position de symétrie est

$$(10) \qquad q = \frac{c}{2}(V - V_2 + V - V_1) = c\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right).$$

En réalité l'aiguille est déviée de l'angle θ, par exemple vers les quadrants de potentiel V_2, et la charge q' devient

$$(10)' \qquad \left\{ \begin{array}{l} q' = \left(\frac{c}{2} + \alpha\theta\right)(V - V_2) + \left(\frac{c}{2} - \alpha\theta\right)(V - V_1), \\ q' = q + \alpha\theta(V_1 - V_2). \end{array} \right.$$

La capacité pratique c' de l'aiguille, rapportée au potentiel V, a donc pour expression

$$c' = \frac{q'}{V} = c\left(1 - \frac{V_1 + V_2}{2V}\right) + \alpha\frac{V_1 - V_2}{V}\theta,$$

ou, en tenant compte de l'équation (8) d'équilibre,

$$(11)\qquad c' = \left[c + \frac{\alpha^2}{C}(V_1 - V_2)^2 \frac{\theta}{\sin\theta}\right]\left(1 - \frac{V_1 + V_2}{2V}\right).$$

Dans le cas où $V_1 + V_2 = 0$, la capacité c' est sensiblement constante, au moins tant que les déviations restent très petites; elle renferme un terme proportionnel au carré de la différence de potentiel des quadrants.

608. Description de l'appareil. — Dans la disposition adoptée par Lord Kelvin, une cloche en verre renversée est fermée par un couvercle en métal auquel sont attachés tous les organes. Cette cloche sert de jarre électrique, comme pour l'électromètre absolu ; l'armature extérieure est formée par des feuillets d'étain en relation avec le sol et l'armature intérieure par une couche d'acide sulfurique, qui a l'avantage de faciliter l'isolement.

La boîte de quadrants est attachée au couvercle par des tiges de verre et deux électrodes extérieures, isolées par des manchons d'ébonite, communiquent respectivement aux deux paires de quadrants. L'aiguille est suspendue par deux fils de cocon dont on peut faire varier la distance des points d'attache supérieurs; elle porte un miroir pour l'observation des déviations et un long fil de platine qui plonge dans l'acide sulfurique, de sorte qu'elle est constamment au potentiel très élevé de la jarre électrique. Cette aiguille y compris le miroir, ne pèse pas plus de $0^{gr},12$.

Enfin, on installe aussi sur le couvercle un *replenisher* et une *jauge* pour charger la jarre et y maintenir le potentiel constant V; la communication de ces organes avec l'acide sulfurique peut être interrompue à volonté, afin d'éviter les pertes inutiles.

Il est facile de diminuer la sensibilité de l'instrument, sans modifier la charge de la jarre ni l'écart des fils de suspension. Quand on isole une paire de quadrants, les deux corps dont on veut déterminer la différence de potentiel étant réunis respectivement à la cage et à l'autre électrode, les déviations deviennent 10 à 15 fois plus faibles que si l'on utilisait les deux électrodes. Une plaque de métal, dite *inducteur*, placée au-dessus de l'un des quadrants, permet encore d'aller plus

trument est proportionnelle à la capacité α et en raison inverse du coefficient C de torsion.

On peut calculer la constante α. Soit S la surface de la couronne qui correspond à l'unité d'angle, d et d' les distances des faces aux côtés opposés de la boîte. La portion de l'aiguille comprise dans la paire de quadrants au potentiel V_1 a sur ses deux faces des couches électriques dont les densités sont respectivement (58)

$$\sigma = \frac{V - V_1}{4\pi d}, \qquad \sigma' = \frac{V - V_1}{4\pi d'}.$$

La charge de la surface S étant $S(\sigma + \sigma') = \alpha(V - V_1)$, on a

$$(9) \qquad \alpha = \frac{S}{V - V_1} = \frac{S}{4\pi}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d'}\right).$$

Cette expression est minimum pour $d = d'$, c'est-à-dire quand l'aiguille occupe exactement le milieu de la boîte.

Si l'on désigne par c la capacité de l'aiguille par rapport aux quadrants supposés reliés au sol, la charge q qu'elle prendrait dans la position de symétrie est

$$(10) \qquad q = \frac{c}{2}(V - V_2 + V - V_1) = c\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right).$$

En réalité l'aiguille est déviée de l'angle θ, par exemple vers les quadrants de potentiel V_2, et la charge q' devient

$$(10)' \qquad \begin{cases} q' = \left(\frac{c}{2} + \alpha\theta\right)(V - V_2) + \left(\frac{c}{2} - \alpha\theta\right)(V - V_1), \\ q' = q + \alpha\theta(V_1 - V_2). \end{cases}$$

La capacité pratique c' de l'aiguille, rapportée au potentiel V, a donc pour expression

$$c' = \frac{q'}{V} = c\left(1 - \frac{V_1 + V_2}{2V}\right) + \alpha\frac{V_1 - V_2}{V}\theta,$$

n tenant compte de l'équation (8) d'équilibre,

$$) \quad c' = \left[c + \frac{\alpha^2}{C}(V_1 - V_2)^2 \frac{\theta}{\sin\theta}\right]\left(1 - \frac{V_1 + V_2}{2V}\right).$$

ns le cas où $V_1 + V_2 = 0$, la capacité c' est sensiblement ante, au moins tant que les déviations restent très s; elle renferme un terme proportionnel au carré de la ence de potentiel des quadrants.

Description de l'appareil. — Dans la disposition adoptée ord Kelvin, une cloche en verre renversée est fermée 1 couvercle en métal auquel sont attachés tous les es. Cette cloche sert de jarre électrique, comme pour omètre absolu; l'armature extérieure est formée par iillets d'étain en relation avec le sol et l'armature inté- par une couche d'acide sulfurique, qui a l'avantage de r l'isolement.

ootte de quadrants est attachée au couvercle par des le verre et deux électrodes extérieures, isolées par des ons d'ébonite, communiquent respectivement aux deux de quadrants. L'aiguille est suspendue par deux fils on dont on peut faire varier la distance des points d'at- supérieurs; elle porte un miroir pour l'observation des ons et un long fil de platine qui plonge dans l'acide que, de sorte qu'elle est constamment au potentiel très le la jarre électrique. Cette aiguille y compris le miroir, e pas plus de $0^{gr},12$.

n, on installe aussi sur le couvercle un *replenisher* et *uge* pour charger la jarre et y maintenir le potentiel nt V; la communication de ces organes avec l'acide que peut être interrompue à volonté, afin d'éviter les inutiles.

t facile de diminuer la sensibilité de l'instrument, sans er la charge de la jarre ni l'écart des fils de suspension. on isole une paire de quadrants, les deux corps dont t déterminer la différence de potentiel étant réunis ivement à la cage et à l'autre électrode, les déviations ient 10 à 15 fois plus faibles que si l'on utilisait les ectrodes. Une plaque de métal, dite *inducteur*, placée ius de l'un des quadrants, permet encore d'aller plus

n général, mais on peut
s, ou toutes les deux, et
avec l'électrode utilisée;
sibilités différentes.
tre paraît présenter d'assez
verre est très importante,
server sa charge, sans perte
journée. D'autre part, les
ssez rapidement, et il peut
sent plus suffisamment isolés
sont pas reliés à des sources
montre que les déviations de
sement symétriques pour des
s et de signes contraires, ce qui
ents dans certains cas, comme
ité atmosphérique.
que l'on ait $V_1 = 800$ volts, $V_2 = 0$
et des déviations δ et $-\delta$ cor-
s du potentiel V_1 est alors

$$\frac{V_1}{V_1} = \frac{780}{800} = \frac{39}{41}.$$

de ... et le potentiel de l'air at-
s beaucoup supérieures à 40 volts.
V, que les deux déviations se

ment la construction de cet élec-
ever de sa sensibilité ou de son
Leyde et ses accessoires, reple-
supprimés; l'appareil, réduit aux
st renfermé dans une cage métal-
couvercle soutient le tube qui porte
laisse passer trois électrodes, por-
et passant librement dans des

communiquent avec les paires de qua-
à l'aiguille par l'intermédiaire
acide sulfurique dans lequel plonge.

d'une part, un fil de platine attaché à l'électrode et, d'autre part, un prolongement en platine de l'axe de l'aiguille ; ce prolongement porte une ou deux petites aiguilles transversales qui amortissent très rapidement les oscillations.

Dans la disposition habituelle on porte les quadrants à des potentiels égaux et de signes contraires en reliant respectivement les électrodes avec les deux pôles d'une pile, formée

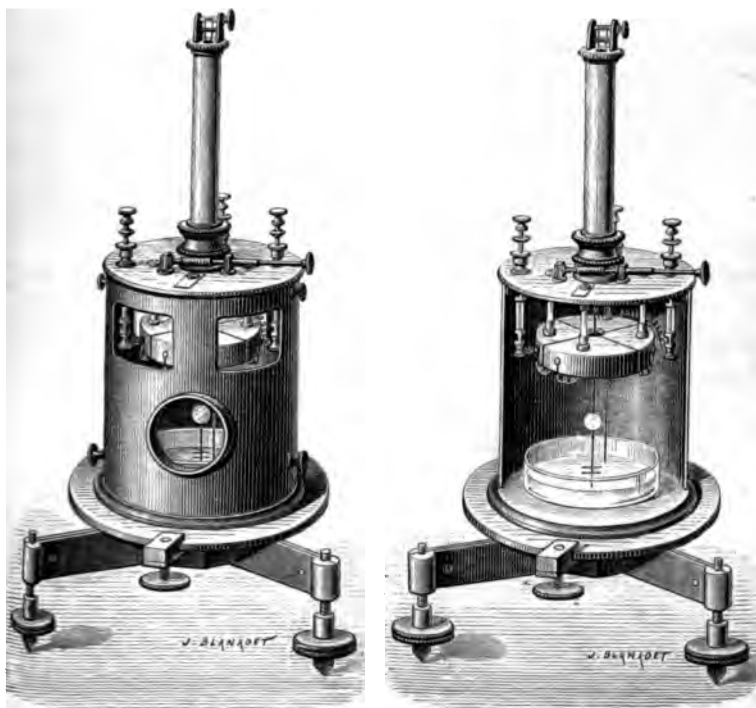


Fig. 158.

de très petits couples de Volta ou de Daniell, dont le milieu communique avec le sol. La sensibilité est alors, toutes choses égales, proportionnelle au nombre des couples.

Les fils de cocon, formés d'un seul brin auquel l'aiguille est suspendue par un crochet, sont enroulés sur un treuil à la partie supérieure et passent entre les dents d'une vis ayant deux pas en sens contraires ou dans deux encoches en forme de V dont la distance est variable ; on peut ainsi régler faci-

loin. L'inducteur ne joue pas de rôle en gé
isoler l'une des paires de quadrants, ou
mettre l'inducteur seul en relation avec
on obtient ainsi une série de sensibilité
La construction de cet électromètre pa
grandes difficultés. La qualité du verre
parce que la bouteille doit conserver
sensible, au moins pendant une jour
montures d'ébonite s'altèrent assez
arriver que les quadrants ne soient p
pour l'étude des corps qui ne sont p
électriques. Enfin l'équation (8) mon
l'aiguille ne sont pas rigoureusem
différences de potentiel égales et d
peut présenter des inconvénients
pour les observations d'électricité
Supposons, par exemple, que l'
et $V_1 = \pm 40$ volts. Le rapport d
respondant à ces deux valeurs du

$$\frac{\theta}{-\theta'} = \frac{2V - V_1}{2V + V_1}$$

L'erreur relative est déjà de
teint souvent des valeurs de be
Il arrivera même, si $V_1 > 2V$
trouvent du même côté.
On peut simplifier notablem
tromètre sans lui rien enle
exactitude. La bouteille de
nisher, jauge, etc., sont
quadrants et à l'aiguille,
lique (fig. 158) dont le co
la suspension bifilaire, et
tées par des tiges de ve
trous du couvercle.
Deux des électrodes co
drants. La troisième est
d'un vase contenant de

609. Discussion des expériences. — Dans le cas général, la déviation étant supposée assez petite, on peut écrire, en désignant par k le rapport des coefficients α et C,

$$(12) \qquad \theta = k(V_1 - V_2)\left[V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right].$$

Le premier facteur k ne dépend que de la construction de l'instrument. Le second facteur est nul quand les deux paires de quadrants sont réunies métalliquement; l'aiguille doit alors rester immobile, quelle que soit la charge qu'on lui communique. Cette condition ne se réalise pratiquement que si la symétrie des organes est parfaite; on l'utilise pour le réglage de l'instrument.

Le troisième facteur dépend des trois potentiels; il devient aussi nul lorsque le potentiel de l'aiguille est la moyenne algébrique des potentiels des quadrants.

Si l'on donne à l'aiguille des potentiels égaux et de signes différents $\pm V$, les déviations correspondantes θ et θ', comptées en sens contraires, donnent

$$\theta + \theta' = 2k(V_1 - V_2)V.$$

Dans ce cas, la distance angulaire des deux positions correspondantes de l'aiguille est exactement proportionnelle à la différence de potentiel $V_1 - V_2$ des quadrants.

La formule (12) peut aussi être réduite à

$$(13) \qquad \theta = k(V_1 - V_2)V$$

lorsque la somme $V_1 + V_2$ est très petite par rapport au potentiel V de l'aiguille; c'est dans ces conditions que fonctionne l'électromètre de Lord Kelvin, où la jauge est réglée pour un potentiel de 500 à 1000 volts.

Si l'on fait $V_1 + V_2 = 0$, c'est-à-dire quand les quadrants sont chargés par les deux pôles d'une pile dont le milieu est au sol, et que le corps à étudier, de potentiel V, soit mis en relation avec l'aiguille, l'équation (13) devient rigoureuse. En appelant **E** la force électromotrice $V_1 - V_2$ de la pile de

lement la distance des fils à la partie de l'aiguille. Enfin la colonne peut l un mouvement gras ou à l'aide d'une le réglage.

Il est facile, les trois électrodes ... symétrique; il d'une manière quelconque et d'u ... pour des poten- différentes combinaisons indiquées ... a sensibilité est pro-

Dans toutes les expériences fait ... l'aiguille à l'une des faut évidemment que les corps ... ce qui donne les électrodes soient isolés avec trodes elles-mêmes. On doit pertes par l'air, même très humi tricité comme s'effectuant uni

... quadrants avec lesquels ... proportionnelle au carré ... change pas de signe avec ... temps $V_2 = o$ en mettant ... ation est simplement pro-

... a différence de potentiel ... peut joindre le point A à ... a pile de charge, dont le ... eurs extrêmes V_1 et V_2. Avec ... devient

... V_3.

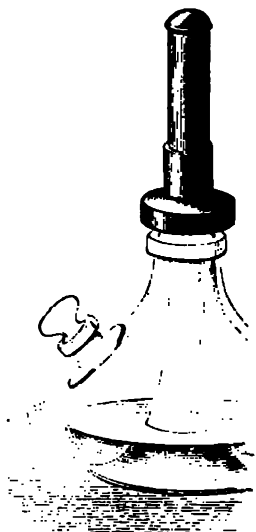


Fig. 159

... constantes α et C, ou du coef- ... gradue l'instrument au moyen ... electromotrice est connue ... absolu.

... l'une et l'autre forme, peut ... apprécier un volt, ou la force dité qui recouvre les ... ameil, avec une approximation trice. On échappe à ... de contact entre les mé- en verre, au moins ... es expériences, par suite des atmosphère desséch ... doit prendre des précautions et 160, qui s'expli ... des observations. ces conditions pe ... constaté qu'en mettant au sol le

(1) MASCART, Journa ... VII, ... 1888.

...arge, la sensibilité de l'électromètre, ...ment proportionnelle à la force électro... ...abord avec cette valeur, puis passe par un ... ensuite rapidement. En outre, la charge ... beaucoup la période des oscillations.

... que ce phénomène tient à l'existence ...ple directeur proportionnel au carré du ...

...l d'en rendre compte en remarquant que, ... l'aiguille n'est pas assez large pour que les ...s soient en toute rigueur applicables.

... la position de symétrie, c, c_1 et c_2 les capacités ... des quadrants, chacun de ces organes étant ... présence de tous les autres conducteurs réunis ... γ_2 les coefficients d'électricité induite (**46**) ou ... électrostatique de l'aiguille sur les quadrants, ...ficient réciproque des deux quadrants. Si l'aiguille ...tenue immobile par une action étrangère, les charges ...es sont

$$q = cV + \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2,$$
$$q_1 = c_1 V_1 + \gamma_1 V + \gamma V_2,$$
$$q_2 = c_2 V_2 + \gamma V_1 + \gamma_2 V,$$

...gie électrique $W = \frac{1}{2}\Sigma qV$ du système devient

$$W = \frac{cV^2 + c_1 V_1^2 + c_2 V_2^2}{2} + \gamma_1 V V_1 + \gamma_2 V V_2 + \gamma V_1 V_2.$$

...ue l'aiguille tourne d'un angle très petit θ, le travail T ...es électriques est égal à l'accroissement δW d'éner... ...uel est dû à la variation correspondante des coeffi... ... et γ. On a donc

$$\frac{V^2 \delta c + V_1^2 \delta c_1 + V_2^2 \delta c_2}{2} + V V_1 d\gamma_1 + V V_2 d\gamma_2 + V_1 V_2 d\gamma.$$

...variations peuvent être développées en fonction des ...ces croissantes de l'angle θ, en s'arrêtant aux termes

du second ordre; la symétrie du système entraîne
taines conditions :

1° Les quantités $\delta\gamma$ et δc ne dépendent pas du si
on aura donc, en désignant par λ et μ deux coefficie
téristiques de l'appareil,

$$\delta\gamma = \lambda\theta^2, \qquad \delta c = \mu\theta^2.$$

2° D'autre part, les quantités $\delta\gamma_1$ et $\delta\gamma_2$, ainsi que
échangent leurs valeurs quand θ change de signe, ce

$$\delta\gamma_1 = \alpha\theta + \alpha'\theta^2, \qquad \delta c_1 = \beta\theta + \beta'\theta^2,$$
$$\delta\gamma_2 = -\alpha\theta + \alpha'\theta^2; \qquad \delta c_2 = -\beta\theta + \beta'\theta^2$$

$$T = \left[\frac{\beta}{2}(V_1^2 - V_2^2) + \alpha V(V_1 - V_2)\right]\theta$$
$$+ \left[\frac{\mu}{2}V^2 + \frac{\alpha'}{2}(V_1^2 + V_2^2) + \alpha' V(V_1 + V_2) + \lambda V_1 \right.$$

expression que l'on peut écrire

$$T = K\theta + \frac{K'}{2}\theta^2 = \int_0^{\theta}(K + K'\theta)\,d\theta.$$

On voit que les actions électriques se rédui
couples, l'un K indépendant de la déviation, e
proportionnel à l'angle θ.

Le couple K tend à déplacer l'aiguille dans la d
angles θ positifs, ou en sens contraire, suivant qu'
ou négatif. Le couple $K'\theta$ s'annule avec la dévia
à éloigner l'aiguille du zéro ou à l'y ramener suivan
positif ou négatif.

Pour une aiguille de grandes dimensions, on au

$$\lambda = \mu = \alpha' = \beta' = 0 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = 0.$$

Si l'on réunit les quadrants au sol, auquel ca
$K' = \mu V^2$, l'aiguille, mise en mouvement, oscille so
du couple directeur K' et de la suspension.

L'expérience montre que la charge de l'aiguille
tiel V ne modifie pas d'une manière appréciable

des oscillations; il en résulte que K' est alors très petit, ce qui était à prévoir, puisque la capacité de l'aiguille est indépendante de l'angle θ lorsque l'appareil est bien réglé; on a donc sensiblement $\mu = 0$.

Il en est de même quand on fait $V_1 = V_2$ et $V = 0$, ce qui exige $\beta' + \lambda = 0$, et pour $V = V_1 = V_2$, d'où résulte $\alpha' = 0$.

Enfin l'équilibre de l'aiguille ne dépend que des différences des potentiels, et non de leurs valeurs absolues, pourvu qu'elle soit efficacement protégée par la boîte de quadrants. Le couple K doit donc être nul pour $2V = V_1 + V_2$; par suite $\alpha + \beta = 0$.

En tenant compte de ces remarques, on obtient les expressions très approchées

$$K = \alpha(V_1 - V_2)\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right) = \alpha E\left(V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right),$$

$$K' = -\lambda(V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2) = -\lambda(V_1 - V_2)^2 = -\lambda E^2.$$

La valeur de K est celle qu'on avait obtenue déjà.

Si l'on met l'aiguille au sol avec une charge symétrique ($V = 0$, $V_1 + V_2 = 0$), il reste un couple directeur électrique $K' = -\lambda E^2$ qui peut être très notable, malgré la petitesse du coefficient λ, si la force électromotrice E est très grande.

Le couple K' intervient également dans la position d'équilibre. Désignant encore par $C \sin\theta$ ou $C\theta$ le couple relatif à la suspension, l'aiguille est ramenée vers le zéro par le couple $(C - K')\theta$, tandis que le couple K tend à l'écarter. La condition d'équilibre est donc

$$K = (C - K')\theta.$$

Avec la charge symétrique, cette équation devient

$$\alpha E V = (C + \lambda E^2)\theta = C\theta\left(1 + \frac{\lambda E^2}{C}\right).$$

Si la valeur de E n'est pas trop grande, la formule usuelle est applicable. Dans le cas général, la sensibilité est variable et passe par un maximum pour la condition $\lambda E^2 = C$.

Une autre manière d'employer l'électromètre consiste à supprimer le couple de torsion, en portant l'aiguille par un fil de cocon, afin de n'utiliser que le couple directeur électrique. La condition d'équilibre se réduit alors à

$$\alpha V = \lambda E \theta.$$

Le zéro reste beaucoup plus fixe, n'étant plus soumis aux irrégularités de la suspension, mais il est alors nécessaire que les potentiels des quadrants soient bien égaux. M. Gouy obtient ce résultat en utilisant la différence de potentiel aux extrémités d'une résistance uniforme, parcourue par un courant, et dont le milieu est au sol; on peut alors mesurer aisément $0^{\text{volt}},001$.

MM. Blondlot et Curie [1] ont encore proposé une modification ingénieuse de l'électromètre à quadrants. Les secteurs fixes sont formés par deux disques parallèles, coupés suivant un plan diamétral, les moitiés en regard étant en communication; l'aiguille est aussi formée de deux demi-cercles isolés l'un de l'autre mais reliés mécaniquement. En outre, les secteurs sont des aimants, de sorte que les oscillations s'amortissent d'une manière très rapide par les courants induits.

L'aiguille est attachée à deux fils de platine tendus haut et bas, qui fixent la position du zéro, produisent le couple de torsion et servent en même temps à établir les communications avec les deux demi-cercles.

En désignant par V_1 et V_2 les potentiels des secteurs fixes, par U_1 et U_2 les potentiels des deux parties de l'aiguille, on trouve aisément que la déviation, tant que les deux fentes ne font pas un angle très aigu, est représentée par une expression de la forme

$$\theta = k(V_1 - V_2)(U_1 - U_2). \tag{16}$$

La symétrie plus complète de l'appareil supprime le couple directeur électrique.

Il est à remarquer ici que la déviation est proportionnelle au produit de deux différences de potentiel, circonstance très avantageuse dans les applications.

(1) R. Blondlot et P. Curie, *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 80; 1889.

Pour utiliser l'appareil comme électromètre ordinaire, on joint l'une des paires d'électrodes à la pile de charge, l'autre paire aux deux points dont on veut déterminer la différence de potentiel.

Si l'on réunit ces électrodes deux à deux de manière que $U_1 = V_1$ et $U_2 = V_2$, l'instrument devient idiostatique et l'on a simplement

$$\theta = k(V_1 - V_2)^2.$$

610. Voltmètres industriels. — Lord Kelvin a imaginé, sur le principe de l'électromètre à quadrants, deux appareils de construction simple, capables d'indiquer des différences de potentiel très élevées pour les applications industrielles.

Dans le *voltmètre électrostatique*, l'aiguille, à bords arrondis, tourne par un couteau mousse autour d'un axe horizontal, entre une seule paire de quadrants opposés, dont la ligne de symétrie est inclinée à 45° sur la verticale, et porte un index qui se déplace devant une graduation. Des contrepoids à vis permettent d'équilibrer l'aiguille de manière que son centre de gravité coïncide sensiblement avec l'axe de rotation; on y ajoute alors une surcharge p qui ramène l'aiguille à la direction verticale.

L'aiguille et la cage de l'appareil étant reliées au sol, on fait communiquer les quadrants à la source de potentiel V; l'aiguille s'incline alors d'un angle α. Il est clair que le carré V^2 du potentiel, pour une déviation donnée, est proportionnel à p; cette propriété permet de graduer l'instrument [1].

Le *voltmètre multicellulaire* est une sorte de multiplication du précédent. Deux séries de 10 quadrants opposés sont portés par des tiges verticales et 10 aiguilles attachées à un même arbre vertical se meuvent dans les intervalles des quadrants. Ce système d'aiguilles est suspendu à un fil métallique et porte un index mobile devant une échelle divisée. La cage, entièrement métallique, est mise en communication avec le sol ainsi que les aiguilles, et les quadrants sont portés au potentiel que l'on veut déterminer; la graduation doit être faite par une méthode empirique.

[1] Voir P. Janet, *Bull. de la Soc. des Électr.*, t. XIII, p. 138; 1896.

Dans les deux cas, la déviation varie d'abord très lentement puis d'une manière plus rapide, à mesure que le potentiel augmente; les appareils sont réglés de manière à servir dans la région où ils présentent la plus grande sensibilité.

611. Méthodes d'oscillations. — Pour vérifier la loi des actions électriques, Coulomb (1) a étudié aussi les oscillations obtenues quand on fait agir une sphère électrisée de grand diamètre sur un petit disque électrisé en sens contraire et attaché à une aiguille suspendue par un fil de cocon.

La distribution de l'électricité sur la sphère n'étant pas troublée d'une manière sensible par celle du disque, l'action qu'elle exerce est en raison inverse du carré de la distance de son centre au disque; comme la période des oscillations est en raison inverse de la racine carrée de la force, elle doit être proportionnelle à la distance.

Cette méthode peut fournir aussi des mesures absolues si on choisit les dimensions de l'appareil de manière que l'action puisse être calculée en fonction des masses électriques ou des potentiels, par exemple, dans le cas où on emploierait des boules de même diamètre (**115**).

Lorsque le phénomène ne comporte pas une grande précision, comme pour la production des étincelles, on aura des résultats très approchés par une disposition analogue à celle de Coulomb (2). Il suffit de substituer à l'aiguille isolante une aiguille conductrice terminée par une petite boule de rayon a' et communiquant au sol par le fil de suspension; sur la direction d'équilibre de l'aiguille on place une sphère A de rayon a électrisée au potentiel V. Si l'on a pris des précautions convenables pour que l'action se réduise à celle des deux sphères et que la distribution de l'électricité sur A ne soit pas sensiblement modifiée par l'électricité induite sur la petite boule, le calcul peut être fait de la manière suivante. Désignant par q et $-q'$ les charges des deux sphères et par d la distance des centres, on aura

$$V = \frac{q}{a} - \frac{q'}{d}, \qquad 0 = \frac{q}{d} - \frac{q'}{a'}.$$

(1) Coulomb, *Mém. de l'Acad. des sciences pour* 1785, p. 581.
(2) Mascart. *Traité d'électricité statique* t. I, p. 52; 1876.

L'attraction réciproque est alors

$$f = \frac{qq'}{d^2} = q^2 \frac{a'}{d^3} = V^2 \frac{a^2 a'}{d(d^2 - aa')}.$$

D'autre part, si n est le nombre d'oscillations de l'aiguille pendant l'unité de temps en l'absence de toute électrisation, N le nombre d'oscillations quand la sphère A est portée au potentiel V, K le moment d'inertie de l'aiguille, l la distance de l'axe au centre de la petite boule, on a

$$(N^2 - n^2)\pi^2 K = fl = V^2 \frac{a^2 a'}{d(d^2 - aa')} l.$$

En déterminant le moment d'inertie K par les méthodes habituelles (**546**), cette équation donnera le potentiel V en fonction des dimensions de l'appareil.

Il serait nécessaire de compléter ce calcul si on voulait utiliser la méthode pour des expériences précises ; nous y reviendrons plus loin en traitant à un autre point de vue le problème des deux sphères.

612. Électromètres à décharges. — La production d'une étincelle entre deux conducteurs équivaut à une communication momentanée (**6**) et au débit d'une quantité d'électricité qui dépend de la capacité des corps en présence.

L'étincelle est provoquée, en général, par des valeurs déterminées du potentiel sur chacun des conducteurs; nous signalerons seulement cette propriété importante que, si la distance des conducteurs est très petite par rapport à leurs dimensions, l'étincelle ne dépend que de la *différence* des potentiels, quelles que soient leurs valeurs absolues.

Les variations de la *distance explosive* peuvent ainsi servir à la comparaison des potentiels, si l'on connaît les lois du phénomène; nous examinerons d'abord le cas où cette distance est maintenue invariable.

L'appareil le plus employé est la *bouteille de Lane;* c'est une jarre électrique dont l'armature extérieure communique avec une boule B (fig. 161) que l'on peut, au moyen d'une vis micrométrique, rapprocher plus ou moins de la boule A qui

[illegible] de l'armature intérieure. Si δV est la différence de potentiel maximum entre les boules et c la capacité de la jarre, chaque étincelle correspond à l'écoulement d'une quantité d'électricité $q = c\delta V$, qui croît avec l'écartement des boules et sert d'unité dans les expériences comparatives.

La bouteille de Lane est surtout utilisée pour évaluer la charge des batteries : l'expérience peut être disposée de plusieurs manières différentes.

1° La batterie étant isolée, on joint l'armature intérieure à une source d'électricité, l'armature extérieure au bouton A de la bouteille de Lane et le conducteur B au sol. Soit C la capa-

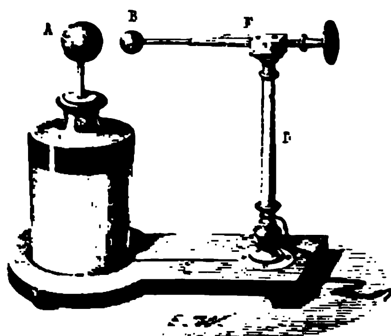


Fig. [illegible]

cité de la batterie, V son potentiel intérieur et $V' < V$ le potentiel qui reste sur l'armature intérieure quand la bouteille de Lane a fourni [illegible] décharges, en supposant que la communication avec la source n'ait pas été interrompue aussitôt après la dernière étincelle.

La charge intérieure de la batterie est $Q = C(V - V')$ [illegible] celle de l'armature extérieure, en y comprenant la bouteille de Lane est [illegible]. Le débit total par les étincelles avant [illegible] a donc

$$[illegible] \; \frac{[illegible]}{C} - \frac{[illegible]}{C} V.$$

[illegible]

[illegible]

2° On peut isoler la bouteille de Lane et la placer sur le trajet de la source à l'armature intérieure de la batterie dont l'armature extérieure est au sol. Dans ce cas, chaque étincelle correspondant à la même différence de potentiel v ou à la charge q, la charge de la batterie est simplement nq et l'équation (17) s'applique exactement.

3° Enfin, si la source a deux pôles de signes contraires, comme la machine de Holtz et les machines analogues, on peut isoler les deux pôles en les réunissant séparément aux armatures de la batterie et plaçant la bouteille de Lane sur le trajet de l'une des communications; la quantité V désignera alors la différence de potentiel des deux armatures.

Toutefois, la décharge ultérieure de la batterie ne rend pas immédiatement la quantité totale d'électricité mesurée par la bouteille de Lane, à cause des résidus (**172**), et la différence de potentiel finale ne correspond pas en toute rigueur à l'équation (17). C'est là une cause d'erreur qu'il faut éliminer dans les expériences par des précautions convenables.

Si on relie, par exemple, les armatures de la batterie aux deux branches d'un excitateur et que la machine fonctionne d'une manière continue, on voit que le nombre n_0 des étincelles de la bouteille de Lane pour la première décharge est plus grand que le nombre n relatif aux suivantes, lequel reste sensiblement invariable; c'est à ce dernier nombre que correspondent la charge Q utilisée et la différence de potentiel V. La charge résiduelle $(n_0 - n)q$ est une fraction à peu près constante de la charge totale $n_0 q$.

Dans un grand nombre de travaux ingénieux sur les condensateurs, sur la propagation de l'électricité à l'état permanent ou à l'état variable, sur l'analogie des courants continus et des flux de force électrostatiques, etc., Gaugain a fait usage d'un instrument analogue, l'*électroscope à décharges*, qui permet d'évaluer de très petites quantités d'électricité. C'est un électroscope à feuilles d'or (fig. 162) muni, dans le plan de divergence des feuilles et à portée de l'une d'elles, d'une boule A reliée avec le sol; pour une charge suffisante, le contact a lieu et l'instrument est déchargé.

Si l'électricité afflue d'une manière continue, il se produit une succession de décharges toutes identiques entre elles, à

la condition que la feuille d'or retombe aussitôt après le contact. Quand on veut mesurer la charge d'un corps électrisé, il est bon, pour ralentir la décharge, de relier ce corps à l'électroscope par un mauvais conducteur tel qu'un fil de coton. En général, l'expérience ne produit pas une décharge complète et il reste sur l'ensemble des conducteurs une charge résiduelle incapable d'écarter la feuille d'or jusqu'au contact du conducteur voisin ; ce résidu peut être évalué par divers procédés dans le détail desquels nous n'entrerons pas (¹).

Si le fil de coton fait communiquer l'instrument, non avec un corps électrisé, mais avec une source à potentiel constant, ou tout au moins avec un conducteur de grande capacité tel qu'une batterie, le nombre des décharges dans chaque unité

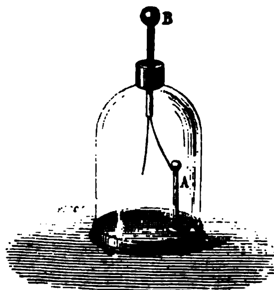


Fig. 162.

de temps mesure le *débit* d'électricité et, par conséquent, l'intensité du courant qui traverse le fil.

D'autre part, si le potentiel de la source est très élevé par rapport au potentiel variable de la feuille d'or pendant les alternatives d'isolement et de décharge, le débit est proportionnel au potentiel de la source ; cette expérience fournit ainsi une méthode très simple pour comparer des potentiels de l'ordre de ceux que l'on a à considérer dans les phénomènes d'électricité statique.

En mettant l'électroscope à décharges en communication avec un cylindre conducteur fermé (40, VII) on pourrait aussi comparer des charges électriques ; pour évaluer le partage

(¹) Voir MASCART, *Traité d'électricité statique*, t. I, p. 417 ; 1876.

lectricité entre deux corps, par exemple, il suffirait de ·ter le nombre de décharges que donne chacun d'eux d on l'introduit lentement dans le cylindre.

électroscope à décharges est un des appareils les plus :s dans les expériences de cours et ne semble pas avoir suffisamment apprécié.

13. **Électromètre capillaire**. — Les phénomènes électro-

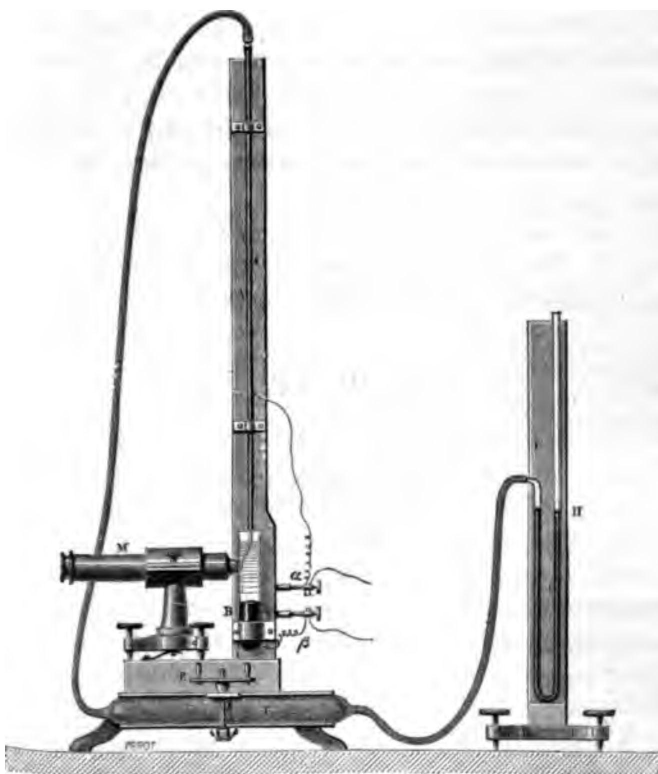


Fig. 163.

llaires (**196**) ont été mis à profit par M. Lippmann pour ·truire un instrument délicat, qui permet de déterminer la rence de potentiel entre deux points, à la condition que différence ne dépasse pas 0,9 volt.

ppareil se compose d'un tube A (fig. 163) terminé infé-ement par une pointe très effilée; ce tube, ouvert aux deux ;, contient une colonne de mercure suspendue par la ten-

sion capillaire. Un vase plus large renferme du mercure B et de l'eau acidulée par un cinquième d'acide sulfurique dans laquelle plonge la pointe capillaire; deux fils de platine α et β, reliés l'un avec le mercure du tube, l'autre avec le mercure du vase, constituent les électrodes. Quand on joint directement ces deux électrodes, le mercure s'arrête dans le tube capillaire, dont le diamètre est variable, à un niveau que l'on détermine par un repère du microscope M. Si l'on réunit séparément les électrodes à deux points entre lesquels existe une différence de potentiel de signe convenable, la polarisation augmente la constante capillaire du mercure et la colonne se relève; on la ramène au niveau primitif en exerçant une pression compensatrice à la partie supérieure du tube A au moyen d'une poire de caoutchouc T.

La pression compensatrice p est mesurée par un manomètre latéral H; elle est liée à la pression primitive p_0 et aux tensions capillaires correspondantes A et A_0 par la relation

$$(18) \qquad p = p_0 \frac{A - A_0}{A_0}.$$

A mesure qu'on fait croître la différence de potentiel des électrodes, ou la force électromotrice qui existe entre elles, la pression compensatrice lui est d'abord proportionnelle, puis passe par un maximum et diminue ensuite.

La table suivante a été calculée pour la pression initiale p_0 représentée par une colonne de mercure de 75 centimètres; la force électromotrice est évaluée en fractions de celle d'un couple Daniell.

Force électromotrice.	Accroissement pression.	Force électromotrice.	Accroissement pression.
0,016	1,5	0,500	28,8
0,024	2,15	0,588	31,4
0,040	4,0	0,833	35,65
0,109	8,9	0,900	35,85
0,140	11,1	0,909	35,85
0,170	13,1	1,000	35,3
0,197	14,8	1,261	30,1
0,269	18,85	1,444	23,9
0,364	23,5	1,833	11,0
0,450	27,05	2,000	9,4

Il importe que l'électrode α qui correspond au tube capillaire soit toujours négative, afin d'éviter l'oxydation du mercure; il faut aussi veiller à ce que le tube capillaire soit bien mouillé par l'eau acidulée, ce qu'on obtient en faisant osciller légèrement la colonne de mercure.

Plusieurs dispositions ont été imaginées par différents observateurs pour réduire les dimensions de l'appareil ou augmenter la précision des lectures.

L'électromètre capillaire est particulièrement précieux pour constater l'égalité de deux potentiels. Le modèle construit par M. Limb [1], par exemple, permettait de constater une différence de $0^v,00005$ et même, dans certains cas, de $0^v,00002$.

La variation de pression ou de forme des surfaces dans l'électromètre capillaire correspond à une polarisation des électrodes (**182**) et la question de capacité ne se présente pas d'une manière aussi simple que pour les appareils purement électrostatiques.

On a vu (**196**) qu'en appelant S la surface de contact du mercure avec de l'eau acidulée, l'accroissement de charge dq relative à une variation dx de la différence de potentiel peut s'écrire

$$(19)\qquad dq = X\,dS + YS\,dx = -\frac{\partial A}{\partial x}\,dS - S\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\,dx.$$

Le mercure ayant été d'abord ramené au repère par une pression compensatrice pour la différence de potentiel x, la variation de surface tient au relèvement dy du mercure dans la partie capillaire dont le rayon est r et l'on a $-dS = 2\pi r\,dy$; il est clair que cette variation est proportionnelle à dA et peut s'écrire $-dS = K\,dA$.

La capacité C de l'électromètre serait alors

$$(20)\qquad C = \frac{dq}{dx} = K\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 - S\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

Par des expériences directes sur des appareils de forme thermométrique, dans lesquelles le niveau du mercure demeu-

(1) LIMB, *Ann. de Chim. et de Phys.* [7], t. VIII, p. 220; 1896.

rait invariable, auquel cas la capacité se réduisait au second terme, proportionnel à la surface, M. Bouty ([1]) a reconnu que pour des valeurs de x voisines de zéro, la capacité a varié de 0,2 à 0,8 microfarad suivant la valeur de S. Pour un électromètre dont le diamètre est environ 12 fois moindre, le dernier terme de l'équation (20) serait de l'ordre de $0^{mf},05$, tandis que la capacité totale était voisine de $0^{mf},6$. Lorsque les valeurs sont de x très petites, la capacité C se réduit donc sensiblement au premier terme.

On a d'ailleurs, par la relation qui existe entre la tension capillaire A et la différence de potentiel

$$A = A_0(1 + ax - bx^2),$$
$$C = A_0[K(a - 2bx)^2 + 2Sb];$$

le premier terme de la parenthèse s'annule quand la tension capillaire devient maximum.

En exprimant la valeur de x en Daniells et prenant pour unités la capacité relative à $x = 0$, M. Bouty a trouvé, par exemple,

x	0	0,02	0,04	0,08	0,16	0,3	0,6
C	1	0,879	0,782	0,590	0,421	0,178	0,061

Une capacité de $0^{mf},1$ vaut $10^{-16}.3^2.10^{20} = 9.10^4$ unités électrostatiques, c'est-à-dire celle d'une sphère de 900 mètres de rayon. C'est là un obstacle à l'emploi de l'électromètre capillaire dans les expériences d'électrostatique.

614. Appareils à quartz. — MM. Curie ([2]) ont imaginé deux appareils très ingénieux, un mesureur de charge et un électromètre, basés sur les propriétés du *quartz* (**511** et **514**).

Le mesureur de charge, ou *quartz piézoélectrique*, se compose d'une lame rectangulaire dont l'épaisseur a est parallèle à un axe binaire électrique et la longueur b perpendiculaire à cet axe binaire et à l'axe optique; les deux faces de la lame

([1]) BOUTY, *Journ. de Phys.* [3], t. III, p. 371; 1894.

([2]) J. et P. CURIE, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. XVII, p. 385; 1889. — *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 149; 1889.

sont argentées ou couvertes de feuilles d'étain, sauf une partie dénudée qui sert à l'isolement. Cette lame est fixée à la partie supérieure dans une monture en étain et porte une tige à crochet où pend un plateau que l'on peut charger de poids. Le tout est enfermé dans une boîte métallique percée d'ouvertures qui laissent passer les électrodes et la tige de suspension du plateau.

Si P est le poids total que porte la lame, les quantités d'électricité $\pm q$ dégagées sur les deux faces sont $q = k\frac{b}{a}P$, c'est-à-dire proportionnelles à la longueur b de la lame couverte, en raison inverse de son épaisseur a et indépendantes de la largeur; cette dernière dimension n'a d'autre but que d'augmenter la résistance à la traction.

Le coefficient k étant égal à $6,32.10^{-8}$, la charge électrique correspondant au poids d'un kilogramme, par exemple, sera

$$q = 6,32.10^{-8}.\frac{b}{a}10^3.g = \frac{b}{a}6,2.10^{-2},$$

c'est-à-dire 6,2 unités électrostatiques, si la longueur est 100 fois l'épaisseur.

On peut ainsi obtenir des charges électriques déterminées en valeur absolue, mais la méthode convient surtout pour des expériences comparatives; elle présente l'avantage que le changement des poids peut être fait très rapidement, de manière à éliminer en grande partie toutes les causes de déperdition.

Dans le second appareil, *électromètre à bilame*, on utilise les dilatations électriques par le même artifice que pour le thermomètre bimétallique.

Deux lames de quartz, de même coupe que la précédente, réduites à l'épaisseur de quelques centièmes de millimètre, sont collées au baume de Canada après avoir retourné l'une d'elles face pour face, de façon que leurs axes électriques soient opposés; les surfaces extérieures sont ensuite argentées.

Si l'on établit une différence de potentiel entre les faces argentées, l'une des lames tend à s'allonger et l'autre à se raccourcir; il en résulte une flexion du système proportionnelle à la différence des potentiels.

On peut encore coller les lames entre elles, de maniè que leurs axes électriques restent de même sens, si l'on soin d'argenter aussi leur surface commune. Les couche extrêmes étant mises en communication au sol et la couch intermédiaire portée à un certain potentiel, les champs éle triques sont de directions opposées et les lames se déformer encore en sens contraires; toutes choses égales, la sensibilit est même doublée.

Pour observer la flexion de cette bilame, on la fixe pa l'une de ses extrémités de manière que la largeur *c* parallèle l'axe optique soit verticale et on munit l'autre extrémité d'un aiguille terminée par une échelle micrométrique; cette aiguill est formée par une charpente en fils de verre disposés suivai les arêtes d'une pyramide quadrangulaire, disposition à la fo légère et rigide; on vise le micromètre avec un microscope.

L'électromètre à bilame est toujours destiné à mesurer de potentiels très élevés. Avec des lames d'un huitième de mi limètre d'épaisseur et 8^c de longueur, l'instrument est sei sible à 5 volts et peut servir jusqu'à 1000 ou 1500 volts. De bilames d'épaisseur totale de 1^{mm} peuvent mesurer, à 20 volts près, des différences de potentiel de 50000 volts.

Les appareils à quartz présentent dans ces conditions u isolement remarquable, car le cristal ne possède de conducti bilité notable que suivant l'axe optique, lequel est perpen diculaire à l'épaisseur des lames employées.

CHAPITRE DEUXIÈME

MESURE DES COURANTS

615. **Différentes méthodes**. — On peut évaluer l'intensité d'un courant, soit par une mesure directe du débit (**612**) sous forme d'étincelles successives, soit par l'un quelconque des effets physiques qui l'accompagnent, tels que la chaleur dégagée sur un conducteur en vertu de la loi de Joule, l'échauffement local d'une soudure, les actions chimiques, etc.; mais on utilise surtout les propriétés électromagnétiques des courants, qui donnent des méthodes d'observation plus rapides et susceptibles d'une grande précision (**362**).

L'idée du galvanomètre est due à Ampère [1]. Le courant I traverse une bobine, ou cadre multiplicateur [2], et produit en un point un champ magnétique GI, le facteur G étant la constante galvanométrique du cadre en ce point.

Une aiguille aimantée infiniment petite de moment magnétique M, dont l'axe fait l'angle β avec la direction du champ GI, serait soumise au couple MGI $\sin\beta$.

Si l'aiguille, au lieu d'être entièrement libre, est astreinte à tourner autour d'un axe, vertical par exemple, le couple de rotation s'obtiendra en remplaçant les quantités M et G par leurs composantes perpendiculaires à cet axe.

Lorsque l'aiguille a des dimensions finies, le champ du courant n'est pas le même dans tout l'espace qu'elle occupe. Le facteur G représente alors une valeur moyenne qui dépend en même temps de la longueur de l'aiguille, de la distribution

(1) Ampère, *Ann. de Ch. et de Phys.* [2], t. XV, p. 59; 1820.
(2) Schweigger, *Allgemeine Litteraturzeitung*, n° 296; nov. 1820.

du magnétisme et de l'angle β; on peut le représenter par $G_0(1+\gamma)$, G_0 désignant la constante relative au centre de l'aiguille et γ un terme de correction.

Pour déterminer le champ GI du courant ou comparer les champs GI et GI' de deux courants différents, c'est-à-dire les intensités I et I', on peut d'abord, comme l'ont fait Biot et Savart (**315**), observer les oscillations de l'aiguille. En désignant par K son moment d'inertie, la durée τ des oscillations simples infiniment petites dans un champ F et le nombre N d'oscillations pendant le temps t sont

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{K}{MF}}, \qquad N^2 = \frac{t^2}{\tau^2} = \frac{t^2}{\pi^2}\cdot\frac{MF}{K}.$$

C'est une des méthodes employées pour déterminer la composante H du champ terrestre; on y reviendra plus loin.

Dans le cas actuel, le cadre étant disposé de manière que le champ GI du courant soit parallèle à H, on soumet l'aiguille successivement aux champs H et et H + GI; les nombres correspondants n et N d'oscillations pendant le même temps donnent la relation

$$\frac{n^2}{H} = \frac{N^2}{H+GI} = \frac{N^2-n^2}{GI}.$$

Deux courants I et I' sont ainsi dans le rapport des quantités N^2-n^2 et N'^2-n^2. Toutefois l'aimantation induite sur l'aiguille intervient dans le phénomène et on ne peut admettre en toute rigueur que, pour des champs très inégaux, la valeur effective du moment magnétique reste invariable.

Dans les galvanomètres proprement dits, l'aiguille est soumise à un champ extérieur H et le cadre est dirigé de manière que le champ GI soit incliné sur le premier; l'aiguille prend une direction telle que les couples produits par le courant et le champ extérieur soient égaux et de signes contraires.

Si les deux champs sont rectangulaires et sensiblement uniformes dans l'espace occupé par l'aiguille, la déviation δ due au courant donne

$$(1) \qquad HM\sin\delta = GIM\cos\delta, \qquad I = \frac{H}{G}\operatorname{tang}\delta.$$

Dans le cas général, l'aiguille est trop longue pour que le champ GI puisse être considéré comme uniforme et le champ extérieur est produit ou modifié par des aimants.

Si l'on désigne par H et G les valeurs relatives au milieu de l'aiguille, l'expression du courant peut s'écrire

$$(2) \qquad I = \frac{H}{G} f(\delta).$$

La fonction $f(\delta)$ se réduit d'abord à l'angle δ tant que les écarts restent assez faibles. Les galvanomètres sont à graduation systématique ou empirique, suivant que la forme de cette fonction est définie par la disposition de l'appareil ou qu'on doit la déterminer par expérience.

Lorsque cette fonction est connue, la détermination des constantes H et G permettra de mesurer le courant en valeurs absolues.

L'aiguille est quelquefois portée sur un pivot avec une chape en agate; le frottement, si faible qu'il soit, peut l'empêcher d'atteindre sa position d'équilibre et l'on doit s'assurer qu'elle y revient exactement après de petites déviations.

Il est préférable de porter cette aiguille par un fil de cocon ou un paquet de fils; l'équilibre est encore troublé par la torsion du système, mais cette cause d'erreur s'élimine facilement dans les observations.

L'aimant peut être remplacé par un cadre mobile parcouru par le courant I. Si S est la surface du circuit projetée sur le plan moyen, son moment magnétique est SI. L'action du champ extérieur H est proportionnelle au produit HSI; c'est le principe des galvanomètres *à cadres mobiles*.

Enfin lorsque le champ extérieur est lui-même produit par un courant I et qu'un autre courant I′ parcourt le cadre mobile, l'action réciproque est proportionnelle au produit II′ des deux courants; on utilise cette propriété dans les *électrodynamomètres*.

616. Appareils de torsion. — Supposons que l'aimant d'un galvanomètre soit suspendu à un fil métallique dont le coefficient de torsion est C, et que le champ extérieur efficace H fasse l'angle β avec l'axe du cadre. L'appareil étant réglé de manière que le fil soit sans torsion lorsque l'aimant n'est

soumis qu'au champ extérieur, le passage du courant tend dévier l'aimant; par une torsion θ du fil on ramène l'aimant dans sa position primitive. L'équation d'équilibre est alors

$$(3) \qquad \text{IMG}\sin\beta = \text{C}\theta, \qquad \text{I} = \frac{\text{C}}{\text{MG}\sin\beta}\theta.$$

Comme la position relative de l'aimant et du cadre reste invariable, le facteur $\text{G}\sin\beta$ est constant, de sorte que le courant est simplement proportionnel à la torsion θ.

Lorsque le réglage est imparfait, on peut rectifier l'appareil par la condition qu'en remplaçant l'aimant par un barreau de cuivre du même poids la position d'équilibre ne soit pas modifiée, mais ce contrôle n'est pas nécessaire. Si l'aiguille fait d'abord l'angle α_0 avec le champ extérieur, comme si le fil avait reçu une torsion préalable θ_0, la même équation (3) se retrouve par la différence des équations suivantes, qui correspondent aux équilibres primitif et final :

$$(4) \qquad \text{HM}\sin\alpha_0 = \text{C}(\theta_0 - \alpha_0),$$

$$(5) \qquad \text{IMG}\sin\beta + \text{HM}\sin\alpha_0 = \text{C}(\theta + \theta_0 - \alpha_0).$$

Cette méthode, employée par Ohm ([1]), a surtout l'inconvénient d'exiger une manipulation qui trouble l'appareil chaque fois que l'on touche au fil pour arriver à la position de repère; il faut ensuite attendre que les oscillations s'amortissent, ce qui entraîne des pertes de temps. En outre, si les courants ne sont pas absolument invariables, il est nécessaire de procéder à une série d'épreuves alternatives pour en éliminer les variations.

On peut encore déterminer les erreurs de réglage α_0 et θ_0. L'appareil n'étant soumis qu'au champ extérieur, on donne au fil deux torsions différentes θ et θ', pour lesquelles on observe les déviations correspondantes α et α'.

Les équations d'équilibre deviennent

$$\text{HM}\sin(\alpha + \alpha_0) = \text{C}(\theta + \theta_0 - \alpha_0 - \alpha),$$

$$\text{HM}\sin(\alpha' + \alpha_0) = \text{C}(\theta' + \theta_0 - \alpha_0 - \alpha').$$

([1]) Ohm, *Pogg. Ann.*, t. IV, p. 79; 1825.

En les combinant avec (4), on en déduirait les angles θ et α_0, ainsi que le rapport ε du coefficient C au couple directeur MH. Si l'écart primitif α_0 est assez petit pour que le carré soit négligeable, on trouve alors

$$\varepsilon = \frac{C}{MH} = \frac{\sin\alpha' \sin^2\frac{\alpha'}{2} - \sin\alpha \sin^2\frac{\alpha}{2}}{(\theta' - \alpha')\sin^2\frac{\alpha'}{2} - (\theta - \alpha)\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Enfin, lorsque les angles α et α' sont eux-mêmes très petits, il reste simplement

(6) $$\varepsilon = \frac{C}{MH} = \frac{\alpha}{\theta - \alpha}.$$

On utilisera cette relation (6) pour déterminer la valeur du rapport ε relative à la suspension des aimants dans les galvanomètres. Un moyen très simple de produire alors la torsion auxiliaire θ, sans l'emploi d'un cercle gradué, consiste à faire tourner l'équipage d'une circonférence entière par un aimant extérieur, auquel cas $\theta = 2\pi$. Ce genre de correction n'est d'ailleurs nécessaire que si l'on veut évaluer les courants en mesures absolues.

La suspension bifilaire conduirait à des calculs analogues; nous y reviendrons à propos des cadres mobiles.

617. **Boussole des sinus.** — Dans la boussole des sinus, imaginée par Pouillet [1], la position relative de l'aiguille et du cadre est maintenue invariable et on donne à l'ensemble du système une direction telle que l'action de la Terre et celle du courant se fassent équilibre.

L'instrument se compose d'un cadre qui peut tourner autour d'un axe vertical sur un cercle gradué; l'aiguille repose sur un pivot au centre du cadre, et un repère permet de constater que, dans les différentes expériences, elle se trouve ramenée à la même position par rapport au cadre. A cet effet, l'aiguille porte, par exemple, une lame d'ivoire perpendiculaire à sa direction, sur laquelle est marqué un trait qui se meut en face d'une échelle divisée.

[1] Pouillet, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. IV, p. 267; 1837.

En appelant δ l'angle dont on a tourné l'appareil pour ramener l'aiguille à sa position de repère, quand le cadre est parcouru par le courant I, et β l'angle constant de l'aiguille avec l'axe du cadre, on a

$$\mathrm{IMG}\sin\beta = \mathrm{MH}\sin\delta,$$

$$(7) \qquad \mathrm{I} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}\sin\beta}\sin\delta = \mathrm{I}_0\sin\delta.$$

Le courant est proportionnel au *sinus* du déplacement du cadre. La méthode ne permet pas de mesurer des courants dont l'intensité soit supérieure à $\mathrm{I}_0 = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}\sin\beta}$, mais on peut augmenter cette valeur limite, autant qu'on le veut, en faisant varier l'angle β qui détermine le choix du repère.

La boussole des sinus n'est guère employée à cause de la nécessité de toucher à l'instrument pour chaque observation; on peut l'utiliser avec avantage pour la graduation comparative des galvanomètres ordinaires.

M. Th. Gray [1] a fait de cette boussole un instrument absolu en plaçant une petite aiguille au centre d'une bobine longue à enroulement simple. D'après l'équation (37) du n° 571, on a alors

$$\mathrm{G} = 4\pi n\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{b^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^4}{b^4} - \dots\right).$$

Le troisième terme de la série est déjà négligeable quand la longueur de la bobine est 10 fois son diamètre. La bobine est montée sur un cercle gradué; à l'une des extrémités se trouve une échelle divisée, à l'autre une lunette. L'aiguille porte un miroir et l'image de l'échelle se réfléchit sur un second miroir fixe dans lequel on vise avec la lunette; l'une des divisions de l'échelle sert de repère. On s'assure d'abord que l'aiguille est sensiblement perpendiculaire à l'axe de la bobine, $\beta = 90°$, en vérifiant que des courants de sens contraires produisent les mêmes déviations de part et d'autre.

[1] TH. GRAY. *Ph. Mag.* [5], t. XXII, p. 368; 1886. — *J. de Phys.* [2], t. VI, p. 247; 1887.

L'équation (7) donne alors le courant I en fonction de la composante H du champ terrestre.

618. Boussole des tangentes. — Lorsque le champ électromagnétique GI et le champ extérieur H sont rectangulaires et tous deux uniformes dans la région occupée par l'aimant mobile, le courant I est proportionnel, d'après l'équation (1), à la *tangente* de la déviation.

La boussole des tangentes, que l'on doit aussi à Pouillet, a été fréquemment employée pour la mesure absolue des courants; il est alors nécessaire de faire toutes les corrections de réglage.

Si le champ GI fait l'angle $\beta = 90° - \alpha$ avec la direction du champ extérieur H, on déterminera les deux déviations δ et δ' de sens contraires qui correspondent aux directions opposées du courant dans la bobine.

On déduit alors des équations d'équilibre

$$(8) \qquad GI\cos(\delta + \alpha) = H\sin\delta, \qquad GI\cos(\delta' - \alpha) = H\sin\delta',$$

$$(9) \qquad GI\cos\left(\frac{\delta - \delta'}{2} + \alpha\right) = H\tang\frac{\delta + \delta'}{2}\cos\frac{\delta - \delta'}{2}.$$

Lorsque la différence $\delta' - \delta$ est assez petite pour qu'on en puisse négliger le carré, l'angle α est du même ordre de grandeur, et on a sensiblement

$$(9)' \qquad I = \frac{H}{G}\tang\frac{\delta + \delta'}{2}.$$

Il suffit alors de considérer, comme déviation normale, la moyenne des deux lectures δ et δ'. On obtiendrait d'ailleurs, par l'élimination de l'angle α entre les équations (8),

$$I^2 = \frac{H^2}{G^2}\frac{(\mathrm{tg}\,\delta' - \mathrm{tg}\,\delta)^2 + 4\,\mathrm{tg}^2\delta\,\mathrm{tg}^2\delta'}{(\mathrm{tg}\,\delta' + \mathrm{tg}\,\delta)^2}.$$

En outre, si la torsion du fil qui porte l'aiguille n'est pas ...égligeable, on déterminera (616) le rapport ε du coefficient C ... couple directeur MH. En appelant α_0 l'angle primitif de

l'aiguille avec le méridien et θ_0 la torsion correspondante, la première équation d'équilibre devient

$$\mathrm{IMG}\cos(\delta + \alpha + \alpha_0) = \mathrm{MH}\sin(\delta + \alpha_0) + \mathrm{C}(\delta + \theta_0 - \alpha_0).$$

Remplaçant C par εMH et opérant de même pour la seconde observation, on aura

$$\mathrm{IG}\cos(\delta + \alpha + \alpha_0) = \mathrm{H}[\sin(\delta + \alpha_0) + \varepsilon(\delta + \theta_0 - \alpha_0)],$$
$$\mathrm{IG}\cos(\delta' - \alpha - \alpha_0) = \mathrm{H}[\sin(\delta' - \alpha_0) + \varepsilon(\delta' - \theta_0 + \alpha_0)].$$

Lorsque les écarts $\alpha - \alpha_0$ sont très petits, il en est de même pour la différence $\delta - \delta'$; on en déduit, en négligeant les termes de second ordre,

$$(9)\qquad \frac{\mathrm{IG}}{\mathrm{H}} = \tang\frac{\delta + \delta'}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\delta + \delta'}{\cos\dfrac{\delta + \delta'}{2}}.$$

Pour une bobine à gorge rectangulaire, la constante galvanométrique G_0 relative au milieu de l'aiguille est donnée par l'une des équations (10) ou (11) du n° 560, suivant qu'elle est au centre de la bobine ou excentrée sur l'axe à la distance x; on remplacera alors G dans l'expression du courant par $G_0(1 + \gamma)$. Si le défaut de centrage x et la longueur magnétique $2l$ de l'aiguille sont assez petits pour qu'on puisse se borner aux termes de second ordre, la correction γ est, en appelant a le rayon moyen de la bobine (574),

$$(10)\qquad \gamma = \frac{5\sin^2\delta\ [illegible]}{4}\ [illegible]\ \frac{3}{4}(1 - 5\sin^2\delta)\frac{a^2 - 4x^2}{4}\cdot\frac{l^2}{a^2},$$

et, pour une aiguille centrée,

$$(11)\qquad \gamma = \frac{3}{4}(1 - 5\sin^2\delta)\frac{l^2}{a^2}.$$

La longueur $2l$ est assez difficile à évaluer en général, mais pour un barreau court et cylindrique on peut admettre (576)

que le pôle est situé au tiers de la demi-longueur à partir de chaque extrémité.

Lorsque l'angle δ varie de zéro à 45°, la valeur absolue du facteur $1 - 5\sin^2\delta$ reste inférieure à 1,5. Si donc le rapport $\frac{l^2}{a^2} = \lambda$ est de l'ordre des erreurs expérimentales, ou du moins de l'approximation que l'on veut atteindre, la loi des tangentes sera applicable dans le même intervalle.

Dans l'instrument primitif de Pouillet, le cadre était formé par un cercle unique de 25 à 30 centimètres de diamètre, avec une aiguille de 7 à 8 centimètres de longueur posée sur un pivot et portant un index mobile sur un cercle gradué; le rapport λ était alors d'environ 0,08 et le terme de correction de même ordre.

L'inexactitude de la loi des tangentes dans cet appareil fut d'abord mise en évidence par les expériences de Despretz [1]; Blanchet a calculé les termes de correction.

Les variations correspondantes du courant et de la déviation donnent, avec la formule simple (1),

$$dI = \frac{H}{G}\frac{\cos^2\delta}{d\delta}, \qquad \frac{dI}{I} = \frac{2}{\sin 2\delta}\,d\delta.$$

Pour une même variation relative du courant, le déplacement de l'aiguille est proportionnel à $\sin 2\delta$. La condition la plus favorable correspond donc aux déviations voisines de 45°, pour lesquelles $GI = H$; le déplacement $d\delta$ est alors la moitié de la variation relative du courant. Entre les déviations de 30° et 60°, où le courant varie du simple au triple, la sensibilité reste à peu près la même.

Afin d'étendre les limites d'observation, Bertin [2] place le cadre à 45° du champ extérieur et dirige le courant de manière que l'aiguille soit ramenée vers le cadre. On a alors

$$H\sin\delta = GI\sin(45° + \delta) = \frac{GI}{\sqrt{2}}(\cos\delta + \sin\delta),$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{d\delta}{\sin\delta(\sin\delta + \cos\delta)}.$$

(1) DESPRETZ, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XXXV, p. 449; 1852.
(2) BERTIN, *Ann. de Ch. et de Phys.* [4], t. XVI, p. 25; 1869.

Entre les déviations de 45° et 90°, le dénominateur de la dernière fraction reste voisin de l'unité; la sensibilité relative est doublée et l'appareil convient à des courants plus inégaux. Toutefois cette disposition ne permet plus aussi facilement d'éliminer les défauts de réglage.

M. Grassi (¹) a proposé d'employer deux cadres rectangulaires, dont nous désignerons les nombres de tours par N et N', les rayons moyens étant a et a'. Le plan du premier étant parallèle au champ extérieur, la condition d'équilibre, abstraction faite des termes de correction, est

$$H \sin\delta = 2\pi I \left(\frac{N \cos\delta}{a} + \frac{N' \sin\delta}{a'} \right) = 2\pi I \frac{N}{a} \left(\cos\delta + \frac{N'a}{Na'} \sin\delta \right),$$

$$I = \frac{Ha}{2\pi N} \frac{\sin\delta}{\cos\delta + \frac{N'a}{Na'} \sin\delta} = \frac{Ha}{2\pi N} \frac{\sin\delta}{\cos\delta + p \sin\delta}.$$

Si les cadres sont identiques, ou $p = 1$, les conditions de sensibilité sont les mêmes que dans le cas précédent.

Dans la boussole employée par Joule (²), l'aiguille, formée d'un petit barreau de 5 à 6 millimètres de longueur, était suspendue par un fil de cocon au centre d'un cadre de 15 centimètres de diamètre; la correction est alors voisine de 0,001 même avec une déviation de 45°. Pour la lecture des déviations, l'aiguille portait un fil de verre dont l'extrémité se déplaçait au-dessus d'un cercle gradué. Le frottement de ce fil dans l'air produit un amortissement énergique et la moyenne des lectures, après inversion du courant, donnait la mesure de la déviation avec une erreur moindre que 2'.

On préfère maintenant disposer les appareils de manière à obtenir des déviations très petites, sauf à rendre les lectures plus précises par la méthode du miroir; la valeur de γ est alors sensiblement constante.

La bobine de Gaugain (575), à enroulement conique, supprime le terme de correction du second ordre quand l'ai-

(¹) GRASSI, *Nuovo Cimento*, t. XXX, p. 120; 1891. — *Journ. de Phys.* [3], t. I, p. 576; 1893.
(²) JOULE, *Brit. Ass. Rep.*, Cork, 1843; *Scientific. papers*, t. I, p. 404.

guille est située au sommet du cône; ce mode de construction présente des difficultés pratiques et une dissymétrie qui l'ont bientôt fait abandonner.

Les deux cadres égaux de Von Helmholtz (**576**) font disparaître le terme du second ordre quand la distance des cadres est égale au rayon moyen, et même le terme du quatrième ordre qui dépend de la bobine, par un rapport convenable des dimensions des gorges.

Enfin les bobines à plusieurs cadres (**577** et **578**) donnent encore d'autres solutions pour obtenir que le champ électromagnétique soit sensiblement uniforme, mais ces dispositions paraissent avoir été rarement utilisées.

W. Weber [1] a placé aussi l'aiguille aimantée en dehors de la bobine et dans une position principale, sur l'axe ou dans le plan moyen, l'axe étant d'ailleurs perpendiculaire au méridien; on peut alors utiliser les formules du n° **559**.

619. Remarques générales. — Dans la plupart des applications on cherche surtout à obtenir une grande sensibilité, en même temps que des lectures rapides et faciles.

Si le champ électromagnétique GI fait l'angle β avec le champ extérieur H, la déviation δ satisfait à la relation

$$GI \sin(\beta - \delta) = H \sin \delta.$$

Tant que les écarts sont très faibles, les facteurs G et H restent constants; la déviation relative à un courant déterminé est proportionnelle à G et en raison inverse de H.

Pour augmenter la constante galvanométrique G du cadre, il faut rapprocher les spires autant que possible de l'aiguille et donner à la gorge une forme telle que le contour soit voisin de la courbe $u^2 = c^2 \sin\theta$ (**563**); il serait encore préférable de distribuer le fil par couches satisfaisant à cette condition et dans chacune desquelles le diamètre du fil augmente comme le paramètre c (**564**). Enfin on se sert d'aiguilles très petites pour réduire au minimum la cavité centrale et conserver les spires dont l'action spécifique est la plus grande.

Ajoutons que la résistance de la bobine contribue, toutes

[1] WEBER, *Electrodyn. Maasbestimmungen*, t. I. p. 16; 1846.

choses égales, à diminuer l'intensité du courant; il est donc très important de n'employer dans sa construction que du cuivre très pur et surtout exempt de fer. La présence de matières étrangères diminue très rapidement la conductibilité du cuivre. Les traces de fer donnent lieu à des actions locales qui deviennent considérables dès que la masse des fils se rapproche beaucoup de l'aiguille; les perturbations dues à cette cause sont très irrégulières, elles ont été pendant longtemps une source de difficultés dans l'emploi des galvanomètres de grande sensibilité.

Plusieurs dispositions peuvent être utilisées pour diminuer le champ extérieur. On combine généralement le champ terrestre avec celui du barreau auxiliaire situé de manière que son champ magnétique soit sensiblement uniforme et horizontal dans la région qu'occupe l'aiguille.

Si le rapport des champs de la Terre et de l'aimant est voisin de l'unité, le champ résultant est à peu près bissecteur de leur direction; il tend à devenir perpendiculaire au méridien magnétique lorsque les deux champs sont dirigés en sens opposés.

Dans ce cas, les indications de l'appareil sont affectées par les moindres variations d'intensité ou de direction des champs composants; les simples changements diurnes de déclinaison ou de température suffisent pour modifier la position d'équilibre de l'aiguille.

L'aimant compensateur est ordinairement porté par une tige verticale placée sur le galvanomètre dans le prolongement de l'axe de rotation de l'aiguille. Une vis de pression permet de le fixer sur cette tige à une hauteur quelconque et une vis tangente fait tourner la tige elle-même autour de son axe. On donne à l'aimant la forme d'un arc de cercle pour avoir un champ plus uniforme dans la région comprise entre les deux pôles, et pouvoir au besoin placer ces pôles sur le prolongement de l'aiguille.

Certains appareils portent deux aimants centrés sur l'axe de rotation, avec des dispositions mécaniques qui permettent de modifier l'angle qu'il font entre eux et la direction de leur bissectrice. On peut ainsi faire varier beaucoup l'intensité du champ auxiliaire, en même temps que sa direction.

Un second procédé consiste à employer, comme Nobili [1] l'a fait le premier, un système d'aiguilles astatiques (225). L'action de la terre sur le système peut être réduite à volonté; en plaçant dans l'intérieur du cadre une seule des aiguilles et laissant l'autre à l'extérieur, l'action du cadre sur l'aiguille extérieure reste de même sens que l'action principale.

L'appareil est plus symétrique quand on emploie deux cadres superposés, avec une aiguille au milieu de chacun d'eux, et qu'on fait passer le courant en sens contraires dans les deux bobines. Comme un système presque astatique tend à se placer normalement au méridien, cette propriété, ainsi que la durée des oscillations, permet d'apprécier le degré de compensation du système.

Gauss [2] portait aussi le barreau par une suspension bifilaire de coefficient C, de manière que sa position d'équilibre restât dans le méridien, mais dans une direction opposée. Le couple directeur résultant est alors $C - MH$; cette différence peut être rendue très petite, mais la disposition expérimentale est moins commode que les précédentes et ne convient qu'aux aimants très lourds.

620. Amortissement. — Avec des instruments non amortis les observations sont longues et fastidieuses. Bien qu'il ne soit pas nécessaire d'attendre le repos complet de l'aiguille, encore faut-il, pour déduire la position d'équilibre de trois élongations consécutives (540), que les amplitudes soient suffisamment réduites. Lorsque les galvanomètres ont un amortissement propre très faible, on peut arrêter l'aiguille par l'action d'un petit aimant tenu à la main qu'on manœuvre d'une manière méthodique pour contrarier les oscillations; il est commode alors d'employer un aimant articulé en forme de compas, dont l'action devient insensible quand les deux branches sont rapprochées au contact. On trouve souvent plus d'avantage à installer auprès du galvanomètre une petite bobine, dans laquelle on lance à propos le courant d'une pile auxiliaire, dans un sens ou dans l'autre, au moyen d'une clef placée sous la main de l'observateur. Toutefois, pour les gal-

[1] Nobili, *Memorie ed osservazioni*, vol. I, p. 1; Firenze, 1834. — Le galvanomètre de Nobili a été construit en 1825.
[2] Gauss, *Œuvres*, t. V, p. 367; *Resultate des M. Vereins*, t. I; 1837.

choses égale ... instrument ait par
très import...
cuivre très p... est dû à la résis-
tières étran... développés par le
cuivre. Les ... de la bobine, soit
qui devien...
rapproche ... grand, comme dans
cette caus... quelquefois l'aiguille
temps ... qui augmentent beau-
mètres d... encore plus efficace quand
Plusie... boîte et très rappro-
le cham...
restre ... es, la résistance propre
son ch... que les courants induits
zontal ... part dans l'amortisse-

Si l...
voisin ... 466), on place souvent
de le... une masse de cuivre très
dien ... ctrice. Cette disposition
sens ... à tous les instruments.

D... magnétique au moment
par l... aussi grand que possible et
cha... W. Weber s'est servi,
clin... circulaire en acier, aimanté
tio... au milieu d'une cavité mé-
l ... cuivre rouge très épaisse;
ti... cteur (392) entre l'aimant
... de cuivre un peu épaisse,
p... que pour le passage de la lu-
... il est facile d'obtenir un

... mens, l'aiguille est souvent
... en fer à cheval, ayant la
... échancrée dans une partie
... diamétral. Cette cloche
... une cavité creusée au milieu

... bobines. — Il est utile, à di-
... le problème, déjà signalé

plus haut (533), de l'amortissement par les courants induits dans le cadre du galvanomètre.

Soit α l'angle que fait le champ extérieur avec le plan moyen du cadre, x_0 la déviation permanente qui correspond au courant I et $x_0 + x$ la déviation à l'époque t pendant les oscillations. Le couple que produirait alors l'unité de courant est $MG \cos(\alpha + x_0 + x)$; le travail relatif au déplacement dx, ou la variation $d\varphi$ du flux de force émis par l'aimant dans le circuit, a pour expression

$$d\varphi = MG \cos(\alpha + x_0 + x)\, dx.$$

Si R est la résistance et L le coefficient de self-induction du circuit, le courant i induit par les oscillations de l'aimant satisfait (374) à l'équation

$$(11) \qquad L\frac{di}{dt} + Ri + MG\cos(\alpha + x_0 + x)\frac{dx}{dt} = 0.$$

On a d'ailleurs, pour l'équilibre,

$$(12) \qquad MGI\cos(\alpha + x_0) = HM\sin x_0.$$

D'autre part, en appelant C_1 le coefficient de résistance du milieu, supposée proportionnelle à la vitesse, le couple qui agit sur l'aimant à l'instant considéré a pour valeur

$$(I + i)MG\cos(\alpha + x_0 + x) - C_1\frac{dx}{dt} - HM\sin(x_0 + x).$$

L'équation du mouvement de l'aimant est donc (527)

$$(13) \quad K\frac{d^2x}{dt^2} + C_1\frac{dx}{dt} + HM\sin(x_0 + x) = (I + i)MG\cos(\alpha + x_0 + x).$$

L'élimination de I et i entre (11), (12) et (13) conduirait à une équation différentielle, à coefficients transcendants, même si l'on suppose que la valeur de G reste constante.

L'équation se simplifie pour des oscillations très petites autour de la position d'équilibre, mais les coefficients de l'é-

quation différentielle ne deviennent con-
et la déviation initiale x_0 sont eux-mêm-
écrire alors

$$(11)' \qquad L\frac{di}{dt} + Ri + MG\frac{dx}{dt} \ldots$$

$$(13)' \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + C_1\frac{dx}{dt} + HMx \ldots$$

Les oscillations de l'aimant auto-
libre sont alors indépendantes du c-

Si on pose encore

$$\lambda = \frac{C_1}{2K}, \qquad n \ldots$$

$$(14) \qquad \mu = \frac{M^2G^2}{2KR} = \frac{G^2}{2}\cdot\frac{H}{M}\cdot \ldots \qquad -\frac{\ldots}{m}$$

et qu'on élimine le courant i, … a en d-
tielle linéaire du troisième ord-

$$\varepsilon\left(\frac{d^3x}{dt^3} + 2\lambda\frac{d^2x}{dt^2} + n^2\frac{dx}{dt}\right) + \ldots \qquad - \ldots n$$

Lorsque le circuit est ouv-
$\mu = 0$ et l'équation se rédui- … -issent
… que le

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \ldots$$

Dans ce cas particulier. …
extérieur et au frottemen- …
par la relation

est positive (532), le m- …
sement; en prenant …
passage par la positio- …

Pour un circuit fermé, l'intégrale générale de l'équation différentielle est de la forme

$$x = A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} + A_3 e^{\rho_3 t},$$

les différentes valeurs de ρ étant les racines de l'équation du troisième degré

$$(15) \qquad \varepsilon(\rho^3 + 2\lambda\rho^2 + n^2\rho) + \rho^2 + 2(\lambda + \mu)\rho + n^2 = 0.$$

L'une des racines ρ_1 est toujours réelle; comme le rapport ε est très petit, cette racine est très grande et on a sensiblement $\varepsilon\rho_1 + 1 = 0$. Les deux autres ρ_2 et ρ_3 diffèrent très peu des racines de l'équation du second degré

$$(16) \qquad u^2 + 2(\lambda + \mu)u + n^2 = 0.$$

Ces racines sont imaginaires quand on a $n > \lambda + \mu$; nous poserons encore

$$m^2 + (\lambda + \mu)^2 = n^2 = \omega^2 + \lambda^2.$$

L'équation (15) étant mise sous la forme

$$(17) \qquad \varepsilon f(\rho) + \varphi(\rho) = 0,$$

on remplacera ρ par $u + y$, pour ces deux racines, y étant une quantité très petite.

Si on développe cette équation par rapport à y par la série de Taylor réduite aux premiers termes, en tenant compte de la relation (16), il en résulte

$$\frac{y}{\varepsilon} = -\frac{f(u)}{\varphi'(u)} = -\frac{u}{2}\,\frac{u^2 + 2\lambda u + n^2}{u + \lambda + \mu} = \mu\,\frac{u^2}{u + \lambda + \mu},$$

$$\rho = -(\lambda + \mu) \pm m\sqrt{-1} - 2\mu\varepsilon\left[\lambda + \mu \pm \left(\frac{n^2}{2m} - m\right)\sqrt{-1}\right].$$

Prenant pour origine du temps l'époque où l'aiguille arrive une élongation d'amplitude a, les coefficients A_1, A_2 et A_3

d'aiguilles à coudre, de 5 à 6 centimètres de longueur, constituant un système quasi-astatique ; le cadre est rectangulaire et le noyau juste assez grand pour permettre le libre mouvement de l'une des aiguilles ; sa largeur est de 4 à 5 centimètres (fig. 164). L'aiguille inférieure est à l'intérieur du cadre, l'autre est à l'extérieur et munie d'un index effilé. Le système est attaché à un fil de cocon L et peut être élevé ou abaissé à l'aide d'une vis K.

Une plaque de cuivre rouge S est interposée entre le cadre et l'aiguille supérieure ; elle porte le cadran divisé et contribue en même temps à amortir les oscillations. A la partie supé-

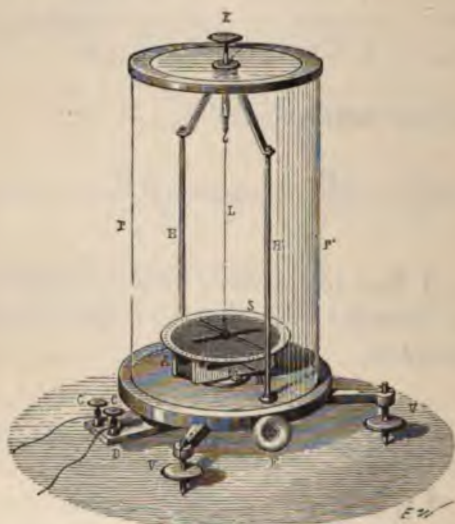


Fig. 164.

rieure, les spires forment deux paquets laissant entre eux un intervalle pour l'introduction du système astatique ; on doit alors percer la plaque de cuivre d'une fente correspondante, qui nuit beaucoup à l'amortissement. Une cloche PP' garantit l'appareil contre les courants d'air.

Cette forme de galvanomètre a été l'objet de travaux importants de Nobili, Melloni, Péclet, Dubois-Raymond, de la Provostaye et Desains, etc., relatifs à la chaleur rayonnante ou à la physiologie. Ces instruments très sensibles sont su-

jets à l'inconvénient de donner plusieurs positions d'équilibre, par suite de la présence de quelques traces de fer dans le fil de cuivre. Pour faire disparaître en grande partie les difficultés relatives au zéro, Péclet ([1]) réunissait en un seul paquet le fil enroulé sur la bobine et supportait l'aiguille par un étrier coudé faisant le tour du cadre ; cette disposition supprimait la fente diamétrale de la plaque de cuivre.

623. Galvanomètre de Weber. — Les méthodes employées par Weber ([2]) l'avaient conduit à augmenter beaucoup les dimensions du galvanomètre. L'aimant est un barreau cylindrique de 10 centimètres de longueur et 15 millimètres de diamètre ; ce cylindre est ordinairement creux, pour diminuer le moment d'inertie sans affaiblir notablement le moment magnétique. L'aimant est entouré d'un manchon de cuivre rouge, de forme elliptique et très épais, qui sert à la fois d'amortisseur et de noyau pour la bobine. La suspension est formée par un faisceau de fils de soie, et on fait les lectures par la méthode du miroir.

Cette disposition ne permet guère l'emploi de systèmes astatiques, mais on peut augmenter la sensibilité par une suspension bifilaire qui maintient le barreau dans une direction opposée à celle du champ terrestre.

624. Galvanomètres de Lord Kelvin. — Dans ces instruments, aujourd'hui généralisés, Lord Kelvin s'est rapproché autant que possible des conditions théoriques.

L'aiguille est formée d'une lame mince d'acier, de $0^{c},8$ environ de longueur, collée sur le dos du miroir qui doit servir aux observations ; au lieu d'une seule lame, on peut en employer quatre ou cinq disposées parallèlement ; le poids du miroir et de l'aiguille ne dépasse guère $0^{gr},05$. Le système est suspendu à un fil de cocon de 1 centimètre environ, et logé dans une cavité juste suffisante pour laisser à l'aiguille de très petits mouvements de part et d'autre de la position d'équilibre. Les courants d'induction n'interviennent que pour une faible part dans l'amortissement, à cause de la petitesse de l'aiguille, de sa distance au cadre et de la grande résistance que le fil présente ordinairement. La bobine est

([1]) Péclet, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. II, p. 103 ; 1841.
([2]) W. Weber, *Electrodyn. Maasbest. Widerstandmess.*, p. 337.

circulaire et la section de la gorge est un rectangle circonscrit à la courbe théorique (563) de meilleur enroulement. Un aimant courbe, mobile sur une tige verticale, permet de faire varier à volonté le champ directeur.

Pour d'autres appareils (*graded galvanometer*), la bobine renferme plusieurs couches de fils, de diamètres variables, dont chacune communique avec un bouton extérieur ; on peut ainsi utiliser, à partir de la couche centrale, la longueur totale de fil dont la résistance est égale à celle du circuit extérieur et obtenir le maximum de sensibilité.

Le galvanomètre astatique (fig. 165) est formé de deux bobines superposées, parcourues par le courant en sens contraires, dont chacune agit sur l'un des systèmes d'aiguilles. Les bobines se composent de deux cadres qui s'appliquent l'un contre l'autre en laissant seulement entre eux un passage suffisant pour la tige d'aluminium qui relie les aiguilles. Cette tige porte le miroir au centre de l'une des bobines et, dans le vide de l'autre bobine, une lame mince d'aluminium ou de mica pour l'amortissement. Un aimant correcteur modifie inégalement le champ extérieur sur les deux aiguilles et permet de faire varier à volonté la sensibilité de l'appareil. Si le système des aiguilles est très voisin d'être astatique, la position d'équilibre ne dépend plus que de l'aimant et le zéro est beaucoup plus stable.

La résistance des bobines, sauf pour les instruments destinés aux expériences de chaleur rayonnante, est généralement considérable et s'élève jusqu'à 40 000 ohms.

Ces galvanomètres ont des oscillations rapides qui s'amortissent très promptement. Leur sensibilité est très grande et ils sont surtout appropriés aux méthodes de réduction au zéro, dans lesquelles on a seulement à constater l'existence et le sens d'un courant très faible.

Le *galvanomètre marin* est destiné aux observations sur les navires. Comme il est alors impossible d'utiliser le champ terrestre, on place la bobine entre les branches d'un aimant en fer à cheval, qui produit un champ magnétique sensiblement uniforme. En outre, on annule d'une façon presque absolue l'action du champ terrestre, ainsi que celle des masses de fer du navire, en enfermant l'instrument tout entier dans

un cylindre épais de fer doux qui fait écran magnétique. Un aimant correcteur, parallèle à l'aiguille et ayant ses pôles opposés à celui de l'aimant fixe, peut être déplacé parallèlement à lui-même au moyen d'une vis. Enfin, on supprime les mou-



Fig. 165.

vements pendulaires de l'aiguille en lui donnant pour axe un fil de soie attaché d'une part à un point fixe et de l'autre à un ressort qui maintient une tension convenable. La résistance de ces galvanomètres est toujours très grande.

625. Sensibilité des galvanomètres. — On apprécie la sensibilité d'un galvanomètre par le plus faible courant capable de donner une déviation observable. Il semble d'abord que l'on peut augmenter cette sensibilité sans limite en diminuant le champ extérieur, mais les oscillations deviennent alors si lentes que la position d'équilibre n'a plus aucune stabilité.

Si l'on s'impose une limite de 5 secondes comme durée τ de l'oscillation simple [1], le moment d'inertie K de l'équipage de l'aimant intervient dans l'évaluation de la sensibilité. On a alors, à part des termes de correction,

$$\tau^2 = \pi^2 \frac{K}{MH}.$$

Si le champ électromagnétique du courant est à peu près perpendiculaire au champ extérieur et que les déviations restent très petites, on peut écrire

$$\delta = \frac{G}{H} I = \frac{\tau^2}{\pi^2} \cdot \frac{M}{K} GI.$$

D'autre part, lorsque l'épaisseur de l'isolant reste dans un rapport constant avec le diamètre du fil (**559**), la constante G est proportionnelle à la racine carrée de la résistance R du fil; si l'on pose alors

$$G = G_0 \sqrt{R},$$

la valeur de G_0 est simplement définie par les dimensions de la gorge. Faisant $\tau = 5$, il en résulte

$$\frac{\delta}{\sqrt{R}} = \frac{\tau^2}{\pi^2} \frac{M}{K} G_0 I = 2,53 \frac{M}{K} G_0 I.$$

Pour un courant donné, le second membre ne dépend plus que de l'aimant et du volume occupé par la bobine; le produit $\frac{M}{K} G_0$ caractérise ainsi le mode de construction.

On voit par là que le rapport du moment magnétique de

[1] AYRTON, MATHER et SUMPNER, *Ph. Mag.* [5], t. XXX, p. 58; 1890.

l'aiguille au moment d'inertie de l'équipage doit être aussi grand que possible ; il y a donc tout avantage à prendre des aimants très courts et même plusieurs aiguilles parallèles afin de réduire l'importance relative des organes accessoires, tels que le miroir à réflexion.

Si l'on emploie un système quasi-astatique, formé de deux aiguilles de moments M et M' situées dans deux cadres identiques superposés, et que les champs correspondants soient H et H', on a

$$\tau^2 = \pi^2 \frac{K}{HM - H'M},$$

$$\delta = \frac{G(M+M')}{HM - H'M'} I = \frac{\tau^2}{\pi^2} \cdot \frac{M+M'}{K} GI.$$

La sensibilité paraît proportionnelle à la somme des moments magnétiques des aiguilles, mais le moment d'inertie des parties mobiles est nécessairement augmenté et l'appareil exige deux cadres. Il ne semble donc pas que les systèmes astatiques présentent de sérieux avantages.

Dans les aimants courts, la force démagnétisante (**292**) tend à diminuer l'aimantation. M. Weiss (¹) forme le système astatique avec deux aiguilles verticales aimantées en sens contraires, qu'il supporte par un fil de cocon. Les pôles opposés forment ainsi, au centre de chaque bobine, un petit aimant dont la longueur magnétique est très faible et qui ne subit aucune action démagnétisante ; on diminue ainsi beaucoup les dimensions des bobines et la cavité libre.

On peut appeler sensibilité S du galvanomètre le nombre de divisions dont l'image se déplace pour un microampère, quand l'échelle est à une distance de 2 000 divisions du miroir et que la résistance des bobines est d'un ohm. La déviation δ correspondant à la moitié de S, si on évalue la résistance en ohms et le courant en ampères, et que M désigne le moment magnétique du système unique ou la somme des moments d'un système astatique, on aura

$$\frac{S}{4000} = 2{,}53 \frac{M}{K} \cdot G_0 10^{-6}.$$

(¹) P. Weiss, *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 212; 1895.

Il suffit alors de déterminer le nombre n de divisions qui correspond au courant de I ampères avec un cadre de R ohms, ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{n}{4\,000} = 2,53\,\frac{M}{K}\cdot G_0 I,$$

$$\frac{S\sqrt{R}}{n} = \frac{10^{-6}}{I}, \qquad S = \frac{n}{\sqrt{R}}\,\frac{10^{-6}}{I}.$$

Dans les conditions indiquées, il est généralement possible d'observer le dixième de division sur l'échelle, c'est-à-dire une déviation de $\frac{1}{40\,000}$ ou 5″; l'appareil est donc capable de mettre en évidence un courant de

$$I = \frac{n}{S\sqrt{R}}\,10^{-6} = \frac{10^{-7}}{S\sqrt{R}}.$$

On a ainsi réalisé des galvanomètres dont la sensibilité S est représentée par 1 500 ou même 2 000. Avec une résistance de 400 ohms, le moindre courant observable serait alors

$$I = \frac{10^{-7}}{2\,000.20} = \frac{1}{4}\,10^{-11} \text{ ampère.}$$

626. Galvanomètre différentiel. — A. Becquerel [1] a imaginé d'utiliser le galvanomètre pour constater la différence de deux courants. L'appareil est formé de deux bobines, parcourues respectivement par les courants I et I′, dont les champs GI et G′I′ sur l'aiguille sont directement opposés.

La déviation dépend de la différence GI — G′I′, ou simplement de G(I — I′), c'est-à-dire de la différence I — I′ des courants, lorsque les constantes galvanométriques G et G′ des deux bobines sont égales; habituellement les résistances de ces bobines ont aussi la même valeur.

Pour vérifier le réglage d'un galvanomètre différentiel, on fait d'abord passer un même courant dans les deux bobines en

[1] A. Becquerel, *Ann. de Ch. et de Phys.* [2], t. XXXII, p. 420; 1826.

sens contraires; la déviation doit être nulle si $G = G'$. On divise ensuite un même courant entre les deux cadres; l'aiguille doit encore rester au zéro si les résistances sont égales.

Un moyen simple de réaliser à la fois ces deux conditions consiste à prendre deux fils identiques tordus ensemble que l'on enroule ensuite sur un même cadre. Quels que soient l'enroulement et la position de l'aiguille, les actions des deux fils sont égales. Comme le fil tordu donne un enroulement peu régulier, les constructeurs préfèrent enrouler simultanément et parallèlement les deux fils sur le cadre; mais il est alors moins facile, sans des précautions particulières, d'obtenir la symétrie électrique.

Du reste, il n'est pas nécessaire que les bobines coïncident. Le galvanomètre astatique de lord Kelvin, à deux bobines superposées (fig. 165), peut être employé comme galvanomètre différentiel : il suffit que les courants traversent séparément les deux bobines de manière que leurs actions sur les aiguilles correspondantes soient de sens contraires. Appelant M et M' les moments magnétiques des aiguilles, H et H' les champs extérieurs correspondants, on a, au moins pour les petites déviations,

$$GMI - G'M'I' = (MH - M'H')\delta.$$

La déviation ne s'annule avec des courants égaux que si la condition $GM = G'M'$ est réalisée. Pour faciliter le réglage, on complète le cadre de moindre action par une petite bobine additionnelle de même axe, qu'on peut rapprocher ou éloigner de l'aiguille correspondante. On cherche alors par tâtonnements la position que doit occuper cette bobine auxiliaire pour qu'un même courant, traversant les deux systèmes en sens contraires, ne produise pas de déviation. Les deux circuits ont aussi la même résistance, de sorte qu'un courant dérivé entre eux est sans action.

Le galvanomètre différentiel est employé le plus souvent pour vérifier l'égalité de deux courants; la disposition suivante [1] permettrait d'en déterminer le rapport.

[1] JENKIN, *Report of the commitee of B. A.*; *Dundee*, 1867.

Les plans moyens des deux cadres sont rectangulaires, avec un même diamètre vertical, et l'ensemble est mobile sur un cercle gradué ; l'aiguille est placée au centre commun.

Si l'on fait passer des courants I et I' séparément dans les deux cadres, on peut trouver une position du système telle que l'aiguille reste dans le méridien. Appelons φ l'angle que fait alors l'un des cadres avec le méridien, l'équation d'équilibre de l'aiguille est alors

$$GI\cos\varphi - G'I'\sin\varphi = 0, \qquad \tan\varphi = \frac{G}{G'} \cdot \frac{I}{I'}.$$

Le rapport des courants est simplement égal à $\tan\varphi$ si les constantes galvanométriques G et G' relatives à la position de l'aiguille sont égales entre elles. On peut toujours choisir les dimensions des cadres et de l'aiguille de manière que les valeurs de G et G' soient indépendantes de l'angle φ ; si elles ne sont pas égales, on en déterminera le rapport par une expérience préliminaire avec un même courant $I = I'$ dans les deux cadres.

627. Balance électromagnétique. — C'est aussi à Becquerel [1] qu'on doit l'idée d'évaluer en poids l'intensité des courants. Un aimant est suspendu verticalement au fléau d'une balance, dans l'axe d'une bobine cylindrique. Suivant le sens du courant dans la bobine, il y a attraction ou répulsion et on compense cet effet par des poids. L'action du courant est nulle lorsque le milieu de l'aimant est placé au centre O de la bobine et elle prend une valeur maximum quand le milieu de l'aimant est un certain point P de l'axe.

Il est nécessaire que l'aimant ait des dimensions notables par rapport à la longueur de la bobine, sans quoi l'action serait très faible. Il est facile de voir que l'équilibre est stable lorsque le milieu de l'aimant est situé dans l'intervalle OP ou au delà du point P, suivant que l'action est attractive ou répulsive. Pour une position déterminée de l'aimant, la stabilité dépend donc en général du sens du courant. Cet équilibre est toujours stable, par le seul fait de la balance, lorsqu[illegible]

[1] A. Becquerel, [illegible] des Sc., t. V, p. 35; 1837.

l'aimant se trouve au voisinage du point d'action maximum. Cette position est évidemment celle qu'il convient de choisir; c'est la seule qui conserve à la balance sa sensibilité propre.

Pour une aimantation absolument rigide, l'action serait proportionnelle à l'intensité du courant. C'est ce qui a lieu avec des courants faibles; mais, en général, la bobine produit en outre une aimantation temporaire qui est d'abord, avec des courants moyens, proportionnelle à l'intensité et donne toujours une action attractive.

La condition d'équilibre peut alors se traduire par une expression de la forme

$$p = (A \pm A'I)I,$$

dans laquelle p est le poids qui rétablit l'équilibre, A et A' deux constantes à déterminer par l'expérience.

Cette formule a été employée par Lenz et Jacobi [1] qui ont apporté quelques modifications à la balance de Becquerel. Leur appareil comprend deux bobines et deux aimants suspendus aux deux extrémités du même fléau. Les deux fils de suspension sont inégaux et, les deux pôles N étant en bas, l'un des aimants est au-dessus de la bobine correspondante, l'autre au-dessous; on opère par répulsion.

La proportionnalité de l'aimantation temporaire à l'intensité du courant ne serait plus admissible pour des courants très intenses, et la graduation de l'appareil devrait alors être déterminée empiriquement.

Si l'on remplace l'aimant par un morceau de fer doux, l'action, toujours attractive, commence par être proportionnelle au carré de l'intensité du courant pour croître ensuite moins rapidement; dans ce cas encore, une graduation empirique est nécessaire.

Toutefois, dès que l'aimantation est variable, sa valeur ne dépend pas seulement de l'état actuel du courant (285) et la méthode ne comporte plus aucune précision.

628. **Cadres mobiles.** — Supposons qu'une bobine de surface S, attachée à une suspension bifilaire de coefficient C,

[1] Lenz et Jacobi, *Pogg. Ann.*, t. XLVII, p. 227 et 239; 1839.

soit en équilibre quand son plan moyen est parallèle au champ magnétique extérieur H. Si la bobine est parcourue par le courant I, on peut la ramener dans sa position primitive par une torsion convenable de la suspension, ou bien, ce qui est plus simple, abandonner l'appareil à lui-même et observer la déviation δ qui correspond au nouvel équilibre. On a alors

$$(21) \qquad \mathrm{HSI}\cos\delta = \mathrm{C}\sin\delta, \qquad \mathrm{I} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{HS}}\operatorname{tang}\delta.$$

Cette méthode est due à Weber [1]. Si la suspension est bifilaire, les deux fils sont utilisés pour amener le courant à la bobine. Si elle est unifilaire, le circuit est complété, soit par un second fil vertical situé au-dessous de la bobine et attaché à un ressort léger, soit par une tige qui plonge dans un godet contenant du mercure; il suffit alors de remplacer dans les équations $\sin\delta$ par l'angle δ.

Pour régler la position initiale de la bobine, on met son axe à peu près parallèle au champ et on agit sur la suspension jusqu'à ce que le passage d'un courant ne produise aucune déviation; on tourne alors la suspension ou l'appareil tout entier de $90°$.

On corrige le petit défaut d'ajustement qui pourrait encore subsister, en renversant le sens du courant dans la bobine. Soit α l'angle de l'axe de la bobine avec la normale au méridien dans la position initiale, δ et δ' les déviations observées de part et d'autre pour les deux sens du courant; les équations d'équilibre sont

$$\mathrm{HSI}\cos(\delta+\alpha) = \mathrm{C}\sin\delta, \qquad \mathrm{HSI}\cos(\delta'-\alpha) = \mathrm{C}\sin\delta'.$$

Sauf la différence des facteurs constants, on retrouve ainsi les équations (8) obtenues pour la boussole des tangentes. Si les déviations δ et δ' sont peu différentes, il suffira de remplacer l'angle δ dans la formule simple (21) par la moyenne des dérivations observées.

L'amortissement dû aux courants induits dans le cadre se déterminera comme précédemment (**621**).

[1] W. Weber, *Electrodyn. Maasbestimmungen*, t. I, p. 16; 1846.

Si α est l'angle primitif du cadre avec le champ, x_0 la déviation permanente produite par le courant I, et $x_0 + x$ la déviation qui correspond à l'époque t, le flux de force φ émis par le champ dans le cadre est HS sin $(\alpha + x_0 + x)$ et sa variation pour le déplacement dx

$$d\varphi = \mathrm{HS}\cos(\alpha + x_0 + x)\, dx.$$

Le courant induit i satisfait à l'équation

$$L\frac{di}{dt} + \mathrm{R}i + \mathrm{HS}\cos(\alpha + x_0 + x)\frac{dx}{dt} = 0.$$

D'autre part, la condition d'équilibre est

$$\mathrm{IHS}\cos(\alpha + x_0) = \mathrm{C}\sin x_0,$$

et le couple moteur relatif à la déviation $x_0 + x$

$$(\mathrm{I} + i)\mathrm{HS}\cos(\alpha + x_0 + x) - \mathrm{C}_1\frac{dx}{dt} - \mathrm{C}\sin(x_0 + x).$$

Si l'on compare ces équations avec les équations analogues obtenues pour le mouvement d'une aiguille dans un cadre, on voit qu'il suffit de remplacer dans les précédentes HM par C et MG par HS. En se bornant encore au cas des petites déviations, on aura donc

$$L = \varepsilon\mathrm{R}, \qquad \lambda = \frac{\mathrm{C}_1}{2\mathrm{K}}, \qquad \mu = \frac{\mathrm{H}^2\mathrm{S}^2}{2\mathrm{KR}},$$

$$\lambda' = (\lambda + \mu)(1 + 2\mu\varepsilon) = \frac{1}{2\mathrm{K}}\left(\mathrm{C}_1 + \frac{\mathrm{H}^2\mathrm{S}^2}{\mathrm{R}}\right)(1 + 2\mu\varepsilon).$$

Dans le cas actuel, le coefficient d'amortissement λ' peut être très grand, au point de produire un mouvement apériodique. Il faut, pour cela, diminuer d'une manière suffisante le moment d'inertie K du système, ainsi que la résistance R du circuit, et rendre très intense le champ H dans lequel se déplace le cadre mobile.

Les expériences à circuit ouvert et à circuit fermé donneraient encore la résistance R par l'une des expressions

$$R = \frac{H^2S^2}{2C} \cdot \frac{\omega^2 + \lambda^2}{\lambda' - \lambda} + 2L\lambda' = \frac{H^2S^2}{2C} \cdot \frac{\omega'^2 + \lambda'^2}{\lambda' - \lambda} + 2L\lambda.$$

629. Combinaison des deux méthodes. — Quand on utilise le champ terrestre, l'intensité du courant est proportionnelle à la composante horizontale H, dans la boussole des tangentes, tandis qu'elle est en raison inverse de cette composante quand on l'évalue au moyen d'une bobine mobile. La combinaison des deux méthodes permettra donc de déterminer, en même temps, l'intensité du courant et celle du champ terrestre en fonction des dimensions des deux instruments et du coefficient de torsion du bifilaire.

Supposons ([1]) que l'on fasse passer le même courant I dans les deux appareils ; on aura alors, en affectant d'un accent la déviation et le champ relatif à la bobine mobile et supposant toutes les corrections de réglage effectuées,

$$I = \frac{H}{G} \operatorname{tang} \delta = \frac{C}{H'S} \operatorname{tang} \delta'.$$

Les instruments devant être très éloignés l'un de l'autre, pour éviter toute influence réciproque, il est possible que les champs H et H' n'aient pas exactement la même valeur. En posant $H' = (1 + \varepsilon)H$, on déterminera le rapport $1 + \varepsilon$ dans une expérience directe, par exemple par les oscillations d'une même aiguille. Les deux expressions du courant donnent alors

$$(22) \qquad I^2 = \frac{C'}{GS(1 + \varepsilon)} \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \delta' \qquad H^2 = \frac{GC'}{S'(1 + \varepsilon)} \frac{\operatorname{tang} \delta'}{\operatorname{tang} \delta}.$$

Lord Kelvin ([2]) a proposé de combiner l'expérience de manière à obtenir les deux déviations δ et δ' par un même instrument. Ce galvanomètre double serait constitué par un cadre

([1]) F. Kohlrausch, *Pogg. Ann.*, t. CXXXVIII, p. 1; 1869.
([2]) Maxwell, *Electricity and Magnetism*, t. II, p. 328.

de diamètre assez grand, ayant en son centre une petite aiguille, comme dans une boussole des tangentes, le cadre et l'aiguille étant tous deux mobiles. On observe les déviations δ et δ' que l'aiguille et le cadre éprouvent, en sens contraires, pendant le passage du courant.

Si les conditions de réglage sont réalisées, l'équilibre de l'aiguille est déterminé par l'équation

$$\text{(23)} \qquad \text{IMG}\cos(\delta+\delta') = \text{MH}\sin\delta.$$

Comme l'action qui s'exerce entre l'aiguille et le cadre est réciproque, on a aussi, pour l'équilibre du cadre,

$$\text{(24)} \qquad \text{IHS}\cos\delta' + \text{IMG}\cos(\delta+\delta') = \text{C}\sin\delta'.$$

On en déduit les deux expressions

$$\text{I} = \frac{\text{H}}{\text{G}}\cdot\frac{\cos(\delta+\delta')}{\sin\delta} = \frac{\text{C}}{\text{HS}}\,\frac{\tang\delta'}{1+\dfrac{\text{MG}}{\text{HS}}\,\dfrac{\cos(\delta+\delta')}{\cos\delta'}}.$$

Le terme de correction $\frac{\text{MG}}{\text{HS}}$ est très petit et le rapport $\frac{\text{H}}{\text{M}}$ pourra être déterminé d'une manière approchée par les méthodes habituelles.

L'appareil permettrait d'ailleurs de faire cette correction directement, sans avoir recours à aucune observation étrangère. En effet, si on fixe l'aiguille dans sa position primitive, indépendamment du cadre, et qu'on observe la déviation δ_1 du cadre produite par le même courant, la condition d'équilibre est alors

$$\text{C}\sin\delta_1 = \text{I}(\text{HS}+\text{MG})\cos\delta_1 = \text{IHS}\left(1+\frac{\text{MG}}{\text{HS}}\right)\cos\delta_1.$$

Comparant avec l'équation (24), il en résulte

$$\frac{\text{MG}}{\text{HS}}\,\frac{\cos(\delta+\delta')}{\cos\delta'} = \frac{\tang\delta_1-\tang\delta'}{\dfrac{\sin\delta'}{\cos(\delta+\delta')}-\tang\delta_1}.$$

L'idée de Lord Kelvin ne paraît pas avoir été encore réalisée sous cette forme simple. La précision de la méthode exige que les deux déviations soient de même ordre ; on ne pourrait arriver à ce résultat qu'avec un cadre très léger, ayant seulement quelques tours de fil et porté par une suspension à coefficient très faible. Dans ces conditions, il serait difficile de rendre le cadre assez rigide pour connaître exactement ses dimensions, et de déterminer son moment d'inertie pour en déduire le couple de torsion. On peut éviter tous ces inconvénients en utilisant une des dispositions employées par Weber pour la boussole des tangentes.

L'aiguille est placée en dehors du cadre dans une position principale, sur l'axe ou dans le plan moyen, et à une distance assez grande pour que l'action du courant soit considérablement diminuée ; on peut alors donner à la bobine un grand nombre de tours et employer une suspension dont le couple directeur se détermine aisément.

Supposons, par exemple, la bobine étant réglée par rapport au champ, qu'on place l'aiguille sur l'axe à une distance d du centre ; appelons δ et δ' les déviations de l'aiguille et du cadre produites par le passage d'un courant I, $x = d\cos\delta'$ et $y = d\sin\delta'$ les coordonnées du milieu P de l'aiguille par rapport à l'axe et à une droite située dans le plan moyen de la bobine pour sa nouvelle position.

Réduisant d'abord le cadre à la spire de rayon moyen a, les composantes X et Y, au point P, de l'action relative à l'unité de courant, peuvent être calculées comme au n° 566.

Le couple produit sur l'aiguille a pour expression

$$M[X\cos(\delta+\delta') + Y\sin(\delta+\delta')] = M\cos(\delta+\delta')[X + Y\,\mathrm{tang}(\delta+\delta')].$$

Si les déviations restent petites, on remplacera X et Y par leurs développements en série en fonction de y, en négligeant les termes d'ordre supérieur au second ; le dernier facteur devient alors

$$2\pi\frac{a^2}{u^3}\left\{1 + \frac{3}{2}\frac{d^2}{u^2}\sin\delta'\left[\cos\delta'\,\mathrm{tang}(\delta+\delta') - 2\left(1 - \frac{5}{4}\frac{a^2}{u^2}\right)\sin\delta'\right]\right\}.$$

Si l'aiguille est à une distance notable du cadre, on peut,

ıns le terme de correction, remplacer u par d, les sinus et la ıngente par les angles correspondants, et négliger le produit ıu carré des déviations par le rapport $\frac{a^2}{d^2}$, ce qui donne

$$X + Y \tan g(\delta + \delta') = 2\pi \frac{a^2}{u^3}\left[1 + \frac{3}{2}\delta'(\delta - \delta')\right].$$

Pour tenir compte de la longueur de l'aiguille, on multipliera ce résultat par le facteur habituel (574), qui se réduit sensiblement à $1 - 3\frac{l^2}{d^2}$. On a donc l'expression

$$D = X + Y \tan g(\delta + \delta') = 2\pi \frac{a^2}{u^3}\left[1 + \frac{3}{2}\delta'(\delta - \delta') - 3\frac{l^2}{d^2}\right],$$

dans laquelle on remplacera u^2 par

$$x^2 + a^2 = d^2 \cos^2 \delta' + a^2.$$

Enfin, pour une bobine, on substituera au facteur principal $2\pi\frac{a^2}{u^3}$, qui représente l'action du cadre sur l'axe, la valeur de G donnée par l'équation (10) du n° 560.

La valeur du facteur D ainsi déterminée doit remplacer la constante galvanométrique G dans les équations d'équilibre de l'aiguille et du cadre.

On calculerait d'une manière analogue, par les formules du n° 599, les expériences relatives au cas où l'aiguille serait située dans le plan moyen de la bobine.

630. Siphon recorder. — Dans un champ magnétique très intense, les appareils à cadre mobile peuvent acquérir une grande sensibilité, en même temps que l'amortissement est très rapide. Lord Kelvin a mis à profit cette propriété dans la construction du *siphon recorder*, employé comme récepteur pour la télégraphie sous-marine (fig. 166). La bobine s est enroulée sur un cadre rectangulaire mince, placé entre les pôles d'un électro-aimant dont les extrémité A et B sont indiquées sur la figure ; en outre, une masse fixe de fer doux f ›ccupe l'espace vide au milieu du cadre et augmente l'intenıté du champ dans la région que traverse le fil. Le cadre est

attaché à une suspension bifilaire; la partie inférieure porte un poids Q qui glisse le long d'une planchette plus ou moins inclinée sur la verticale et sert à régler la tension. Le courant est amené par deux spirales très flexibles en communication avec les boutons *p* et *q*.

Le nom de *siphon recorder*, ou enregistreur à siphon, provient d'un détail de construction. Le cadre agit par un fil *ab* et des leviers amplificateurs sur un tube de verre très fin et

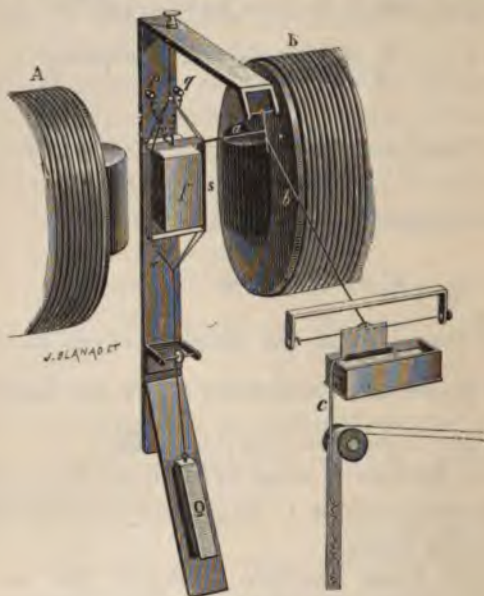


Fig. 166.

très léger *c*, courbé en siphon, et dont la courte branche plonge dans un liquide coloré. Le liquide, étant électrisé par une petite machine électrique à rotation (*mouse mill*), est projeté par le tube sur une bande de papier mobile. Les mouvements du cadre se transmettent au siphon et produisent sur le papier un trait continu, avec des dents à droite et à gauche qui correspond aux signes + ou — du courant.

631. Galvanomètre Deprez-d'Arsonval [1]. — Dans cet appareil (fig. 167), qui repose sur le même principe, le cadre

[1] DEPREZ et D'ARSONVAL, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCIV, p. 1347; 1882.

mobile est suspendu entre deux fils métalliques qui servent à amener le courant et dont on règle la tension par un ressort à vis. Le champ est produit par un aimant en fer à cheval, à branches très rapprochées, et un cylindre creux en fer doux est placé dans l'intérieur du cadre. La lecture des déviations se fait par un miroir attaché au cadre.

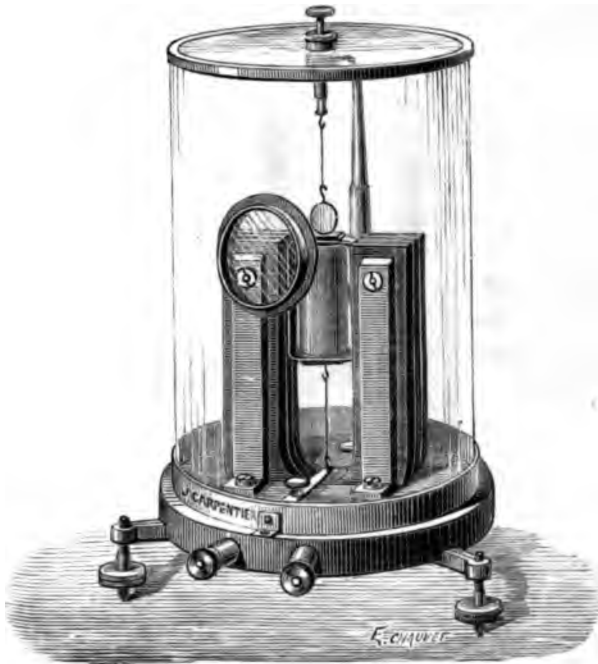


Fig. 167.

Ce galvanomètre est remarquable par la fixité du zéro, la sensibilité et l'amortissement rapide des oscillations; son usage s'est beaucoup répandu.

632. Galvanomètre de M. Lippmann(¹). — Le champ magnétique agit ici sur un conducteur liquide parcouru par le courant. Deux tubes verticaux contenant du mercure (fig. 168), communiquent par leur partie inférieure avec une cavité très étroite comprise entre deux lames de verre parallèles, et située

(¹) G. Lippmann, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCVIII, p. 1256; 1884.

attaché à une suspension bifilaire ; la pa
un poids Q qui glisse le long d'une planc
inclinée sur la verticale et sert à régler la
est amené par deux spirales très flexibl
avec les boutons p et q.

Le nom de *siphon recorder*, ou enreg
vient d'un détail de construction. Le c
et des leviers amplificateurs sur un t.



Fi

très léger c, courbé en sip
plonge dans un liquide colo
une petite machine électri
projeté par le tube sur une
vements du cadre se trans
le papier un trait continu,
qui correspond aux signe

631. **Galvanomètre Dep**
reil (fig. 167), qui repos

(1) Deprez et d'Arsonval, C.

n est perpendi-
platine, traverse
té. Si la cavité est
composante hori-
nappe du courant,
dans un certain
eau entre les deux
férence de pres-

cavité, la condition

de niveau est pro-
en raison inverse de
réciproque de deux
et I peut donner un
k et k étant dé-
circuits.
de deux courants
il en résulte que
à un nombre abs-
méthode pour des me-

...passer le même courant dans les ...tion expérimentale du couple kI^2 ... connaisse exactement l'une des lon... la construction de l'appareil; si l'on a ... valeur du coefficient h ne renferme ...mensions de même nature.

... d'électrodynamomètres, suivant ...isposés pour mesurer, soit le couple ...proque des circuits, soit l'attraction ...rce entre eux.

...x **courants**. — L'électrodynamomètre ...ose d'une bobine mobile de surface S', ...s à suspension bifilaire, sur laquelle on ...une bobine fixe. Dans la position initiale ... bobines sont à angle droit et, pour di... possible l'action de la terre, l'axe de la ...arallèle au méridien magnétique.

...nt parcourues respectivement par des cou...ine mobile est déviée d'un angle δ; le cou...iproque peut être représenté par $II'GS'\cos\delta$, ...nant une valeur moyenne de la constante ...du cadre fixe dans la région occupée par le

...ut équilibrer ce couple en donnant à la sus... partie supérieure, une torsion θ qui ramène ...a position primitive. On a alors

$$II'GS' = C\sin\theta.$$

...change de signe quand on change le sens d'un ...ants, mais il reste le même quand on renverse en ... les deux courants; c'est là une propriété carac... l'électrodynamomètre.

...es deux bobines sont parcourues par le même cou...n déduit

$$I^2 = \frac{C}{GS'}\sin\theta.$$

...ber, *Electrodyn. Maasbestimm.* 1re partie; 1846.

dans un champ magnétique dont la direction est per culaire au plan des lames.

Le courant I, amené par deux lames de platine, tr verticalement le liquide situé dans cette cavité. Si la cavi rectangulaire et de hauteur a, l'action de la composante zontale H du champ, perpendiculaire à la nappe du co est égale à IHa, et tend à déplacer le liquide dans un c sens ; il s'établit donc une différence de niveau entre les branches de mercure. En appelant p la différence de

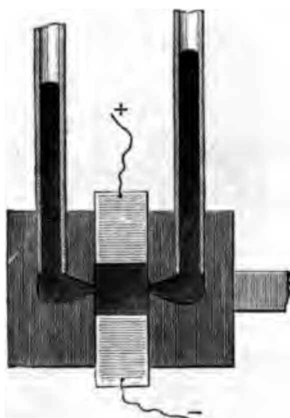


Fig. 168.

sion correspondante et e l'épaisseur de la cavité, la con d'équibre du liquide est

$$pea = IHa, \qquad I = \frac{e}{H} p.$$

Pour un même courant, la différence de niveau est portionnelle à l'intensité du champ et en raison inve l'épaisseur de la cavité.

633. Électrodynamomètres. — L'action réciproque de circuits parcourus par des courants I et I′ peut donn couple kII' et une force hII', les coefficients k et h éta finis par la forme et la position relative des circuits.

On peut remarquer ici que le produit II' de deux co représente une force mécanique (329) ; il en résulte le facteur k est une longueur et le facteur h un nombre trait. Si donc on veut employer cette méthode pour de

sures absolues, en faisant passer le même courant dans les deux circuits, la détermination expérimentale du couple kI^2 exigera encore que l'on connaisse exactement l'une des longueurs qui entrent dans la construction de l'appareil; si l'on a déterminé la force hI^2, la valeur du coefficient h ne renferme que les rapports des dimensions de même nature.

Il y a ainsi deux espèces d'électrodynamomètres, suivant que les appareils sont disposés pour mesurer, soit le couple produit par l'action réciproque des circuits, soit l'attraction ou la répulsion qui s'exerce entre eux.

634. **Couple de deux courants.** — L'électrodynamomètre de Weber [1] se compose d'une bobine mobile de surface S', que nous supposerons à suspension bifilaire, sur laquelle on fait agir le courant d'une bobine fixe. Dans la position initiale d'équilibre, les deux bobines sont à angle droit et, pour diminuer autant que possible l'action de la terre, l'axe de la bobine mobile est parallèle au méridien magnétique.

Si les bobines sont parcourues respectivement par des courants I et I', la bobine mobile est déviée d'un angle δ; le couple de l'action réciproque peut être représenté par $II'GS'\cos\delta$, le facteur G désignant une valeur moyenne de la constante galvanométrique du cadre fixe dans la région occupée par le cadre mobile.

On peut d'abord équilibrer ce couple en donnant à la suspension, par la partie supérieure, une torsion θ qui ramène le cadre dans sa position primitive. On a alors

$$II'GS' = C\sin\theta.$$

L'angle θ change de signe quand on change le sens d'un seul des courants, mais il reste le même quand on renverse en même temps les deux courants; c'est là une propriété caractéristique de l'électrodynamomètre.

Lorsque les deux bobines sont parcourues par le même courant I, on en déduit

$$I^2 = \frac{C}{GS'}\sin\theta.$$

[1] W. Weber, *Electrodyn. Maasbestimm.* 1re partie; 1846.

On peut, au contraire, laisser l'appareil libre et observer la déviation δ; le champ extérieur intervient alors dans la condition d'équilibre, qui devient

$$II'GS'\cos\delta = (C \pm S'I'H)\sin\delta.$$

On doit encore tenir compte des défauts de réglage. Supposons que le méridien fasse un angle α avec l'axe de la bobine mobile et un angle β avec le plan de la bobine fixe.

Les déviations δ_1 et δ_2, obtenues pour deux directions différentes du courant dans la bobine mobile seule, donnent

$$II'GS'\cos(\delta_1 + \alpha + \beta) = C\sin\delta_1 + I'S'H\sin(\delta_1 + \alpha),$$
$$II'GS'\cos(\delta_2 - \alpha - \beta) = C\sin\delta_2 - I'S'H\sin(\delta_2 - \alpha).$$

On aura, de même, pour les déviations δ_3 et δ_4 relatives à un changement de sens du courant dans la bobine fixe,

$$II'GS'\cos(\delta_3 - \alpha - \beta) = C\sin\delta_3 + I'S'H\sin(\delta_3 - \alpha),$$
$$II'GS'\cos(\delta_4 + \alpha + \beta) = C\sin\delta_4 - I''S''H\sin(\delta_4 + \alpha).$$

Lorsque les erreurs d'ajustement α et β sont très petites et que le coefficient C est assez grand par rapport au produit I'S'H, les quatre déviations sont très voisines. En négligeant les termes du second ordre, ces équations donnent

$$II' = \frac{C}{2GS'}\left(\operatorname{tang}\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \operatorname{tang}\frac{\delta_3 + \delta_4}{2}\right),$$

ou sensiblement

$$II' = \frac{C}{GS'}\operatorname{tang}\frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4}{4}.$$

Avec un ajustement approché, on peut donc négliger l'action de la terre et prendre, comme déviation normale, la moyenne des quatre lectures. En tous cas, le champ extérieur n'intervient que par des termes de correction.

Dans l'appareil de Weber, les deux cadres sont concentriques et la bobine mobile, formée par un grand nombre de spires, occupe une partie notable du vide laissé par la bobine fixe; le calcul de la constante G est assez long.

Dans l'électrodynamomètre construit par Latimer Clark ([1]) pour l'Association britannique, les deux cadres sont encore concentriques; mais le diamètre de la bobine mobile est petit par rapport à celui de la bobine fixe, et chacune d'elles est formée, comme la boussole de Von Helmholtz, par deux cadres égaux dont la distance est égale à leur rayon moyen.

Les deux bobines étant toujours rectangulaires pour la position primitive d'équilibre, ce qui facilite les calculs, on peut éloigner ces bobines l'une de l'autre à quelque distance, de façon par exemple que la bobine mobile occupe une position principale, c'est-à-dire que son centre soit situé dans le plan moyen ou sur l'axe de la bobine fixe.

Ces dispositions ont été employées par W. Weber dans les expériences qu'il a instituées pour étudier les lois relatives à l'action réciproque des courants.

L'application de cette méthode aux mesures absolues exige que l'on détermine le coefficient C pour chaque appareil et même pour chacune des séries d'expériences.

M. Pellat ([2]) a construit un instrument dans lequel le couple électrodynamique est évalué par des poids agissant à l'extrémité d'un fléau de balance; les constantes de l'appareil sont déterminées par les éléments de construction.

Afin de rendre le calcul plus facile, le circuit fixe est une bobine cylindrique horizontale, assez longue pour que le champ intérieur soit à peu près uniforme dans une certaine étendue. Le circuit mobile est une bobine à axe vertical située au centre de la première et attachée à un fléau de balance qui oscille dans le méridien vertical de la bobine fixe. Le même courant passe dans les deux systèmes; la communication avec la seconde bobine est faite par des fils d'argent très fins situés au voisinage du couteau, et disposés de manière à ne pas troubler les oscillations de la balance.

Si l'action du courant est compensée par p grammes agissant à l'extrémité d'un bras de levier de longueur l, la condition d'équilibre est, abstraction faite du champ terrestre,

$$I^2 GS' = pgl.$$

([1]) Maxwell, *Electr. and Magnet.*, t. II, p. 339.
([2]) H. Pellat, *Journ. de Phys.* [2], t. VI, p. 175; 1887.

On peut, au contraire, laisser l'a... deux bobines. l
la déviation δ; le champ extérieur ... ou de la secon
condition d'équilibre, qui devient

$$\mathrm{H'GS'}\cos\delta \quad \mathrm{C} \ldots 4\pi^2 a^2 \frac{\mathrm{NN'}}{\mathrm{L}}.$$

On doit encore tenir compte ... 570 et 571) perm...
posons que le méridien fasse un a... au voisinage de
mobile et un angle β avec le pla... être remplacé
Les déviations δ_1 et δ_2, obten... approchée que
férentes du courant dans la bo...

$$\mathrm{H'GS'}\cos(\delta_1+\alpha+\beta) \ldots$$

$$\mathrm{H'GS'}\cos(\delta_2-\alpha-\beta) \ldots$$

...re, soit en pla...
... au méridien. ...
... urants de sens c...

On aura, de même, pour les ...
changement de sens du cou...

$$\mathrm{H'GS'}\cos(\delta_3-\alpha-\ldots$$

$$\mathrm{H'GS'}\cos(\delta_4+\alpha+\ldots$$

...ant de 0,3 ampère
... précision de mes...
... l'erreur relative ...
... exactitude même ...
... une approximati...
... paraison.

Lorsque les erreurs d' ...
que le coefficient C est ... action réciproque ...
I'S'II, les quatre déviatio... même axe passe par u...
les termes du second ... des centres est co...
... avantage à choi...

$$\mathrm{H'} = \frac{\mathrm{C}}{2\mathrm{GS}} \ldots$$

... l'action est alors se...

ou sensiblement ... métallique un levi...
... tés une bobine plat...

$$\mathrm{H} \ldots$$

... transmis par des g...
... rale fixe située en r...

Avec un ajuste... pulsion; le courant e...
tion de la terre ... la torsion nécessai...
moyenne des q... distance.
rieur n'intervien... en plaçant le levi...
Dans l'appar... est préférable, au lie...
triques et la ... de monter à l'autr...
de spires, oc...
bobine fixe; l... XXII, p. 419; 1848.

extrémité du levier une seconde spirale identique à la première et parcourue par le même courant, de manière à constituer un système astatique (**325**).

Les spirales ne se prêtent pas facilement au calcul. Dans l'électrodynamomètre employé par Maxwell [1] pour la détermination du rapport des unités (**419**), le levier horizontal porte à chaque extrémité une bobine située entre deux autres bobines fixes dont les dimensions et la distance sont choisies de manière à réaliser la condition du maximum (**597**). L'action électrodynamique est évaluée soit par la torsion qui ramène à la position primitive, soit par la déviation.

Il est alors préférable d'avoir recours directement à la balance. Joule [2] employa ainsi, pour étudier les variations d'un courant dans ses recherches de calorimétrie, un système de trois bobines symétriques, de dimensions égales et constituées par des spirales plates.

Si l'on tient compte seulement des fils voisins, en considérant chaque élément comme soumis à l'action d'un courant parallèle indéfini, et qu'on désigne par L la longueur du fil de chaque spirale, par a le rayon de la surface, par p la charge nécessaire pour ramener la spirale mobile au milieu de l'intervalle des deux autres, le courant sera donné par une expression de la forme

$$I^2 = \frac{a^2}{4L^2} gp(1+\varepsilon),$$

dans laquelle le terme de correction ε était déterminé par comparaison avec une boussole des tangentes.

Lord Rayleigh s'est servi d'une disposition analogue (**593**), mais avec la précaution de remplacer les spirales par des bobines satisfaisant à la condition du maximum. L'avantage de ce système de trois bobines est que l'action mutuelle dépend surtout des rayons moyens et que les dimensions des gorges n'interviennent que par un terme de correction; la régularité d'enroulement n'est pas absolument nécessaire.

Cazin [3] avait aussi employé la balance pour déterminer

(1) Cl. Maxwell, *Phil. Trans.* R. S. L. for 1868, p. 643.
(2) J. P. Joule, *Br. Ass. Rep.*, 1864. — *Scientif. pap.*, t. I, p. 584.
(3) Cazin, *Ann. de Chim. et de Phys.*, [4], t. I, p. 257; 1864.

Soient N et N' les nombres de spires des deux bol
longueur de la première, a' le rayon moyen de la
A part les termes de correction, on a

$$G = 4\pi\frac{N}{L}, \qquad S' = N'\pi a'^2, \qquad GS' = 4\pi^2 a'^2$$

Les formules précédemment établies (**570** et **57**
de calculer le champ de la grande bobine au v
section médiane; le produit GS' doit alors être
une intégrale qui ne diffère de sa valeur app
un facteur très voisin de l'unité.

On élimine l'influence du champ terrestre.
la balance dans un plan perpendiculaire au
l'aide de deux expériences avec des coura
traires dans la bobine fixe.

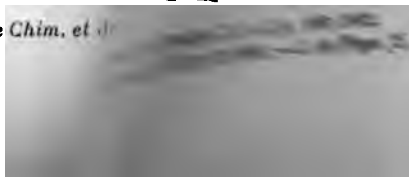
Dans l'appareil de M. Pellat, un courant
équilibré environ par $0^{gr},418$ et la pré
des différentes dimensions est telle que l
le courant ne dépasse pas 0,0005. L'ex
pesées est beaucoup plus grande et don
de 0,0001 dans les expériences de com

635. Attractions et répulsions. — L' ... (
s'exerce entre deux bobines A et A' de n ... le p
valeur maximum (**592**) lorsque la dista ... de l
venablement choisie. Il y a évidemn
cette position pour l'équilibre, puisq [redacted]
siblement constante. [redacted]

A. Lallemand (¹) suspendait à u [redacted]
horizontal portant à l'une de ses ex [redacted]
en spirale, à laquelle le courant é [redacted]
dets à mercure situés sur l'axe. U [redacted]
gard de la première agissait par
alors proportionnel à la racine ca [redacted]
pour ramener les spirales à la m [redacted]

On peut éliminer l'action de [redacted]
perpendiculaire au méridien, n [redacted]
d'équilibrer la spirale par un co [redacted]

(¹) A. Lallemand, *Ann. de Chim. et d*



on

. I le
omètre

ur i du cou-
ipal I, est *le*

ont et le galva-

. il est préférable, au
ster le fil sur les deux
que la résistance g_1 de

une force électromotrice
stérieure jusqu'aux bornes
n'aurait le courant dans le
dans la résistance $R + s$ du
sistance R et le galvanomètre.
anomètre un shunt de pouvoir
ons

$$+g) = I\left(R + \frac{g}{m}\right) \quad i(mR+g)$$

différentes intensités I_0, I_1 et I_2 en
ale I ou de l'intensité observée i.
nsité ne change pas dans le circuit
le shunt mis sur le galvanomètre, il
e temps dans le circuit principal une

$$m + \rho, \qquad \rho = g\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

L'opération se fait d'une manière automatique par la disposition représentée dans la figure 169 : s, s', s'' sont les shunts de résistances $\frac{g}{m-1}$, $\frac{g}{m'-1}$, $\frac{g}{m''-1}$ et ρ, ρ', ρ'' des résistances qui satisfont aux équations

$$\rho = g\left(1 - \frac{1}{m}\right), \quad \rho + \rho' = g\left(1 - \frac{1}{m'}\right), \quad \rho + \rho' + \rho'' = g\left(1 - \frac{1}{m'}\right).$$

Une cheville placée en a laisse passer le courant entier dans le galvanomètre G ; en b, elle introduit à la fois le shunt s

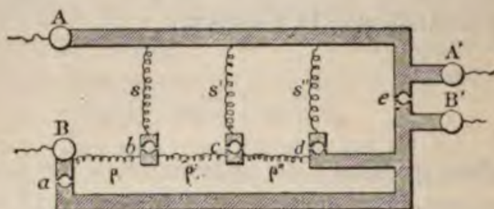


Fig. 169.

avec la résistance compensatrice ρ, et ainsi de suite pour les autres positions c et d. Quand on la met en e, elle ferme le galvanomètre sur lui-même ; c'est une position de sûreté.

Un système de shunts, munis de leurs résistances *compensatrices*, forme le complément nécessaire de tout galvanomètre de précision ; les pouvoirs multiplicateurs sont habituellement 10, 100 et 1000.

L'emploi des shunts facilite beaucoup les opérations galvanométriques, mais il entraîne quelques inconvénients qui exigent une grande circonspection toutes les fois que l'on doit faire des mesures exactes. Un des principaux résulte des variations de température qui, se faisant sentir inégalement sur le fil de la bobine et sur celui du shunt, altèrent d'une manière inconnue le rapport de leurs résistances et, par suite, la valeur du pouvoir multiplicateur.

637. Chutes de potentiel. — Une disposition fréquemment employée, et qui est surtout avantageuse quand il s'agit de courants très intenses, consiste à mettre les extrémités du

fil galvanométrique en communication avec deux points A et B du circuit principal, comprenant entre eux une résistance connue s, qui joue le rôle de shunt. Si le galvanomètre a une résistance considérable par rapport à celle du shunt, la résistance composée

$$g_1 = \frac{g}{m} = s\,\frac{g}{g+s}$$

diffère très peu de la résistance s, de sorte que l'introduction du galvanomètre en dérivation dans le circuit consideré n'altère pas d'une manière sensible l'intensité du courant total. On évalue ainsi la différence de potentiel $E = V_1 - V_2$ qui existe entre les deux points A et B en comparant la déviation obtenue δ, correction faite de la graduation, avec la déviation δ_0 que donne une force électromotrice étalon E_0, comme celle d'un couple Daniell, dont la résistance propre est faible par rapport à celle du galvanomètre. On a alors

$$\frac{E}{\delta} = \frac{E_0}{\delta_0}, \quad \text{d'où} \quad I = \frac{E}{s} = \frac{E_0}{s}\,\frac{\delta}{\delta_0}.$$

L'introduction d'un galvanomètre à très grande résistance entre deux points A et B équivaut à l'emploi d'un électromètre dont les électrodes seraient reliées aux mêmes points. L'électromètre, une fois gradué par une force électromotrice étalon, donne la différence de potentiel E, d'où l'on déduit l'intensité I du courant.

En particulier, si l'aiguille de l'électromètre à quadrants est reliée à l'une des paires de quadrants (609) et ceux-ci séparément aux points A et B, la déviation θ peut être représentée par

$$2\theta = k(V_1 - V_2)^2 = kE^2.$$

En appelant θ_0 la déviation produite par la force électromotrice étalon E_0, on a encore [1]

$$\frac{E^2}{E_0^2} = \frac{\theta}{\theta_0}, \qquad I = \frac{E}{s} = \frac{E_0}{s}\sqrt{\frac{\theta}{\theta_0}}.$$

[1] JOUBERT, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCI, p. 161; 1880.

La différence de potentiel E entre deux points peut être due simplement au passage du courant dans la résistance interposée, ou comprendre en outre une force électromotrice de nature quelconque. Dans tous les cas, si l'on connaît la valeur I du courant et la différence de potentiel E, le produit EI représente le travail électrique effectué entre ces deux points par unité de temps.

Pour déterminer séparément ces deux facteurs, il suffit de mettre successivement l'appareil, galvanomètre ou électromètre, en communication avec les points A et B comprenant la force électromotrice totale E, et avec deux autres points A' et B' séparés seulement par une résistance connue R.

Le travail EI peut encore être évalué directement par l'électromètre à quadrants (¹). Soient V_1 et V_2, V_1' et V_2' les potentiels respectifs des points A et B, A' et B'; on met les deux paires de quadrants en communication avec A' et B'. Si l'aiguille est reliée successivement aux points A et B, les déviations correspondantes étant α et β, on a

$$\alpha = k(V_1' - V_2')\left[V_1 - \frac{V_2' + V_1'}{2}\right],$$

$$\beta = k(V_1' - V_2')\left[V_2 - \frac{V_2' + V_1'}{2}\right];$$

$$\alpha - \beta = k(V_1' - V_2')(V_1 - V_2) = k\mathrm{RI}.\mathrm{E},$$

$$\mathrm{EI} = \frac{\alpha - \beta}{k\mathrm{R}}.$$

Enfin, si l'on emploie un électrodynamomètre dont la bobine fixe est dans le circuit principal, et dont la bobine mobile, de grande résistance, est placée en dérivation sur les deux points A et B, l'action réciproque est proportionnelle au produit EI, c'est-à-dire à la puissance électrique entre ces deux points; c'est le principe des *wattmètres*.

638. Graduation des galvanomètres. — Dans les instruments à miroir, où les déviations restent très petites, l'intensité du courant est sensiblement proportionnelle à la tangente de la déviation, ou à la simple déviation, et il en est de même pour

(¹) Potier, *Journal de Physique*, t. IX, p. 445; 1881.

tous les galvanomètres tant que les déviations restent comprises entre certaines limites.

Toutefois cette proportionnalité cesse rapidement d'être admissible quand les aiguilles sont d'une longueur notable par rapport aux dimensions du cadre; une graduation empirique est alors nécessaire.

Quand on a à sa disposition un galvanomètre à graduation systématique, comme une boussole de sinus ou une boussole de tangentes, on fait passer un même courant dans l'instrument étalon et dans le galvanomètre étudié, en ayant recours à l'emploi d'un shunt au besoin, pour que les déviations dans les deux instruments soient d'un ordre de grandeur convenable. Faisant varier ensuite l'intensité du courant commun, les indications du galvanomètre gradué donneront la graduation de l'autre. Toutefois, on préfère éviter autant que possible l'emploi d'un appareil auxiliaire.

La méthode de Poggendorff [1] consiste à transformer le galvanomètre en boussole des sinus. On place l'instrument sur un plateau dont la rotation autour d'un axe vertical soit mesurée par un cercle gradué. Le cadre étant d'abord parallèle au méridien, on y fait passer un courant constant, la déviation δ_0 donne une équation de la forme

$$I = H \frac{\sin \delta_0}{\varphi(\delta_0)}.$$

On fait alors tourner le cadre des quantités α', α'', α''', ..., à partir de la position initiale, et on observe les déviations correspondantes δ', δ'', δ''', ..., de l'aiguille par rapport au cadre pour le même courant. D'après les relations

$$\frac{I}{H} = \frac{\sin \delta_0}{\varphi(\delta_0)} = \frac{\sin(\alpha' + \delta')}{\varphi(\delta')} = \frac{\sin(\alpha'' + \delta'')}{\varphi(\delta'')} = \ldots,$$

les fonctions $\varphi(\delta)$ sont proportionnelles aux sinus d'angles déterminés par expérience; on en déduit la table des valeurs de $\frac{\sin \delta}{\varphi(\delta)}$ relatives à la position normale du cadre.

[1] POGGENDORFF, *Pogg. Ann.*, t. LVI, p. 324; 1842.

On peut ainsi déterminer la correction d'une boussole des tangentes. Si la loi des tangentes était exacte, la valeur de $\varphi(\delta)$ devrait, en effet, être proportionnelle à $\cos\delta$.

Pétrina [1] utilisait les propriétés des courants dérivés en plaçant le galvanomètre en dérivation entre deux points d'un conducteur rectiligne homogène parcouru par un courant. Si la résistance g du galvanomètre est très grande par rapport à la résistance s comprise entre les deux points, l'intensité I du courant principal et celle i du galvanomètre satisfont à la relation simple

$$gi = s\mathrm{I}.$$

L'intensité I étant constante, l'intensité i est proportionnelle à la résistance s, c'est-à-dire à la distance des points où se font les prises de contact.

La méthode la plus rapide est encore d'utiliser la loi d'Ohm en faisant varier suivant une loi connue, par l'addition de résistances étalonnées, l'intensité du courant produit par une force électromotrice constante, comme celle d'un couple Daniell. Si la résistance propre du couple est très faible par rapport à la résistance totale, les différentes intensités $\mathrm{I}, \mathrm{I}', \mathrm{I}'', \ldots$ du courant, qui correspondent à des résistances $\mathrm{R}, \mathrm{R}', \mathrm{R}'', \ldots$ de la portion du circuit extérieure au galvanomètre, donnent les relations

$$\mathrm{I}(\mathrm{R}+g) = \mathrm{I}'(\mathrm{R}'+g) = \mathrm{I}''(\mathrm{R}''+g), = \ldots.$$

Les rapports des courants seront ainsi déterminés par des rapports de résistances.

L'expérience devient très simple quand le galvanomètre est muni d'un shunt bien ajusté avec sa résistance compensatrice. Le shunt étant placé sur le galvanomètre, on règle la résistance extérieure de manière à obtenir une déviation de n divisions; on enlève alors le shunt, le courant principal ne change pas, mais il devient m fois plus grand dans le galvanomètre et donne une nouvelle déviation n', laquelle équivaut à mn.

Beaucoup d'autres méthodes ont été proposées pour le

(1) PÉTRINA, *Holger's Zeitschrift.*, Bd., I, p. 171; 1842.

même objet, mais nous n'insisterons pas davantage sur cette question qui a perdu la plus grande partie de son intérêt.

639. Expériences de comparaison. — Soient, pour deux galvanomètres, G et G' les constantes des cadres supposées indépendantes de la déviation, H et H' les composantes efficaces du champ extérieur sur chacune des aiguilles, δ et δ' les déviations, corrigées de la graduation, qui correspondent au passage d'un même courant I dans les deux instruments; on a évidemment la relation

$$I = \frac{H}{G}\delta = \frac{H'}{G'}\delta'.$$

Lorsque les sensibilités des deux instruments sont de même ordre, les déviations δ et δ' sont données directement par le courant commun; dans le cas contraire, on interpose un shunt sur l'instrument le plus sensible.

Si le galvanomètre de comparaison est un instrument absolu, cette expérience donne immédiatement le facteur par lequel il faut multiplier les indications du second pour en déduire l'intensité du courant en valeurs absolues.

Si le champ extérieur était le même pour les deux instruments, on en déduirait aussi le rapport des constantes galvanométriques des deux cadres; mais les influences locales permettent rarement d'obtenir des champs identiques, même en des points assez rapprochés.

Pour déterminer directement la constante galvanométrique G' d'un galvanomètre, on le place au milieu du cadre d'une boussole des tangentes, les plans moyens des spires étant parallèles, et on met les deux cadres en dérivation sur deux points d'un même circuit, de manière à constituer une sorte de galvanomètre différentiel. Soit I l'intensité dans la boussole, I' dans le galvanomètre et δ la déviation; on a

$$H \tan\delta = GI - G'I'.$$

L'action du galvanomètre serait en général prépondérante, mais on peut la réduire par une résistance convenable. Si on ramène ainsi l'aiguille au zéro et que les résistances totales

des deux instruments soient g et g', on a alors

$$\frac{G'}{G} = \frac{I}{I'} = \frac{g'}{g}.$$

Il est important de remarquer que cette expérience donne, par la comparaison des résistances g et g', le rapport des rayons d'action moyenne des deux cadres (**560**) et, par suite, le rapport de leurs rayons moyens, lorsque les gorges ont une forme assez simple pour que l'on puisse calculer facilement les termes de correction.

640. Tarage d'un galvanomètre. — Dans les galvanomètres à aiguilles astatiques ou à aimants correcteurs, la sensibilité peut changer d'une manière notable, soit par les variations de température, soit par le déplacement des aimants ; il serait nécessaire de répéter fréquemment la comparaison avec un instrument absolu, mais cette méthode n'est pas assez expéditive pour les mesures pratiques qui ne demandent pas une grande précision.

Le plus simple est d'avoir recours à un étalon de force électromotrice E, par exemple un couple Daniell, que l'on réunit au galvanomètre par l'intermédiaire d'une résistance convenable R (20 000 ou 30 000 ohms avec les galvanomètres astatiques de Lord Kelvin).

Supposons, en outre, que l'on emploie un shunt de pouvoir multiplicateur m ; la déviation observée correspondant à un nombre x de divisions, l'intensité i du courant dans le galvanomètre peut s'écrire (**636**)

$$i = \frac{I}{m} = \frac{E}{mR + g} = \frac{x}{N}.$$

Comme cette intensité est sensiblement proportionnelle à la déviation, la constante N désigne le nombre de divisions qui correspondrait à l'unité de courant.

Appelant R_1 la résistance que devrait avoir le circuit pour que la force électromotrice employée E produise une déviation d'une division, on a

$$\frac{1}{N} = \frac{E}{R_1}, \qquad \text{ou} \qquad R_1 = NE.$$

La valeur de R_1 mesure encore la sensibilité; on l'appelle souvent le *nombre de mérite* du galvanomètre.

Avec les galvanomètres très sensibles, tels qu'on les emploie aujourd'hui, la résistance R est en général très grande par rapport à celle de l'instrument, ce qui donne simplement

$$R_1 = NE = mRx.$$

Si on exprime la force électromotrice E en volts et la résistance R en ohms, l'intensité i est évaluée en ampères.

Lorsque la résistance propre ρ du couple n'est pas négligeable devant celle du circuit, on peut l'éliminer par une des méthodes suivantes ([1]).

La disposition de l'expérience étant représentée par la figure 170, on note la déviation du galvanomètre G muni du



Fig. 170.

shunt s. Appelant a, b et c les résistances des trois branches indiquées par ces mêmes lettres, g_1 celle du galvanomètre avec son shunt, I le courant dans la branche a et $I_1 = mi$ dans la branche b, on a

$$\frac{I_1}{c} = \frac{I - I_1}{g_1 + b} = \frac{I}{c + g_1 + b},$$

([1]) Hockin, *Report of the Committee of electrical Standards* (*Brit. Assoc.*), edited by F. Jenkin, p. 149.

des deux instruments soient g et g', on a alors

$$\frac{G'}{G} = \frac{I}{I'} = \frac{g'}{g}.$$

Il est important de remarquer que cette expérier par la comparaison des résistances g et g', le ra rayons d'action moyenne des deux cadres (560) et. le rapport de leurs rayons moyens, lorsque les g une forme assez simple pour que l'on puisse calcu ment les termes de correction.

640. Tarage d'un galvanomètre. — Dans les galv à aiguilles astatiques ou à aimants correcteurs, la s peut changer d'une manière notable, soit par les de température, soit par le déplacement des aimants nécessaire de répéter fréquemment la comparaiso instrument absolu, mais cette méthode n'est pas a ditive pour les mesures pratiques qui ne demande grande précision.

Le plus simple est d'avoir recours à un étalon de tromotrice E, par exemple un couple Daniell, que au galvanomètre par l'intermédiaire d'une résist nable R (20 000 ou 30 000 ohms avec les galvano tiques de Lord Kelvin).

Supposons, en outre, que l'on emploie un shu multiplicateur m; la déviation observée corres nombre x de divisions, l'intensité i du courant nomètre peut s'écrire (636)

$$i = \frac{I}{m} = \frac{E}{mR + g} = \frac{x}{N}.$$

Comme cette intensité est sensiblement pro déviation, la constante N désigne le nombre correspondrait à l'unité de courant.

Appelant R_1 la résistance que devrait av que la force électromotrice employée E prod d'une division, on a

$$\frac{1}{N} = \frac{E}{R_1}, \quad \text{ou} \quad R_1 =$$

on a recours à un amortisseur auxiliaire, aimant ou courant, mais on peut aussi utiliser le courant lui-même par l'une des méthodes suivantes, qui sont dues à Gauss, et qui conviennent surtout pour l'observation de systèmes, aimants ou cadres mobiles, dont le moment d'inertie est considérable.

L'établissement du courant déplace d'un angle δ la position d'équilibre. Lorsque le mouvement est pendulaire, l'arc de de première impulsion relatif au courant permanent est 2δ; mais si on supprime le courant quand l'arc parcouru est la moitié de la déviation permanente δ, ce qui correspond au tiers de la demi-période τ, le système a acquis une vitesse suffisante pour atteindre la position d'équilibre, avec une vitesse nulle, à l'époque $\frac{2\tau}{3}$; si on rétablit alors le courant, l'appareil restera immobile. Comme il y a toujours un peu d'amortissement, et que le courant n'est pas supprimé ou rétabli exactement aux époques voulues, il se produit encore de petites oscillations dont on peut prendre la moyenne.

De même, pour ramener le système au zéro avec une vitesse nulle, il faut interrompre le courant pendant un tiers du temps τ, le rétablir pendant le deuxième tiers, puis le supprimer d'une manière définitive.

Cette règle ne suffit plus lorsque l'amortissement est notable. Gauss a calculé, par les formules du n° **532**, et pour différentes valeurs du décrément $\lambda\tau$, la table suivante qui donne les temps $t_1 - t_0$ et $t_2 - t_1$ pendant lesquels on doit maintenir et supprimer le courant pour qu'après rétablissement du courant à l'époque t_2, l'appareil arrive à la position d'équilibre avec une vitesse nulle :

$\lambda\tau$.	$\frac{t_1-t_0}{\tau}$.	$\frac{t_2-t_1}{\tau}$.
0	0,333	0,333
0,1	0,376	0,291
0,2	0,418	0,251
0,3	0,459	0,214
0,4	0,498	0,180
0,5	0,535	0,149
0,6	0,569	0,123

et, comme la résistance t... ...ortissé... d'abor... valeur ... ...able, car, s... s'éloignent ...uper.

$$R = \rho + a + \ldots$$

$$E = IR = \frac{I_1}{c} R(c + g_1 \ldots$$

...sité du cha... ...lvanomètre.

On remplace alors ... éliminer les rente a' et on donne à ... pour le cham le courant reste le mê... au lieu de déter que l'intensité I_1 ne ... ux renverser le

La nouvelle résista... d'autre, ce qui ... est surtout n...

$$R \ldots$$

... traverse alors le ... oscillations p...

qui détermine la va... ...entes, on laisse ... d'une os... Désignant pa... à droite et à ... on aura (54 ... une série de ... telles que

$$\frac{E}{I_1} = c \left[\frac{a}{b} \ldots \right.$$

$$R_1 = mx \frac{E}{I_1} \ldots$$

Il est encore ... aussi calcul dans le premie... l'équilibre remplacer b ... d'abord e change pas. ... est nul : s ... oscillation ... a

$$(\rho + a)\left(1 - \ldots\right.$$

641. Obs...

dont l'am... par de d'un tem... observ rant perm... premiè

gation, va prendre un mouvement dans la direction contraire, de changer le sens du courant, en le maintenant pendant toute la durée de l'oscillation, et de répéter ensuite plusieurs fois la même manœuvre.

Les écarts successifs dans les deux sens sont alors

$$a_1 = a_0(1+\alpha) = a_0\alpha + a_0,$$

$$a_2 = (a_0 + a_1)\alpha + a_0 = a_0(1+\alpha)(1+\alpha),$$

$$a_3 = (a_0 + a_2)\alpha + a_0 = a_0(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2),$$

....

$$a_n = (a_0 + a_{n-1})\alpha + a_0 = a_0(1+\alpha)(1+\alpha+ \ldots +\alpha^{n-1}).$$

L'écart limite a relatif à un régime permanent d'inversions donnerait alors

$$a = a_0\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \qquad a_0 = a\frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Cette méthode se prêterait difficilement à des mesures précises, mais elle est excellente pour mettre en évidence l'existence d'un courant très faible.

643. Galvanomètre balistique. — L'emploi du galvanomètre pour déterminer la quantité d'électricité que débite un courant momentané, ou une décharge de forme quelconque, exige que la durée de la décharge soit faible par rapport à la période des oscillations de l'aiguille, en d'autres termes, que le courant cesse avant que l'aiguille se soit écartée d'une manière notable de sa position d'équilibre.

On a vu (**365**) que la vitesse angulaire initiale ω_0 imprimée à l'aiguille d'un galvanomètre par la décharge q est déterminée par l'expression

$$K\omega_0 = MGq.$$

D'autre part, si les déviations restent assez faibles et que α_1 soit le premier angle d'écart, on a (**541**)

$$\omega_0 = \alpha_1\sqrt{\omega^2+\lambda^2}\, e^{\frac{\lambda}{\omega}\operatorname{arc\,tang}\frac{\omega}{\lambda}}.$$

Il en résulte, en tenant compte de la relation

$$\frac{MH}{K} = \omega^2 + \lambda^2,$$

$$q = \frac{K}{MG}\omega_0 = \frac{H}{G}\frac{\omega_0}{\omega^2+\lambda^2} = \frac{H}{G}\frac{\alpha_1}{\sqrt{\omega^2+\lambda^2}}e^{\frac{\lambda}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\lambda}}.$$

Si τ est la durée d'une oscillation simple, on remplacera ω par sa valeur $\frac{\pi}{\tau}$ et la formule devient

$$q = \frac{H}{G}\cdot\frac{\tau}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2\tau^2}{\pi^2}}}\cdot e^{\frac{\lambda\tau}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\lambda\tau}}.$$

L'étude des oscillations donne la durée τ et le décrément logarithmique correspondant. Dans la plupart des cas, on peut prendre la valeur approchée

$$q = \frac{H}{G}\cdot\frac{\tau}{\pi}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{4}\right).$$

Les observations au galvanomètre balistique ne comportent un certain degré d'exactitude que si les oscillations sont assez lentes; cette condition est nécessaire, non seulement pour éliminer l'influence de la durée de décharge, mais aussi pour permettre la lecture des élongations. Si l'on veut répéter une série d'observations successives, on arrêtera chaque fois l'aiguille par un amortisseur auxiliaire, aimant ou courant.

Comme l'aiguille n'est pas absolument immobile au début des expériences, on observe d'abord l'amplitude totale primitive $2\alpha_0$; la décharge étant faite au moment du passage au zéro, il faut ensuite diminuer ou augmenter de α_0 l'angle d'écart observé α_1, suivant que l'impulsion a eu lieu dans le sens ou en sens contraire du mouvement initial.

Quelle que soit la forme de la décharge (536 et 537), elle produit le même effet qu'un choc à une époque intermédiaire et, si sa durée totale est petite par rapport à la période d'oscillation, l'amplitude ne dépend, au second ordre près, que de la quantité totale d'électricité. Dans ces mêmes conditions,

l'élongation produite par deux ou plusieurs décharges successives ne dépend que de leur somme algébrique.

On a vu encore (542) comment on peut, par la répétition d'une même décharge à des époques différentes du mouvement oscillatoire, multiplier les angles d'écart ou obtenir un régime permanent par des méthodes de recul, mais ces dispositions compliquées ne donnent jamais de meilleurs résultats que l'observation exacte d'une seule impulsion.

L'emploi des shunts n'est pas permis dans un galvanomètre balistique. Les décharges ne se partagent suivant les lois des courants dérivés, entre le shunt et le galvanomètre, que si l'aiguille reste immobile pendant toute la décharge (385), condition qu'il est presque impossible de réaliser.

L'expérience suivante ([1]) met bien en évidence l'influence du mouvement de l'aiguille. Deux galvanomètres identiques, placés en dérivation l'un par rapport à l'autre sur le même circuit, reçoivent la décharge d'un condensateur; tous les deux donnent une même déviation, moitié moindre que celle qu'on observe dans chacun d'eux quand il reçoit seul la décharge. Si on recommence l'expérience en fixant l'une des aiguilles, on trouve une déviation beaucoup moindre pour l'aiguille restée libre ; le circuit correspondant est le seul qui soit le siège d'un travail électromagnétique et dont la résistance apparente soit augmentée.

Avec les galvanomètres différentiels employés dans les conditions où l'aiguille reste immobile, l'usage des shunts est légitime, même pour les courants instantanés.

La méthode balistique comporte deux sortes d'erreurs qu'il paraît difficile d'éliminer complètement et qui, dans certains cas, peuvent avoir une influence notable.

En premier lieu, le courant qui traverse le galvanomètre agit pendant un temps très court, mais avec une grande énergie. Est-il permis d'admettre que cette action, qui est perpendiculaire à l'axe de l'aiguille, n'est pas de nature à amener dans son moment magnétique un changement temporaire assez grand pour que l'impulsion reçue ne soit plus égale à celle qui correspondrait au moment primitif?

([1]) L. Clark, *Journ. Telegr. Eng.* t. II, p. 16; 1873.

En second lieu, on applique à la correction de l'arc d'impulsion le décrément logarithmique déduit de l'observation des oscillations continues. Ce procédé serait parfaitement correct si l'amortissement était dû uniquement aux courants induits par le mouvement de l'aiguille; mais, lorsqu'une partie notable de l'effet est due à la résistance de l'air, il y a lieu de se demander si cette résistance agit encore de la même manière, en particulier au voisinage de la position d'équilibre, sur un mobile soumis à des oscillations régulières, que sur ce même mobile, primitivement au repos, et qui se meut sous l'action d'un choc. La résistance de l'air doit être plus grande dans le second cas que dans le premier; par suite, la correction est insuffisante. Il est vrai que la même cause a pour effet d'augmenter la durée de l'oscillation et d'introduire une nouvelle erreur, de sens contraire à la première, qui peut la compenser en grande partie.

644. Mesure d'une durée très courte. — Si la décharge q qui traverse le galvanomètre provient d'un courant constant I_0, dont le circuit a été fermé pendant un temps θ très court par rapport à la période d'oscillation de l'aiguille, l'angle d'impulsion α, corrigé de l'amortissement et de la durée de la décharge, satisfait à l'équation

$$q = \frac{H}{G}\frac{\tau}{\pi}\alpha.$$

Appelant δ la déviation réduite que donnerait le courant permanent I_0, on en déduit

$$\theta = \frac{q}{I_0} = \frac{\tau}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\delta}. \tag{25}$$

Pouillet ([1]) a indiqué cette méthode pour mesurer un intervalle de temps très petit, comme celui que met une balle pour parcourir le canon d'un fusil. Elle n'est applicable qu'autant que les effets d'induction sont négligeables; dans les autres cas, il faut tenir compte des extra-courants de fermeture et de rupture. Ce dernier n'a le plus souvent qu'une influence

([1]) Pouillet, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XIX, p. 1384; 1844.

très faible, parce que le circuit se trouve alors complété par la couche d'air dans laquelle a lieu l'étincelle et dont la résistance est très grande.

Si l'on considère comme négligeable la quantité d'électricité qui correspond à l'extra-courant de rupture, et qu'on appelle R et L les éléments du circuit (**381**), on a

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

$$(26) \qquad q = \int_0^\theta I\,dt = I_0\left[\theta - \frac{L}{R}\left(1 - e^{-\frac{R\theta}{L}}\right)\right].$$

Lorsque la durée θ est très grande par rapport au temps nécessaire pour l'établissement définitif du courant, l'exponentielle est négligeable et cette équation donne, au moins d'une manière très rapprochée,

$$(25)' \qquad \theta = \frac{T}{\pi}\frac{\alpha}{\delta} + \frac{L}{R}.$$

Il suffit alors d'ajouter, à la durée calculée par l'équation (25), un terme constant égal au quotient du coefficient de self-induction du circuit par sa résistance.

Un artifice expérimental permet d'éliminer toutes les difficultés relatives aux courants induits : au lieu de rompre le circuit à la fin de l'intervalle θ, on supprime seulement la force électromotrice constante en lui substituant un fil métallique de résistance égale. Les deux courants d'induction de sens contraires sont alors égaux et la quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre est bien $I_0\theta$.

Lorsqu'on réunit par un conducteur de résistance R, sans induction propre, les armatures d'un condensateur de capacité C, dont la conductibilité intérieure est négligeable, l'intensité I du courant à une époque quelconque est liée à la différence E du potentiel des armatures par la loi d'Ohm $E = IR$ et on a $I\,dt + C\,dE = 0$. Il en résulte, en appelant E_0 et E_1 les différences de potentiel initiale et finale,

$$\frac{E}{R} + C\frac{dE}{dt} = 0, \qquad \text{ou} \qquad t = RC\,\mathfrak{L}.\frac{E_0}{E_1}.$$

Telle est la méthode employée par M. R. Sabine ([1]) pour déterminer la vitesse des projectiles. Les armatures d'un condensateur communiquent, d'une part, avec les pôles d'une pile à faible résistance qui maintient constante une différence de potentiel E_0 et, d'autre part, avec un fil de très grande résistance R. Les deux fils étant situés à une distance déterminée sur le trajet d'un projectile, le premier est coupé d'abord, puis le second au bout du temps t. Le rapport de la différence de potentiel résiduelle E_1 à la valeur initiale E_0 s'évalue, soit par un électromètre, soit par les décharges correspondantes dans un galvanomètre balistique.

On peut d'ailleurs graduer l'appareil directement à l'aide d'un commutateur tournant auquel on donne brusquement une vitesse déterminée et qui, une fois le condensateur chargé et isolé, ferme le circuit pendant un intervalle de temps connu par la distance de deux butoirs sur le bord d'un disque dont on connaît la vitesse. On évalue ainsi des intervalles de temps qui ne dépassent pas $0^s,0001$.

645. Décharges dans l'électrodynamomètre. — Lorsqu'un même courant I passe dans les deux bobines d'un électrodynamomètre (**634**), le couple relatif à une déviation δ est égal à $S'GI^2\cos\delta$.

K étant le moment d'inertie de la bobine mobile, la vitesse angulaire ω_0, imprimée par une décharge dont la durée totale θ est très petite par rapport à la durée des oscillations, est donnée par l'équation

$$(27) \qquad K\omega_0 = S'G\int_0^\theta I^2\cos\delta\,dt.$$

Si les déviations restent très petites et que I_m^2 soit le carré moyen du courant, l'intégrale peut être remplacée par $I_m^2\theta$. On a alors, en posant

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{\tau^2} = \frac{C}{K} - \lambda^2,$$

$$I_m^2\theta = \frac{K}{S'G}\omega_0 = \frac{C}{S'G}\frac{\tau}{\pi}\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda\tau}{\pi}\right)^2}}e^{\frac{\lambda\tau}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{\lambda\tau}},$$

([1]) R. Sabine, *Ph. Mag.* [5], t. I, p. 337; 1876.

pour un amortissement très faible,

$$I_m^2 \theta = \frac{C}{S'G} \frac{\tau}{\pi} \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{4}\right).$$

Si les deux bobines de l'électrodynamomètre sont parcourues par des courants différents, on remplacera dans l'équation (27) le carré I^2 par le produit des intensités I et I', les termes de l'intégrale ne différant de zéro que pendant le temps où les deux courants existent à la fois. La valeur de l'intégrale dépend de la loi de variation des deux courants; cette loi n'est généralement pas la même, non seulement pour deux décharges distinctes, mais aussi pour une même décharge qui serait partagée par dérivation entre les deux bobines. L'impulsion produite dans ces conditions correspondrait à un phénomène très complexe.

L'observation des impulsions imprimées par une même décharge au galvanomètre et à l'électrodynamomètre permet, comme l'a montré Weber (¹), d'apprécier sa durée, au moins d'une manière approximative.

Si l'on suppose, en effet, le courant I uniforme et qu'on distingue par des accents les quantités relatives à l'électrodynamomètre, les deux lectures donnent, abstraction faite des termes de correction,

$$I\theta = \frac{H}{G} \frac{\tau}{\pi} \alpha, \qquad I^2\theta = \frac{C}{S'G'} \frac{\tau'}{\pi} \alpha';$$

$$\theta = \frac{H^2}{G^2} \cdot \frac{S'G'}{C} \cdot \frac{\tau^2 \alpha^2}{\pi \tau' \alpha'}.$$

On peut éliminer les constantes des deux instruments en observant les déviations réduites δ et δ' que produit un même courant dans le galvanomètre et dans l'électrodynamomètre; il en résulte

$$\frac{H^2}{G^2} \delta^2 = \frac{C}{G'S'} \delta',$$

$$\theta = \frac{\delta'}{\delta^2} \cdot \frac{\tau^2 \alpha^2}{\pi \tau' \alpha'}.$$

(¹) W. Weber, *Electrodyn. Maasb.*, I, p. 80; 1846.

La dernière expression ne renferme plus que les nombres de l'expérience, mais elle ne donnera en général qu'une évaluation assez grossière de la durée réelle de la décharge, parce que l'hypothèse de l'uniformité du courant est le plus souvent très éloignée de la vérité.

646. Courants interrompus. — Il est évident qu'une série continue de décharges identiques, dont l'intervalle de succession est petit par rapport à la période d'oscillation de l'aiguille, donnera au galvanomètre la même déviation permanente que le courant uniforme de même débit.

Pour démontrer que l'action d'un courant est proportionnelle à la quantité d'électricité qui s'écoule par unité de temps, Pouillet [1] envoyait à travers un galvanomètre la succession des courants interrompus d'une pile constante. L'interrupteur était formé par une roue en bois portant sur son contour un anneau métallique continu d'un côté et dentelé de l'autre; deux languettes élastiques appuient l'une sur la partie pleine, l'autre sur la dentelure, de sorte que le courant est interrompu chaque fois que cette dernière se trouve sur un vide. Quand la roue est mise en rotation, si le circuit est court et sans induction propre sensible, la déviation croît d'abord avec la vitesse; elle devient ensuite constante et proportionnelle au rapport qui existe entre la largeur d'une dent et la somme d'un plein et d'un vide. Dans les expériences de Pouillet, les courants ont pu être interrompus 1 200 fois par seconde sans que l'intensité subît de variation appréciable; mais cette loi cesse d'être vraie dès que les effets d'induction ne sont plus négligeables et on ne tarde pas à constater que l'intensité diminue à mesure que la vitesse augmente.

Soit, en effet, I_0 l'intensité du courant permanent; la décharge q pendant la durée θ de chaque contact est donnée par l'équation (26). S'il y a N interruptions par seconde, le courant moyen est Nq. En appelant α le rapport de la largeur d'une dent à la somme d'un plein et d'un vide, on a $N\theta = \alpha$ et l'intensité moyenne I est

$$I = \alpha I_0 \left[1 - \frac{NL}{R\alpha} \left(1 - e^{-\frac{R\alpha}{LN}} \right) \right].$$

[1] POUILLET, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. IV, p. 187; 1837.

Cette expression tend évidemment vers zéro lorsque les interruptions deviennent très rapides.

Les expériences de Bertin (1) et de Cazin (2) sur les courants interrompus sont entièrement d'accord avec cette formule ; il en résulte ainsi que la quantité d'électricité qui correspond à l'extra-courant de rupture est réellement négligeable.

647. Courants variables. — Lorsqu'un circuit est parcouru par une série de courants instantanés, ou de décharges alternativement de sens contraires qui se succèdent avec une rapidité suffisante, l'intensité moyenne du courant est égale à la somme algébrique des quantités d'électricité qui passent dans chaque unité de temps ; elle est nulle, en particulier, pour les courants sinusoïdaux. Il en serait encore de même avec les courants d'une bobine d'induction, comme celle de Ruhmkorff, dans un circuit fermé, puisque les quantités d'électricité qui correspondent aux deux espèces de courants induits sont égales. Si le circuit renferme en outre une force électromotrice constante, la déviation est la même que si cette force électromotrice existait seule (3).

648. Déviation indifférente ou bilatérale. — Il arrive cependant, en particulier avec des galvanomètres astatiques, que, pour un courant dont l'intensité moyenne est nulle, l'aiguille est en équilibre instable au zéro, et qu'une fois déviée, elle s'en écarte jusqu'à 90°. Ce fait, signalé par Poggendorff (4) et appelé par lui *déviation indifférente*, est dû au magnétisme temporaire développé par le courant ; il a été expliqué d'une manière plus complète par M. Chrystal (5).

Lorsque le champ extérieur est faible et le courant alternatif suffisamment intense, l'aiguille quitte sa position d'équilibre et dévie de 90 degrés environ, indifféremment dans un sens ou dans l'autre ; c'est le phénomène observé d'abord par Poggendorff et que M. Chrystal désigne sous le nom de *déviation bilatérale*.

Quand on diminue le courant ou qu'on augmente le champ magnétique, deux cas peuvent se présenter, suivant la posi-

(1) Bertin, *Ann. de Chim. et de phys.*, [4], t. XVI, p. 25 ; 1869.
(2) Cazin, *Ann. de Chimie et de Phys.*, [4], t. XVII, p. 385 ; 1869.
(3) Schuster, *Phil. Mag.* [4], t. XLVIII, p. 251 ; 1874.
(4) Poggendorff, *Pogg. Ann. Bd.*, t. XLV, p. 353 ; 1838.
(5) Chrystal, *Phil. Mag.* [5], t. II, p. 401 ; 1876.

tion initiale de l'aiguille : 1° si elle est alors exactement dir dans le plan de symétrie du cadre, elle reste immobile; sa direction initiale est à droite ou à gauche du plan de sy trie, le passage du courant augmente toujours la dévia d'une quantité qui est d'abord proportionnelle à l'écart mitif. Cette déviation, que M. Chrystal appelle *unilatéı* est indépendante de la période des courants alternatifs.

Soient α l'angle que fait la direction de l'aiguille ave plan moyen des spires dans sa position d'équilibre, β la leur de cet angle sous l'influence du courant I à l'époqı L'aiguille est soumise au couple

$$C = \mathrm{HM}\sin(\beta - \alpha) - \mathrm{GMI}\cos\beta = \mathrm{M}[\mathrm{H}\sin(\beta - \alpha) - \mathrm{GI}\cos\beta$$

Supposons que l'aimantation de l'aiguille renferme un te proportionnel à la composante du champ parallèle à sa d tion; on devra remplacer M par une expression de la form

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_0 k[\mathrm{GI}\sin\beta + \mathrm{H}\cos(\beta - \alpha)].$$

Pour obtenir la valeur moyenne C_m du couple, il faut, a cette substitution, multiplier C par dt, l'intégrer de o à θ e viser le résultat par θ. Les termes qui ne contiennent pas tensité I ne changent pas; ceux qui ont en facteur la mière puissance de I disparaissent, puisque le courant mo est nul; dans les termes en I^2, ce facteur devra être remp par le carré moyen I_m^2. Il reste ainsi

$$\frac{C_m}{\mathrm{HM}_0} = \sin(\beta - \alpha) + \frac{k\mathrm{H}}{2}\left[\sin 2(\beta - \alpha) - \frac{\mathrm{G}^2\mathrm{I}_m^2}{\mathrm{H}^2}\sin 2\beta\right].$$

Le facteur $\frac{\mathrm{G}^2\mathrm{I}_m^2}{\mathrm{H}^2}$ représente le carré de la déviation à produirait le courant uniforme I_m dans le galvanomètre terme correspondant est très grand par rapport à celui précède. Comme le coefficient k est très petit, on peut éc en posant

$$\mathrm{A} = k\frac{\mathrm{G}^2\mathrm{I}_m^2}{2\mathrm{H}},$$

$$C_m = \mathrm{HM}_0[\sin(\beta - \alpha) - \mathrm{A}\sin 2\beta].$$

Pour rendre compte de l'effet produit, on construira les deux courbes B et B′ définies par les équations

$$y = \sin\beta, \qquad y' = A\sin 2\beta.$$

En les superposant avec une différence de phase α pour la première, l'équilibre correspond à leurs points d'intersection.

Supposons d'abord $\alpha = 0$; deux cas peuvent alors se présenter. Si $2A > 1$, il y a quatre positions d'équilibre: O, P, P′ (fig. 171) et celle des points Q ou Q′ qui indiquent un retour-

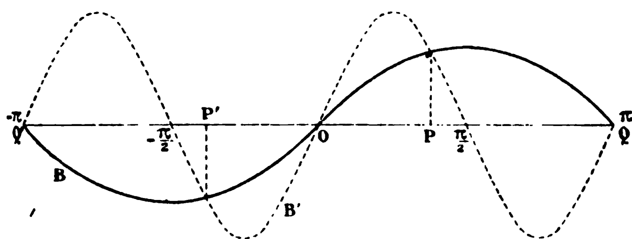


Fig. 171.

nement de 180° pour l'aiguille, cette dernière étant toujours instable; la première O, qui correspond à la position primitive, est aussi instable. Les deux autres P et P′ sont stables; elles correspondent à des déviations symétriques, d'autant plus voisines de $\pm 90°$ que le coefficient A est plus grand.

Si $2A < 1$, les deux courbes B et B′ ne se rencontrent plus qu'aux points O et Q; le zéro devient alors une position d'équilibre stable.

Lorsque l'écart α est positif, la courbe B sera déplacée vers la droite de cette quantité α. Les positions d'équilibre P′ et P sont alors dissymétriques et la première ne tarde pas à disparaître si $A < 1$. La valeur de β pour l'équilibre P est d'autant plus voisine de 90° que l'écart α est plus grand.

649. Courants alternatifs. — L'électrodynamomètre se prête particulièrement à la mesure des courants alternatifs, à la condition que leur période soit petite par rapport à celle des oscillations de la bobine mobile et que le courant passe intégralement dans les deux bobines. La déviation δ détermine le

carré du courant efficace (393) par les mêmes expressions que s'il s'agissait d'un courant uniforme.

Il est bon de remarquer alors que, si le circuit renferme une force électromotrice sinusoïdale, la résistance et l'induction propre de l'électrodynamomètre interviennent dans l'impédance du circuit et dans la phase du courant.

Si les bobines sont parcourues séparément par des courants sinusoïdaux de même période, mais différents par l'intensité et par la phase, tels que

$$I_1 \sin(\omega t - \alpha_1) \quad \text{et} \quad I_2 \sin(\omega t - \alpha_2),$$

le produit moyen des courants est $I_1 I_2 \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}$; l'action du champ terrestre est nulle et la déviation δ de l'électrodynamomètre devient

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{S'G}{2C} I_1 I_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Supposons que les bobines soient placées en dérivation sur un courant principal d'amplitude I. En appelant r_1 et r_2 les résistances des branches dérivées, L_1, L_2 et M leurs coefficients de self induction et d'induction mutuelle, on aura (397)

$$\frac{I_1^2}{r_2^2 + (L_2 - M)^2\omega^2} = \frac{I_2^2}{r_1^2 + (L_1 - M)^2\omega^2} = \frac{I^2}{(r_1 + r_2)^2 + (L_1 + L_2 - 2M)^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 - \alpha_2) = \omega \frac{r_2(L_1 - M) - r_1(L_2 - M)}{r_1 r_2 + (L_1 - M)(L_2 - M)\omega^2}.$$

La différence de phase $\alpha_1 - \alpha_2$ pouvant varier de 0 à 90°, $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ varie de 1 à 0.

Si la déviation δ est assez faible pour que les bobines restent à peu près rectangulaires, le coefficient M est négligeable. Dans ce cas, la différence de phase est nulle pour la condition [illegible], c'est-à-dire quand les résistances des bobines sont dans le rapport de leurs coefficients de self-induction, ce qui a lieu pour des bobines semblables.

Supposons enfin que r_1 et L_1 désignent la résistance et le coefficient de self induction de l'électrodynamomètre dont les

bobines sont réunies, et que l'instrument soit placé en dérivation sur deux points du circuit principal entre lesquels existe un conducteur dont les éléments sont r_2 et L_2. Les mêmes équations déterminent alors l'amplitude I_1 en fonction de l'amplitude I du courant principal.

Il est généralement facile de disposer l'expérience de manière que la valeur de M soit nulle. En tous cas, ce coefficient est nul lorsque $L_2 = 0$ pour le conducteur qui sert de shunt; on a alors

$$I^2 = I_1^2\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}\right)^2\left[1 + \left(\frac{L_1\omega}{r_1 + r_2}\right)^2\right].$$

Si le second terme de la parenthèse est très petit, ce qui est le cas le plus habituel quand la fréquence du courant n'est pas très grande, on voit que l'emploi des shunts, avec les précautions indiquées, permet aussi de déterminer les courants alternatifs à l'aide d'un électrodynamomètre.

Lorsque ce terme a une valeur notable, on peut l'éliminer par deux expériences différentes en faisant varier l'une des résistances r_1 ou r_2.

L'électromètre à quadrants élimine ces difficultés d'induction. L'aiguille étant reliée à l'une des paires de quadrants et ceux-ci en communication avec deux points A et B du circuit, la déviation θ est proportionnelle au carré moyen E_m^2 de la différence de potentiel (637).

Si la résistance R du conducteur compris entre les points A et B n'a pas d'induction propre sensible, il en résulte

$$2\theta = kE_m^2 = kRI_m^2.$$

Une simple modification de l'expérience donnera encore le travail électrique entre deux points A et B dont les potentiels sont V_1 et V_2: on relie les quadrants à deux autres points A' et B', aux potentiels V_1' et V_2', séparés par une résistance R sans induction propre, et on fait communiquer l'aiguille successivement avec les points A et B.

Le courant variable I est déterminé à chaque instant par la relation $V_1' - V_2' = IR$. Les déviations α et β correspondent

respectivement à la valeur moyenne des expressions

$$RI\left(V_1 - \frac{V'_1+V'_2}{2}\right) = RIV_1 - RI\,\frac{V'_1+V'_2}{2},$$

$$RI\left(V_2 - \frac{V'_1+V'_2}{2}\right) = RIV_2 - RI\,\frac{V'_1+V'_2}{2}.$$

Il en résulte, par différence,

$$2\,\frac{\alpha-\beta}{kR} = \text{moy.}\,IV_1 - \text{moy.}\,IV_2 = \text{moy.}\,I(V_1 - V_2).$$

La dernière expression représente évidemment le
électrique considéré pendant l'unité de temps.

Les courants alternatifs produisent dans le télép
bruit ou un son musical, suivant leur fréquence; M.
en a fait un appareil de mesure. La membrane du
est reliée à un petit miroir par un ressort de montr
sage d'un courant continu produit une déviatio
ment proportionnelle à l'intensité. Sous l'influenc
rant alternatif, le miroir entre en vibration et
peut être augmentée dans de grandes proportion
oscillations propres du miroir, de la membrane
ont la même période. Dans ce cas, l'appareil e
insensible aux courants de périodes différentes

C'est sur le principe de la résonance qu'est
galvanomètre à vibrations employé par M.
faisceau d'aiguilles de fer doux, suspendu à u
est situé dans le champ de deux aimants;
courant alternatif dans des bobines convenab
dévie le système à droite ou à gauche. L'a
cillations est encore multipliée quand la pé
mobile est la même que celle du courant; o
en évidence des courants inférieurs à 10^{-8}

650. Étude des courants dans l'état va
thodes galvanométriques permettent de s

(1) M. Wien, *Wied. Ann.*, t. XLII, p. 593; 1891. —

... *Ann.*, t. LV, p. 27; 1895. —

continue la marche d'un courant dont les variations restent très lentes par rapport au temps nécessaire pour l'amortissement, mais elles ne suffisent plus quand il s'agit de variations rapides, comme celles qui accompagnent les effets d'induction. On doit alors recourir à d'autres procédés, qui dépendent beaucoup des conditions de l'expérience : nous nous bornerons à quelques exemples.

1° Le moyen le plus direct pour connaître l'état d'un courant à l'époque t est de mettre deux points A et B du circuit, pendant un temps θ très court, en communication respective avec les quadrants d'un électromètre dont l'aiguille est chargée, et d'isoler ensuite l'électromètre. Si l'équilibre électrostatique a eu le temps de s'établir, la déviation permanente, ou l'impulsion initiale de l'aiguille, est proportionnelle à la différence de potentiel E_0 qui existe entre les points A et B, c'est-à-dire à l'intensité I du courant à l'époque t.

On peut aussi substituer à l'électromètre un condensateur de capacité C, dont on mesure ensuite la charge par un galvanomètre balistique. Toutefois, cette charge n'est pas en toute rigueur indépendante de la durée θ du contact. Si les effets de self-induction sont négligeables, la différence de potentiel E des armatures au temps θ est donnée (172) par la formule

$$E = E_0 \frac{R}{R+r}\left[1 - e^{-\frac{\theta(R+r)}{CRr}}\right],$$

dans laquelle R désigne la résistance du diélectrique et r celle des fils de communication.

Comme le rapport de r à R est en général très petit, on a, sans erreur sensible,

$$E = E_0\left[1 - e^{-\frac{\theta}{Cr}}\right].$$

La charge peut être considérée comme instantanée, si la quantité Cr est très petite par rapport à la durée θ du contact, laquelle doit être assez courte pour que le courant principal n'ait pas eu le temps de subir une variation sensible.

Enfin, il faut admettre encore que la quantité d'électricité enlevée au circuit principal par l'électromètre ou le condensateur ne modifie pas d'une manière appréciable le courant

correspond simplement à la décharge $q_0 = I_0 \theta$. Le rapport des impulsions α et α_0 donne le rapport du courant moyen pendant le temps θ à sa valeur finale; une série d'expériences permettra d'en déduire l'intensité à chaque instant.

Pour ouvrir ou fermer un circuit à des époques connues, on peut employer des appareils animés d'un mouvement de translation, comme la chute d'un poids, des systèmes oscillants ou rotatifs. On obtient d'excellents résultats avec un pendule très lourd, qu'on laisse tomber d'une hauteur déterminée et qu'on utilise, au moment de sa vitesse maximum, pour manœuvrer des clefs de contacts successifs.

Dans le cas d'un courant de fermeture, par exemple, le pendule rencontre d'abord un premier levier qui ferme le circuit et marque l'origine du phénomène, puis un autre levier qui ouvre le circuit. Ce second levier peut être déplacé parallèlement à lui-même au moyen d'une vis micrométrique; l'intervalle θ qui sépare les deux contacts se déduit de la durée de l'oscillation et de la distance des leviers.

Nous verrons plus loin l'application de ces méthodes à l'étude des oscillations électriques.

5° Lorsque les phénomènes se reproduisent d'une manière périodique, on peut répéter les effets relatifs à la même phase et obtenir des indications permanentes. Telle est la méthode employée par M. Joubert [1] pour l'étude des courants alternatifs produits par les machines d'induction. On monte sur l'arbre de la machine un interrupteur à deux contacts momentanés qui mettent en relation deux points du circuit avec les quadrants d'un électromètre; cet interrupteur est calé sur l'arbre de manière que les contacts s'établissent à une phase déterminée de la force électromotrice. L'électromètre prend une déviation permanente qui correspond à la différence de potentiel relative à cette phase.

Un galvanomètre remplirait encore le même but, sauf que la dérivation dans le circuit du galvanomètre au moment du contact peut altérer la distribution primitive des potentiels. On évite cette difficulté par une méthode d'opposition, en intercalant dans le circuit du galvanomètre une force électro-

(1) J. Joubert, *Ann. de l'Éc. Norm. sup.* [2], t. X, p. 115; 1882.

motrice capable de ramener l'aiguille au zéro; la compensation est indépendante de la résistance introduite par l'interrupteur, puisqu'il commande de la même manière le courant à mesurer et celui de la pile qu'on lui oppose.

La figure 172 indique la disposition employée. Soit R la résistance qui sépare deux points A et B du circuit principal, R_1 une résistance ACB en dérivation sur ces deux points, enfin AKGC une dérivation de très grande résistance, interceptant entre les deux points A et C une résistance r. Cette dérivation contient le galvanomètre G, la pile d'opposition E

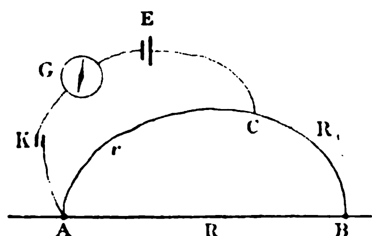


Fig. 172.

et l'interrupteur K. Si les résistances R et R_1 n'ont pas d'induction propre, on a, en appelant V la différence de potentiel des deux points A et B, I l'intensité du courant principal, I_1 celle du courant dérivé à l'instant du contact, et enfin E la force électromotrice de la pile d'opposition,

$$V = I_1 R_1 = \frac{E}{r} R_1 = IR, \qquad I = \frac{E}{r} \cdot \frac{R_1}{R}.$$

651. Galvanomètre optique. — Le pouvoir rotatoire magnétique (**474**) fournit encore un autre moyen de mesure.

Supposons que, dans le champ d'un circuit parcouru par l'unité de courant, un rayon de lumière polarisée traverse, suivant la direction x, un milieu d'épaisseur $x_2 - x_1 = e$, pour lequel la constante de Verdet est ρ. En désignant par X la composante du champ parallèle à la direction considérée, la rotation du plan de polarisation est

$$\rho \int_{x_1}^{x_2} X \, dx = \rho e X_m,$$

le facteur X_m désignant la valeur moyenne du champ relative au chemin considéré. Pour un courant I, la rotation $R = \rho I e X_m$ est proportionnelle à l'intensité I ; on aura le rapport de deux courants par le rapport des rotations.

Si l'on veut déterminer la valeur absolue du courant par la rotation R, il faut connaître d'abord la constante ρ du corps observé et calculer l'expression eX_m. Suivant l'axe d'une bobine, par exemple, le produit eX_m s'obtiendra par la somme des intégrales relatives aux différentes spires.

Il est facile d'ailleurs de choisir des conditions expérimentales qui éliminent toute mesure de dimensions. Le produit IeX_m est le travail du courant sur l'unité de magnétisme parcourant la longueur e. Supposons que la bobine renferme N spires et que les extrémités A_1 et A_2 de la longueur e se trouvent en dehors de la bobine, en des points où les potentiels des feuillets magnétiques équivalents soient V_1 et V_2. Le travail du courant sur une masse qui suivrait l'axe de $-\infty$ à $+\infty$ est $4\pi NI$ (319). Jusqu'au point A_1, ce travail est $-V_1$; à partir du point A_2, il est égal à V_2. Il faut donc retrancher $V_2 - V_1$ de la valeur précédente, ce qui donne

$$R = \rho [4\pi NI - (V_2 - V_1)].$$

Si la bobine a un enroulement régulier, les valeurs de V_1 et V_2 sont les potentiels des deux couches $-nI$ sur la face d'entrée, et $+nI$ sur la face de sortie (262), lesquels se déterminent aisément par les distances des points A_1 et A_2.

Les termes ρV_1 et ρV_2 deviennent négligeables lorsque les points A_1 et A_2 sont très éloignés de la bobine. On peut encore les déterminer par expérience en plaçant le corps en dehors de la bobine de manière qu'il se termine en A_1, pour le premier cas, et commence en A_2 pour le second, les potentiels étant supposés négligeables au delà, ce qui donne avec le même courant les rotations R_1 et R_2 ; on a alors

$$R + R_1 + R_2 = \rho 4\pi NI.$$

Dans chaque cas, il suffit de renverser le courant pour changer le sens de la rotation ; la différence des deux lectures donne le double de la rotation électromagnétique.

Différents observateurs ont employé cette méthode pour déterminer la constante du *sulfure de carbone* relative à la raie D du spectre. Les mesures les plus exactes, ramenées à la température de zéro, indiquent pour cette constante des valeurs comprises entre 0',0430 et 0',0434.

Avec une bobine de 1000 tours et l'unité de courant, ou 10 ampères, on aurait

$$\rho 4\pi NI = 43'.4\pi = 540'.$$

Un ampère dans une bobine de 5000 tours donnerait la même valeur pour la rotation double, c'est-à-dire une approximation relative de 0,002 si l'erreur de lecture est de 1'.

Cette méthode optique présente de grands avantages, car il n'y a pas de perturbation due à l'échauffement du circuit par le passage du courant; la seule précaution est de maintenir constante la température du sulfure de carbone, surtout dans les couches les plus efficaces.

Comme la rotation du plan de polarisation ne présente aucun retard sur le courant lui-même (**478**), on peut encore l'utiliser pour l'étude des courants alternatifs. Il suffit alors d'avoir recours à une disposition mécanique, miroir tournant ou fente mobile, qui ne laisse apparaître la lumière que dans une phase déterminée; la rotation ne dépend que de la valeur correspondante du courant. En modifiant la phase d'apparition d'une manière graduelle, une série d'observations différentes fournirait les données nécessaires pour tracer par points la courbe du courant.

652. Mesures calorimétriques. — L'énergie calorifique dégagée par le courant I pendant un temps t, dans un conducteur de résistance R, a pour valeur I^2Rt. Si l'on détermine la quantité Q de chaleur correspondante en plongeant le conducteur dans un calorimètre, on aura, en désignant par J l'équivalent mécanique de la chaleur (**17**),

$$JQ = I^2Rt, \qquad I^2 = \frac{JQ}{Rt}.$$

Appelons M la masse totale du calorimètre réduite en eau, $T_1 - T_0$ l'élévation de température, correction faite des déper-

ditions qui ont lieu par rayonnement ou par conductibilité la quantité Q est égale à $Mc(T - T_0)$.

Pour tenir compte des variations qu'éprouvent la résistance du conducteur, ainsi que la chaleur spécifique c du liquide, on peut admettre que ces variations sont proportionnelles à la température et poser

$$R = R_0(1 + \alpha T), \qquad c = c_0(1 + \gamma T).$$

L'effet élémentaire produit à la température T est alors

$$JMc_0(1 + \gamma T)dT = I^2 R_0(1 + \alpha T)dt,$$

$$\frac{dT}{1 + (\alpha - \gamma)T} = \frac{R_0}{JMc_0} I^2 dt.$$

En intégrant cette expression pendant le temps θ, qui correspond à l'échauffement total $T_1 - T_0$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha - \gamma} \mathcal{L} . \frac{1 + (\alpha - \gamma)T_1}{1 + (\alpha - \gamma)T_0} = \frac{R_0}{JMc_0} \int_0^\theta I^2 dt = \frac{R_0}{JMc_0} I_m^2 \theta.$$

Comme les coefficients α et γ sont très petits, on peut écrire

$$\frac{R_0}{JMc_0} I_m^2 \theta = (T_1 - T_0)\left[1 - \frac{\alpha - \gamma}{2}(T_1 + T_0)\right].$$

On détermine ainsi le carré moyen I_m^2 du courant pendant la durée θ de l'expérience, de sorte que la méthode s'applique aux courants alternatifs.

On peut varier de bien des manières la disposition expérimentale : une des plus simples est celle où le calorimètre, ayant la forme d'un thermomètre (1), donne directement les températures. Si le courant passe d'une manière continue, l'échauffement du calorimètre est compensé à chaque instant par les pertes de chaleur; comme ces dernières sont sensiblement proportionnelles à l'excès de la température du calorimètre sur celle de l'enceinte, le carré moyen du courant est proportionnel au même excès de température.

(1) Jamin et Amaury, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. LXX, p. 661; 1870.

Dans ces expériences, le conducteur doit être isolé électriquement du liquide et cependant la transmission de chaleur doit être assez facile pour que l'équilibre de température s'établisse rapidement.

Une autre cause d'erreur tient à ce que, pendant le passage d'un courant continu, l'intérieur du fil est nécessairement à une température plus élevée que l'extérieur; il en résulte que la résistance réelle est plus grande que la résistance calculée par la température du calorimètre et qu'on obtient une valeur trop forte pour l'intensité du courant.

Cette méthode a été souvent mise à profit pour déterminer l'équivalent mécanique J de la chaleur, en mesurant le courant et la résistance par d'autres procédés.

653. **Actions chimiques.** — La mesure des courants par l'électrolyse est une méthode qui peut être utile dans beaucoup de cas, surtout pour les courants très intenses.

Comme l'action chimique est proportionnelle au débit total d'électricité (**181**), le rapport de la quantité d'électrolyte décomposé au temps correspondant donnera le courant moyen dans le même intervalle. Les corps qui ont été le plus employés, et qui paraissent le mieux convenir, sont l'eau acidulée, une dissolution aqueuse de sulfate de cuivre, une dissolution de nitrate ou de chlorate d'argent.

Avec l'eau, on mesure généralement le volume des gaz dégagés; les gaz doivent être desséchés et il faut connaître leur température et leur pression. Pour éviter ces corrections et l'emploi des densités, Bunsen a trouvé préférable de peser l'eau décomposée; le voltamètre est pesé avant l'expérience, les gaz s'échappent en abandonnant leur vapeur d'eau à un appareil desséchant qui fait corps avec le voltamètre, et on pèse de nouveau, après avoir remplacé les gaz restants par de l'air. Une cause d'erreur résulte de la quantité de gaz qui reste en dissolution dans l'eau; on pourrait s'en affranchir en récoltant les gaz avec une pompe à mercure.

L'eau doit être acidulée. Quand on emploie l'acide sulfurique, il se forme généralement des corps accessoires, tels que l'ozone, l'acide persulfurique, etc., et la quantité de gaz recueillie est trop faible; ces composés oxygénés sont en quantité négligeable si on porte la température du voltamètre

à 40 ou 50°. M. Berthelot (1) a reconnu qu'il n'y a plus que des traces d'ozone tout à fait inappréciables quand on rend l'eau conductrice par de l'acide phosphorique.

Les expériences sont plus commodes et plus sûres avec les sels métalliques. La condition essentielle est d'obtenir sur l'électrode négative un dépôt continu et bien adhérent, qu'on puisse laver facilement, de manière à le débarrasser de toute trace de sel dissous, et qui ne s'oxyde pas à l'air.

La forme du dépôt dépend surtout de la *densité* du courant, c'est-à-dire du quotient de l'intensité par la surface des électrodes. Avec le cuivre, le dépôt n'est beau que si cette densité est faible; si elle augmente, il est rugueux et mamelonné; avec un courant plus fort, il devient pulvérulent. La concentration de la dissolution n'a qu'une influence beaucoup plus faible. La lame recouverte de cuivre doit être plongée dans l'eau distillée bouillie, immédiatement au sortir du bain, puis, après quelques minutes d'immersion, essuyée et séchée avec du papier buvard. Elle s'oxyderait rapidement si elle restait humide au contact de l'air.

Avec l'argent, la lame, une fois lavée dans l'eau distillée, peut être abandonnée à elle-même jusqu'à ce qu'elle se soit desséchée par évaporation spontanée.

On peut employer comme électrode positive ou anode, soit une lame de platine, soit une lame de même nature que le métal déposé et qui, en se dissolvant, reconstitue le sel décomposé par électrolyse. Avec le platine, la dissolution s'appauvrit et l'acide est mis en liberté, mais cette circonstance n'a pas d'influence sur le dépôt, si la réduction du sel n'est pas poussée au point d'altérer d'une manière notable la richesse de la dissolution.

Quand on emploie deux lames de même métal, l'électrode soluble doit, théoriquement, perdre tout ce que l'autre électrode a gagné; par suite, il devrait être indifférent de peser l'une ou l'autre lame. C'est ce que l'on constate, en effet, avec des lames d'argent bien pur, dans une dissolution d'azotate à 15 pour 100 et une densité convenable du courant. Mais l'expérience montre, en général, pour le cuivre surtout, que la perte de l'anode est plus grande que le gain de la cathode : le

(1) Berthelot, *C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. LXXXVI, p. 71; 1878.

tal en se désagrégeant tombe en parcelles très fines qui ıvent se déposer irrégulièrement; il se forme en outre sur ıame soluble des composés oxygénés dont l'importance et nature varient avec l'intensité du courant.

Les expériences faites sur le nitrate d'argent (**421**), avec des écautions particulières, ont montré qu'un ampère dépose)01118 gramme d'argent par seconde ou $4^{gr},025$ par heure. Si l'on adopte pour l'argent l'équivalent 107,93 donné par ass, il en résulte, pour un ampère, 0,09323 milligramme ːau ou $0^{mgr},01036$ d'hydrogène.

Remarquons encore que l'unité d'électricité, exprimée en ːsures électromagnétiques C.G.S., fournit $11^{mgr},18$ d'argent $0^{mgr},1036$ ou $1^{gr},036.10^{-4}$ d'hydrogène. En d'autres termes, gramme d'hydrogène, ou un équivalent d'un corps quelıque, correspond à $0,965.10^4$ ou $96,5.10^2$ unités d'électricité, st-à-dire $96,5.10^3$ coulombs; la masse d'hydrogène est à ı près le produit de la quantité d'électricité par 10^{-4}.

354. Appareils industriels. — Il est important dans les apcations d'avoir des instruments dont on peut lire rapideːnt les indications sur des échelles graduées. On les appelle ıpèremètres ou *voltmètres*, suivant qu'ils servent à détermir les courants ou les différences de potentiel. Le même)de de construction peut généralement servir aux deux usas, quand on utilise les actions électromagnétiques des counts, suivant que l'appareil est intercalé dans le circuit ou e, possédant par lui-même une très grande résistance, il est is en dérivation sur deux points.

Les *wattmètres* comprennent deux systèmes de bobines dont ıne est parcourue par le courant principal I, l'autre, de grande sistance, étant en dérivation sur deux points A et B dont la fférence de potentiel est E. L'action électrodynamique est oportionnelle au produit EI, c'est-à-dire au travail absorbé r seconde entre les points A et B ou à la puissance en watts, moins quand il s'agit de courants continus.

La plupart de ces instruments se présentent sous la forme ıne boîte circulaire munie d'un cadran avec aiguille indicaːe, et les principes de construction sont les mêmes que ıx des galvanomètres étudiés précédemment; nous en cites seulement quelques exemples.

Dans l'ampèremètre de M. Deprez ([1]), un ensemble d'aiguilles de fer doux ou une lame unique dentée sur chaque bord, en forme d'arête de poisson; tourne autour d'un axe horizontal au milieu d'un cadre rectangulaire parcouru par le courant. Ce cadre est entouré par les deux branches d'un aimant en fer à cheval, de sorte que l'aiguille est aimantée par un champ très intense. Des poulies de multiplication transmettent la rotation produite par le courant à une aiguille indicatrice mobile devant un cercle dont la graduation est faite en ampères. L'amortissement est tel que le système est presque apériodique; on peut facilement observer la durée d'établissement du courant dans un circuit à grande induction propre, comme les bobines de Ruhmkorff.

Les ampèremètres de Lord Kelvin se composent de deux bobines horizontales A et B portées aux extrémités d'un fléau de balance. Chacune d'elles est située dans l'intervalle de deux autres bobines A_1 et A_2, B_1 et B_2, dont les dimensions et la distance sont réglées de manière que l'action soit maximum et à peu près uniforme (**634**). Les courants sont dirigés en sens contraires dans les bobines A et B, de sorte que l'appareil n'est pas sensible aux champs magnétiques extérieurs; les bobines fixes agissent par attraction sur l'une des bobines mobiles A, et par répulsion sur l'autre. Le couple électrodynamique est compensé par des poids gradués et l'équilibre s'achève par le déplacement d'un curseur sur une échelle divisée horizontale mobile avec le fléau.

La balance devient un wattmètre quand les deux systèmes de bobines sont parcourus par des courants différents; elle peut servir aussi pour les courants alternatifs si l'on complète le circuit des bobines mobiles par une grande résistance dont l'induction propre est négligeable.

Dans l'ampèremètre de Cardew, on utilise la dilatation d'un fil métallique par le courant. Les extrémités du fil sont attachées à deux points voisins A et B; les branches remontent verticalement, passent séparément dans les gorges de deux poulies et le coude des branches descendantes porte une petite poulie reliée à un ressort qui la tire de haut en bas.

([1]) M. Deprez, *Journ. de Phys.*, t. IX, p. 227; 1880.

...vail dépensé dans
...on $r_2 \tang \alpha_2 = L_2 \omega$,
...nsiblement $K = Pr_2$,
...trodynamomètre, in-
...encore une mesure de

...compteur très ingénieux
... petit anneau Gramme de
...de fer doux, muni de son
... un axe vertical; il reçoit le

...es bobines également sans fer
... i_1. Dans ce cas, le couple mo-
..., et le travail pendant l'unité de
...tesse angulaire ω, par la valeur
...ber le travail à chaque instant, l'ar-
...uivre qui tourne entre les pôles d'ai-
...r à cheval; les courants induits dans
...rtionnels à la vitesse et donnent une
... qui est lui-même proportionnel à ces
...sse, c'est-à-dire finalement proportionnel
...de régime régulier est donc, en désignant
...ie,

$$\ldots (ei_1)_m = k\omega^2, \qquad (ei_1)_m = k\omega.$$

...engrené avec une vis sans fin montée sur l'arbre
...otation $\int \omega \, dt$ et, par suite, l'énergie électrique
...$ei_1 \, dt$. Ce compteur paraît fournir des résultats
... satisfaisants, aussi bien pour les courants alterna-
...pour les courants continus.

La question est moins simple avec les courants alternatifs. Lorsque l'énergie dépensée dans le circuit que l'on considère correspond uniquement à la chaleur dégagée dans sa résistance r, le travail élémentaire a pour expression $rI_m^2\,dt$, en désignant par I_m^2 le carré moyen du courant, ou le carré du courant *efficace*.

Un appareil qui enregistre à chaque instant le carré du courant efficace permettra donc de mesurer l'énergie totale, par un système quelconque d'intégration, et deviendra un compteur d'énergie; les électrodynamomètres à courant unique donnent la valeur de I_m^2.

On peut toujours, sans erreur sensible, assimiler les courants alternatifs industriels à des courants sinusoïdaux (393). Le carré I_m^2 du courant efficace est alors la moitié du carré I^2 de l'amplitude du courant alternatif.

Le circuit de consommation étant placé en dérivation sur deux points A et B de la ligne, dont la différence de potentiel est $e = E\sin\omega t$, supposons encore que l'une des bobines à gros fil de l'électrodynamomètre se trouve dans ce circuit secondaire dont les constantes sont r_1 et L_1, la bobine à fil fin (r_2, L_2) étant aussi en dérivation sur les mêmes points A et B. Les deux courants dérivés sont de la forme $i_1 = I_1 \sin(\omega t - \alpha_1)$, $i_2 = I_2 \sin(\omega t - \alpha_2)$, et l'électrodynamomètre donne à chaque instant (649) le produit $P = I_1 I_2 \dfrac{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}$. L'induction mutuelle étant négligeable, on a

$$E = \frac{I_1 r_1}{\cos\alpha_1} = \frac{I_2 r_2}{\cos\alpha_2}.$$

D'autre part, le travail élémentaire fourni par la ligne est

$$dW = e(i_1 + i_2)\,dt = E[I_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + I_2 \sin(\omega t - \alpha_2)] \sin\omega t\,dt,$$

ou, en prenant la valeur moyenne relative à chaque période,

$$dW = E\,\frac{I_1\cos\alpha_1 + I_2\cos\alpha_2}{2}\,dt = K\,dt,$$

$$K = \frac{I_1 I_2}{2}\left(r_2\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} + r_1\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\right) = P\,\frac{r_2}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}\left(\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} + \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\right).$$

Le dernier terme, qui correspond au travail dépensé dans fil fin, est négligeable. D'après la relation $r_2 \tan g\, \alpha_2 = L_2 \omega$, angle α_2 est aussi très petit et il reste sensiblement $K = P r_2$, 'est-à-dire que les indications de l'électrodynamomètre, intégrées par un enregistreur, fourniront encore une mesure de l'énergie dépensée.

Nous signalerons en particulier le compteur très ingénieux imaginé par M. Elihu Thomson. Un petit anneau Gramme de grande résistance et sans armature de fer doux, muni de son collecteur à balais, est monté sur un axe vertical; il reçoit le courant i_2, dit de voltage.

Le champ est produit par des bobines également sans fer que traverse le courant utilisé i_1. Dans ce cas, le couple moteur est proportionnel à ei_1 et le travail pendant l'unité de temps au produit de la vitesse angulaire ω, par la valeur moyenne $(ei_1)_m$. Pour absorber le travail à chaque instant, l'arbre porte un disque de cuivre qui tourne entre les pôles d'aimants permanents en fer à cheval; les courants induits dans le disque sont proportionnels à la vitesse et donnent une espèce de frottement qui est lui-même proportionnel à ces courants et à la vitesse, c'est-à-dire finalement proportionnel à ω^2. La condition de régime régulier est donc, en désignant par k une constante,

$$\omega(ei_1)_m = k\omega^2, \qquad (ei_1)_m = k\omega.$$

Un rouage engrené avec une vis sans fin montée sur l'arbre totalise la rotation $\int \omega\, dt$ et, par suite, l'énergie électrique dépensée $\int ei_1\, dt$. Ce compteur paraît fournir des résultats tout à fait satisfaisants, aussi bien pour les courants alternatifs que pour les courants continus.

CHAPITRE TROISIÈME

DES RÉSISTANCES

APPAREILS GRADUÉS

656. Unités de résistance. — Ohm international. — L'étalon auquel on rapporte toutes les mesures pourrait être choisi arbitrairement. C'est ainsi que Jacobi (1) avait proposé d'employer un fil de cuivre de dimensions déterminées et, pour éviter toute erreur, de distribuer aux différents physiciens des échantillons d'un même fil.

Pendant longtemps les administrations télégraphiques ont pris, comme unité, un kilomètre ou un mille de fil de fer ou de cuivre d'un diamètre donné, mais l'industrie exige aujourd'hui des mesures plus exactes. En effet, les moindres traces de matières étrangères et les changements physiques, tels que la trempe ou l'écrouissage, modifient tellement la conductibilité d'un métal, que la nature et les dimensions d'un fil ne suffisent pas pour en définir la résistance ; en outre, la température a une influence considérable. Pouillet (2), qui a constaté ces différentes causes de variations, a rapporté toutes ses mesures de conductibilités, dès 1837, à celle du mercure distillé. Il prenait comme terme de comparaison la colonne de mercure comprise dans un tube cylindrique, dont le diamètre

(1) Jacobi, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XXXIII, p. 277; 1851.
(2) Pouillet, *Éléments de Physique*, 3e édit., t. I, p. 586; 1837.

ərminé par des pesées de mercure, et dont les extré- terminaient par deux flacons de large ouverture.

ːr Siemens (¹) a répandu dans l'industrie un grand d'étalons qui représentent très approximativement la ːe d'une colonne de mercure à 0°, ayant 1 mètre de · et 1 millimètre carré de section.

unité reste encore arbitraire. Tout en conservant le comme métal étalon, il est plus rationnel de choisir nne dont la résistance soit rapportée aux unités élec- étiques C. G. S. La commission internationale des ectriques, réunie à Paris en 1884, avait adopté comme *ıtique,* sous le nom d'ohm *légal,* la résistance d'une de mercure de 1 millimètre carré de section et de mètres de longueur, à la température de la glace fon- 'incorrection reconnue de cette valeur et la difficulté arer au mètre la section d'un tube de verre ont con- congrès ultérieurs à définir la colonne de mercure, ın constante, par sa longueur (106,3 centimètres) et ısse de mercure (14,4521 grammes) qu'elle renferme; ↄéfinition de l'ohm international (**421**).

ıstruction d'un étalon de résistance conforme à cette ı se résume dans le calibrage d'un tube et la pesée ıre qu'il contient à la température de zéro. Il importe leurs que la forme du tube réalise les conditions im- ıourvu qu'on connaisse les dimensions de la colonne ıre qui le remplit, mais il est nécessaire, pour la fa- comparaisons, que la résistance de l'étalon ne s'écarte coup de la valeur adoptée.

ıbrage doit être fait par les méthodes employées pour nomètres de précision, en étudiant, à température ː, la longueur occupée par une même masse de mer- lifférentes régions du tube.

e est d'abord divisé en parties d'égale longueur; on e ensuite, dans la région qui doit être utilisée, le ı + x du volume moyen de l'ensemble des divisions e de chacune d'elles, c'est-à-dire le rapport des sec- respondantes s et σ.

(¹) EMENS, *Pogg. Ann.*, t CX, p. 1; 1860.

que les couches intérieures, à cause de la capillarité, mais cette circonstance n'a qu'une influence négligeable.

M. Benoît a pu réaliser ainsi quatre étalons prototypes dont la différence des résistances n'atteint pas 0,000 02 (1).

L'étalon rectiligne de mercure n'est pas d'un emploi commode. On peut en construire des copies à l'aide d'un tube étroit de forme quelconque, contenant du mercure, et dont les extrémités communiquent avec des réservoirs de grand diamètre. La figure 173 représente un étalon dont le tube,

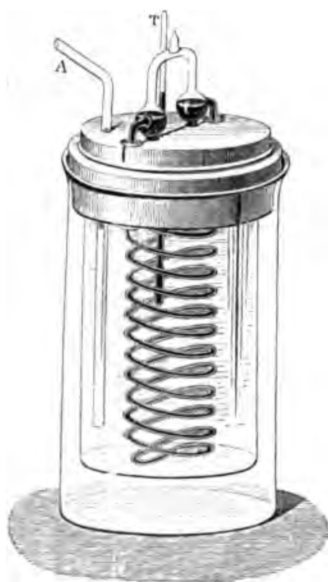


Fig. 173.



Fig. 174.

ntourné sous forme d'une double hélice, a été rempli de rcure dans le vide, et communique avec des réservoirs exieurs par de gros fils de platine. La partie capillaire du e plonge dans un bain dont la température est connue un thermomètre T; un tube latéral A permet d'agiter le iide par un courant d'air. On a déterminé d'ailleurs par érience, soit la correction qu'on doit apporter à cette réance à la température de zéro, soit la température nor-

(1) Benoit, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCIX, p. 864; 1884.

... un ohm. La variation de ... dans un tube de verre, en fonction de ... par la formule

$$... 4, ... - 0,00000112 t^2).$$

... que le platine situé dans le ... en partie avec le temps ou ... M. Benoît a adopté une ... Les extrémités du tube ... les tubes plus larges ouverts à ... encore dans le vide, mais le ... renouvelé.

... le verre étant fragiles, on construit géné-



...

... avec des fils métalliques; les ... aux métaux purs parce que leur ... avec la température. Tandis que le ... avec la température est de 0,0039 pour ... de 0,00044 pour le maillechort et ... alliage de platine et d'argent renfermant un ...

La figure 175 représente la forme d'étalon qui avait été adoptée par le comité de l'Association Britannique en 1865. Le fil est en alliage de platine-argent, recouvert d'une double enveloppe de soie et verni à la gomme laque; il est replié sur lui-même, enroulé en hélice et noyé dans une masse de paraffine remplissant l'intervalle de deux cylindres concentriques en laiton. Les bouts du fil sont soudés à deux grosses tiges de cuivre recourbées deux fois à angle droit et dont les extrémités amalgamées plongent dans des godets à mercure. Le cylindre peut être entouré de glace ou immergé dans l'eau; un thermomètre que l'on introduit dans le tube central donne la température. Toutefois, malgré la grande surface de contact avec l'eau, la mauvaise conductibilité de la paraffine pour la chaleur laisse toujours un doute sur la température réelle du fil, à moins que celle du bain n'ait été maintenue constante pendant plusieurs heures.

La forme adoptée par W. Siemens est représentée dans la

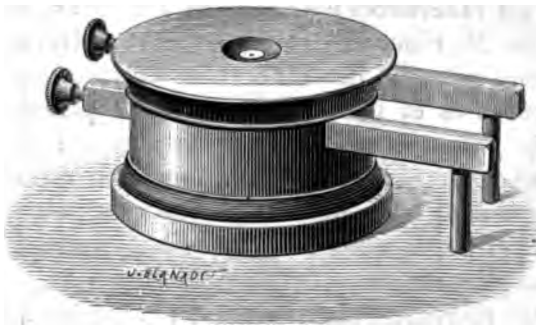


Fig. 176.

figure 176. Le fil, en maillechort recouvert de soie et verni, est enroulé sur la surface d'un cylindre de bois et terminé par deux grosses tiges de métal. Il est protégé par une enveloppe métallique qui laisse un intervalle suffisant pour la circulation de l'air et le tout est enfermé dans une boîte en bois. Une cavité cylindrique ménagée au milieu de la bobine permet d'y placer un thermomètre, mais la détermination de la température est plus difficile; il est bon d'envelopper l'appareil dans une couche épaisse d'ouate.

Le degré de permanence des étalons de résistance est une question sur laquelle on ne possède pas encore de renseignements très exacts. Avec le mercure, les seuls changements à craindre sont ceux qui proviendraient de la déformation du verre; les défauts de pureté que peut présenter le mercure du commerce n'ont pas d'influence appréciable; un nouveau remplissage du tube ne change pas les résultats et, sauf la facilité de l'opération, il paraît indifférent de faire ce remplissage dans le vide ou dans l'air.

Les étalons métalliques ne présentent pas les mêmes garanties. Le comité de l'Association Britannique a fait déposer à l'observatoire de Kew plusieurs étalons, soit en *platine*, soit en alliages de *platine-argent*, de *platine-iridium*, ou d'*or-argent*. Matthiessen et Hockin ont comparé ces étalons en 1867 et déterminé les températures auxquelles ils avaient alors la même résistance (1). Une nouvelle comparaison faite en 1876 par MM. Chrystal et Saunder (2), avec des précautions minutieuses, n'a pas donné les mêmes résultats, mais on pouvait croire que les différences étaient dues à la détermination des températures. M. Fleming (3) a repris le même travail en 1881; il s'est encore présenté des différences notables avec les mesures précédentes et les écarts s'élevaient parfois à 0,01 1. Deux fils de *patent nickel* et un fil de *platine iridié*, étudiés par M. Klemencic (4), n'ont présenté que des variations insignifiantes pendant trois ans, tandis que la résistance d'un fil de *maillechort* augmentait d'une manière continue et même de plus en plus rapide.

657. Boîtes de résistances. — Il est nécessaire d'avoir à sa disposition une série de résistances dont les valeurs croissent d'une manière régulière. Elles sont formées habituellement de bobines placées dans une même boîte, et munies de clefs qui permettent de les introduire à volonté dans un circuit.

Le fil, enveloppé de matière isolante, est encore replié sur lui-même avant d'être enroulé en bobine, afin d'éviter l'action du courant sur les galvanomètres et réduire au minimum l'in-

(1) *Brit. Ass. Rep.*, for 1867. Dundee. — *Reprint*, p. 145.
(2) *Brit. Ass. Rep.*, for 1876, p. 13, Glasgow.
(3) *Brit. Ass. Rep.*, for 1883, p. 41, Southport.
(4) Klemencic, *Wien. Berichte* [2], t. XCIX, p. 780; 1890.

uction propre (582); des bandes de métal entourées de soie ont encore plus efficaces à ce point de vue ([1]). La bobine, une ois construite, est noyée dans une couche de paraffine.

Les deux extrémités du fil de chaque bobine sont soudées à des pièces de cuivre épaisses, laissant entre elles un petit intervalle; une double échancrure permet d'introduire entre elles, avec une forte pression, une cheville en cuivre qui les réunit. Ce mode de communication est excellent dans la pratique, mais la résistance offerte par les chevilles peut quelquefois s'élever à 0,0001 d'ohm ([2]).

Les bobines sont disposées à la suite les unes des autres, de manière que chaque pièce de cuivre joigne deux bobines successives. Quand une cheville est enlevée, la résistance de la bobine correspondante est introduite dans le circuit; en plaçant la cheville, on supprime cette résistance.

Si, au lieu de souder les fils aux masses de cuivre elles-mêmes, on les réunit à ces masses, comme on le fait souvent pour la facilité de la construction, par de petites tiges en cuivre, on ne doit pas souder les fils de deux bobines successives à une même tige, mais terminer chaque fil par une tige spéciale, afin que la résistance qu'on obtient en enlevant deux chevilles soit exactement la somme des résistances obtenues quand on enlève chacune de ces chevilles successivement.

Il est très avantageux, pour la vérification des boîtes, que chacune des pièces de cuivre soit percée d'un trou pouvant recevoir une cheville spéciale, munie d'un serre-fils. Cette disposition permet d'introduire dans un circuit, et d'une manière indépendante, une quelconque des résistances qui composent la boîte.

Plusieurs systèmes de subdivisions peuvent être adoptés pour graduer les valeurs des résistances. Le plus économique consisterait à employer une série de bobines dont les résistances varieraient comme les termes de la progression 1, 2, $2^2, 2^3, \ldots 2^n$. Avec $n+1$ bobines on aurait toutes les résistances depuis 1 jusqu'à $2^{n+1}-1$. Douze bobines, dont la première est un ohm, suffisent pour réaliser toutes les résistances depuis 1 ohm jusqu'à 8191 ohms.

(1) AYRTON et MATHER, *Electrician*, t. XXVII, p. 254; 1891.
(2) DORN, *Ann. Wied.*, t. XXII, p. 558; 1884.

Pour obtenir une résistance donnée, 107 par exemple, on la traduira dans le système binaire, $2^6 + 2^5 + 2^3 + 2 + 1$, ou 1101011; laissant ouvertes toutes les bobines qui correspondent aux chiffres 1, on ferme par des chevilles toutes celles qui correspondent aux zéros.

Il est bon d'ajouter à la série une unité supplémentaire, qui permettra de vérifier les valeurs relatives des bobines. Ce mode de division n'est pas employé à cause des calculs qui le rendraient très incommode.

On combine souvent les bobines comme les boîtes de poids, en leur donnant la série des valeurs 1, 2, 2, 5 pour les unités, les dizaines, les centaines, etc. Seize bobines, avec une unité supplémentaire pour les vérifications, donneront ainsi toutes les résistances de 1 à 10000 ohms.

Ces dispositions ont l'inconvénient d'introduire un nombre variable de chevilles pour chaque combinaison de résistances et, par suite, un nombre variable de contacts dont l'effet n'est pas toujours négligeable; en outre la lecture des résultats ne se fait pas rapidement.

Dans les appareils de précision, les bobines sont formées par groupes d'unités de différents ordres réunies bout à bout: une cheville fait communiquer la n^e bobine de chaque groupe avec une pièce de cuivre réunie au groupe suivant.

Les bobines de chaque groupe sont rangées, soit en ligne droite avec une barre latérale pour la communication avec le groupe suivant, soit en couronne avec une pièce de communication centrale, de manière à former une série de cadrans. Chaque groupe (fig. 177) renferme 9 bobines égales, reliées entre elles par des plaques de cuivre au nombre de 10 et numérotées de 0 à 9, sans communication entre les dernières plaques 9 et 0. Le disque de cuivre central est relié à la plaque 0 du cadran suivant par l'intermédiaire de lames ou de barres de cuivre L, L, L : les chevilles se placent entre le disque et les plaques de la couronne.

Les boîtes contiennent ordinairement quatre cadrans correspondant aux *unités*, *dizaines*, *centaines* et *milles;* on y ajoute aussi une unité supplémentaire placée dans l'intérieur de la boîte, et dont les extrémités aboutissent à deux bornes latérales e et e'.

s chevilles spéciales, munies de serre-fils, et qui se pla- dans des trous situés au milieu des plaques en couronne iettent de prélever une résistance quelconque sur l'en- ole des cadrans.

ıns ce cas, il faut employer 37 bobines pour obtenir un total 10 000 ohms, mais l'accroissement de prix qui en résulte largement compensé par l'exactitude des opérations et la ité des lectures.

est encore préférable de former chacun des groupes par

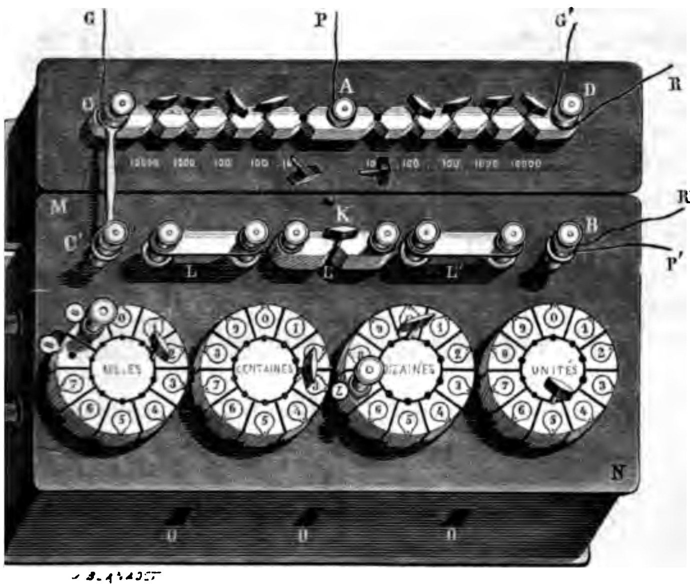


Fig. 177.

lécades complètes de 10 bobines, ce qui porte leur nombre à 40; on a alors l'avantage que les moyens de vérifica- sont très nombreux.

fil des boîtes de résistance est habituellement très fin; il t dangereux d'y faire passer des courants intenses qui eraient d'altérer la matière isolante ou même de brûler tal. On peut réaliser des résistances moins délicates avec aguettes de charbon, comme celles qui servent pour la re électrique, avec des garnitures de cuivre; ces résis- s varient très peu avec la température.

Enfin, on obtient des résistances très grandes et d'un emploi commode avec des traits de plombagine tracés sur l'ébonite, ou mieux dans une rainure bien polie. Les extrémités sont reliées à des bornes de cuivre, et le trait lui-même est ensuite recouvert de vernis ([1]). Il est nécessaire de vérifier à différentes époques la valeur de ces résistances, car elles s'altèrent avec le temps, mais elles sont très peu sensibles aux influences de la température.

658. Boîtes de conductances. — Les bobines peuvent être disposées de manière à combiner directement les inverses des résistances, c'est-à-dire les conductances.

Lorsque plusieurs résistances $r_1, r_2, .., r_n$ sont disposées

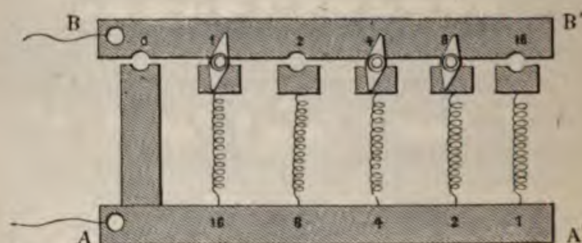


Fig. 178.

en arcs multiples, entre deux points (**156**), la conductance du système, ou l'inverse de sa résistance R, est égale à la somme des conductances de chacun des arcs ([2]) :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}.$$

Considérons, par exemple, une série de bobines dont les résistances varient comme les puissances de 2. Toutes les bobines communiquent par une de leurs extrémités avec une même barre AA' (fig. 178), tandis que l'autre extrémité est terminée par une plaque de cuivre ; ces plaques peuvent être

([1]) Philipps, *Ph. Mag.* [47], t. XL, p. 41; 1870.

([2]) Lord Kelvin avait proposé d'appeler *mho*, qui est *ohm* lu en sens inverse, la conductance d'un corps dont la résistance est un *ohm*. Un *mhomètre* serait un appareil de mesure pour les conductances.

réunies par des chevilles à une seconde barre BB'. On introduit ainsi entre les deux barres et, par suite, entre les points A et B du circuit, autant de bobines en arcs parallèles qu'on place de chevilles.

Les chiffres de la barre supérieure représentent les résistances de chaque bobine, les chiffres inférieurs leurs conductances multipliées par 16. Avec la disposition des chevilles indiquées sur la figure, la conductance du système formé par les trois bobines serait $\frac{22}{16}$ et sa résistance $\frac{16}{22}$.

659. **Corrections de température.** — Les bobines des boîtes de résistances ne représentent réellement les valeurs marquées qu'à une certaine température t_0, que les constructeurs soigneux ne manquent pas d'indiquer; une correction est nécessaire quand on opère à une température t. Comme cette différence $t - t_0$ est généralement assez faible, la variation est sensiblement linéaire; les résistances correspondantes R et R_0 sont alors liées par une relation de la forme

$$R = R_0[1 + \alpha(t - t_0)].$$

Les boîtes doivent être disposées de manière qu'on puisse connaître la température des bobines. L'intérieur de la boîte est en communication avec des ouvertures latérales O (fig. 177), dans lesquelles on introduit des thermomètres dont les réservoirs se trouvent ainsi placés auprès des bobines. Une variation de 1° correspond à une erreur relative maximum de 0,0003 ou 0,0004, suivant que le fil est formé par un alliage de platine-argent ou en maillechort.

Dans certains cas, l'unité supplémentaire vv' est un fil de cuivre rouge, enroulé sur un cylindre d'ébonite et occupant toute la longueur de la boîte. La variation de résistance du cuivre pour 1° étant 0,0039 environ, c'est-à-dire onze fois plus grande que celle des bobines, la mesure de cette résistance par la boîte elle-même, avec une approximation de 0,0001, donnera la température à moins d'un trentième de degré.

Les variations de température les plus à craindre sont celles qui résultent du passage même du courant; il n'est pas inutile d'en donner une idée numérique.

Enfin ... ou la différe
ploi co...
bonite. ... la quantité de
sont r...
ensuite
à diffé...
s'altér...
aux i...

658 ... chaleur spécifique
disp... correspondante δt est, à p
des ...

L...

$$= \frac{\ldots}{J} \cdot \frac{1}{\rho c}.$$

... échauffement est ind
... relative de résistance e

... le produit pc, qui repré
... unité de volume, a sensi
... donne alors

en
sys
so

$$\ldots 8 . 10^{-6}.$$

... $= 13\rho$; il en résulte

(
rés
bi ... soumis à la même dif-
mé ... de résistance sera donc
ter ... que pour le cuivre.
... et $J = 4,17 . 10^7$, la variation
... par seconde serait

la
un a

$$\ldots n^2.$$

Il faut donc prendre des précautions particulières pour que les bobines ne soient traversées par un courant que pendant le moindre temps possible.

660. Rhéostats. — Avant l'emploi des boîtes de bobines, on faisait usage de fils dont on utilisait une longueur variable. Pouillet ([1]) se servit d'abord d'un fil de platine de 132 mètres de longueur tendu en bouts parallèles sur une planchette. Wheatstone réalisa le même appareil sous une forme plus commode et lui donna le nom de *rhéostat* ([2]).

Le rhéostat de Wheatstone se compose de deux cylindres parallèles de même diamètre, tournant dans le même sens et avec la même vitesse ; l'un est en laiton et à surface lisse; l'autre, en verre ou en bois, porte des rainures en hélice. Un fil de laiton s'enroule de l'un sur l'autre des cylindres, suivant le sens de la rotation commune. Toute la portion du fil située dans les rainures du cylindre rayé est isolée et agit seule comme résistance.

Cette disposition ingénieuse présente de grands inconvénients. Le fil est tiré dans un sens et dans l'autre par des enroulements inverses, qui le modifient ou même le déforment; on ne plus considérer sa résistance comme régulière et proportionnelle à la longueur. En outre, le point de contact avec le cylindre de laiton est très mal défini.

Dans le rhéostat de Jacobi ([3]), le fil est enroulé à demeure sur un cylindre isolant qui peut tourner autour de l'axe; une molette, mobile parallèlement à l'axe, est pressée sur le fil par un ressort et établit le contact en un point variable. Le mouvement de la molette est commandé par celui du cylindre, elle avance d'un pas de l'hélice quand le cylindre fait un tour. On évite ainsi les déformations du fil, mais on n'est jamais assuré que la résistance au contact conserve toujours la même valeur, malgré les différentes dispositions imaginées depuis pour diminuer cet inconvénient. Dans tous les cas, l'emploi des rhéostats tournants est très commode quand on veut faire varier une résistance d'une manière continue, sans qu'il soit nécessaire d'en connaître exactement la valeur.

([1]) POUILLET, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. IV, p. 785; 1837.
([2]) WHEATSTONE, *Bakerian lecture* for 1843.
([3]) JACOBI, *Pogg. Ann.*, t. LIV, p. 340; 1841 et t. LIX, p. 145; 1843.

Dans un fil de
de potentiel par
leur dégagée pa

Si p est la
métal, l'élév
la chaleur

de
iel co
écoule
que la
rs au

les fils
moin
conv
deux fil
manie
ainsi conn
liquide

A mên
pendant.

Pou
sente
blem

SON.

plus si
résistances es
relat
motrice E
en.

ompa
l et l
ment

I

fér
120
rela

Si les résistances r et r' sont réunies d'abord bout à bout, puis en arcs parallèles, les intensités correspondantes I_1 et I_2 du courant donnent encore

$$(2) \qquad E = I_0 r_0 = I_1(r_0 + r + r') = I_2\left(r_0 + \frac{rr'}{r+r'}\right).$$

On déduit aisément des équations (1) et (2)

$$\frac{r}{r'} = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{I_0 - I}{I - I_1} = \frac{I_0}{I} \cdot \frac{I_2 - I}{I_0 - I_2} = \frac{I_0}{I_1} \cdot \frac{I' - I_1}{I_0 - I'} = \frac{I'}{I_0} \cdot \frac{I_0 - I_2}{I_2 - I'}.$$

L'expérience fournit ainsi plusieurs vérifications, mais il est facile de s'assurer que la précision des mesures est inférieure à l'exactitude relative des lectures du galvanomètre.

662. Résistances très grandes. — Lorsque les résistances r et r' sont très grandes par rapport à celle du circuit, et très différentes entre elles, on peut faciliter la comparaison par l'emploi des shunts (**636**).

Appelant ρ la résistance de la pile jusqu'aux bornes du galvanomètre, g celle du galvanomètre, m et m' les pouvoirs multiplicateurs utilisés avec les résistances r et r', i et i' les intensités correspondantes, on a

$$E = mi\left(\rho + \frac{g}{m} + r\right) = mir\left[1 + \frac{1}{r}\left(\rho + \frac{g}{m}\right)\right],$$

ou sensiblement

$$mir = m'i'r', \qquad \frac{r}{r'} = \frac{m'i'}{mi}.$$

Si l'une des résistances r est tellement grande, par rapport à l'autre, que l'emploi des shunts ne suffise pas pour avoir des déviations mesurables dans les deux cas, on modifiera la force électromotrice en prenant des nombres différents n et n de couples identiques, ce qui donne

$$\frac{n}{n'} = \frac{mir}{m'i'r'}, \qquad \frac{r}{r'} = \frac{n}{n'}\frac{m'i'}{mi}.$$

On supprime habituellement le shunt pour l'observation

relative à la grande résistance r, et on ne prend qu'un couple pour la petite : on a alors $n = 1$, $m = 1$ et, par suite,

$$\frac{r}{r'} = n\,m\,\frac{i'}{i}.$$

C'est ainsi, en particulier, qu'on mesure la résistance de l'enveloppe isolante d'un câble télégraphique : le câble étant plongé dans une cuve pleine d'eau, l'un des bouts reste isolé et l'autre est relié à la cuve par l'intermédiaire de la pile et du galvanomètre.

Au moment où l'on interpose ainsi un câble isolé dans le circuit d'une pile, le courant est d'abord beaucoup plus grand et diminue ensuite jusqu'à une valeur minimum. Le courant initial est la superposition de trois effets : la charge du câble fonctionnant comme condensateur, le courant qui correspond au phénomène de l'absorption électrique, enfin la perte par l'enveloppe isolante. Le premier cesse rapidement, le second est plus durable, le troisième seul est permanent : c'est de l'intensité finale que l'on déduira la résistance d'isolement.

L'emploi d'une pile d'un grand nombre n de couples identiques fournit encore une méthode plus simple (1).

Le circuit extérieur étant formé par les résistances r et r' réunies bout à bout, on met un galvanomètre en communication, d'une part avec le point d'attache des deux résistances et, d'autre part, avec un couple d'ordre p, choisi de telle façon que le courant dans le gavanomètre soit nul. Le courant I est alors le même dans les deux parties du circuit séparées par les points de contact, dont l'une contient p couples et la résistance r', l'autre $n - p$ couples et la résistance r. En appelant ρ la résistance de chaque couple, les forces électromotrices des deux portions sont respectivement proportionnelles à leurs résistances, ce qui donne

$$\frac{p}{n-p} = \frac{r'+p\rho}{r+(n-p)\rho} = \frac{r'}{r}.$$

636. Mesures électrostatiques. — Avec les grandes résistances, la chute de potentiel (637) d'un bout à l'autre est assez

(1) [illegible] t. V, p. 241; 1885.

notable pour qu'on puisse l'évaluer par un électromètre, ou même par un galvanomètre dont la résistance propre est de beaucoup supérieure à celles qu'on veut évaluer. Le rapport des résistances r et r', situées dans le circuit d'un même courant, est égal au rapport des différences de potentiel correspondantes. L'électromètre permet même l'emploi de courants alternatifs, si les résistances comprises entre les points observés ne renferment pas d'induction propre appréciable.

La mesure du débit fournit d'autres méthodes.

L'une des extrémités A de la résistance r est mise en communication avec l'une des armatures d'un condensateur de grande capacité ou avec l'un des pôles d'une pile composée d'un grand nombre de couples, l'autre armature ou l'autre pôle étant au sol; l'extrémité B de la résistance est réunie au sol par un électroscope à décharges. Si le potentiel en A a une valeur sensiblement constante V_0, le nombre des contacts de la feuille d'or est en raison inverse de la résistance.

En substituant à l'électroscope un condensateur de capacité C relié au sol par une armature, on mesurera le potentiel V_0 de la source et le potentiel V acquis par le condensateur au bout du temps t. Lorsque les effets d'induction sont négligeables, ainsi que la conductibilité du condensateur, la relation $(V_0 - V)dt = rIdt = rCdV$ donne encore

$$\frac{t}{Cr} = \mathcal{L}.\frac{V_0}{V_0 - V_1};$$

le second membre se réduit sensiblement à $\frac{V_1}{V_0}$ quand ce rapport est très petit.

Sans avoir recours à une source constante, on peut encore réunir par la résistance r les deux armatures d'un condensateur et déterminer le temps t nécessaire pour que la différence de potentiel passe de V_0 à V_1; on a alors

$$\frac{t}{Cr} = \mathcal{L}.\frac{V_0}{V_1} = \mathcal{L}.\frac{Q_0}{Q_1}.$$

On déterminera le rapport des potentiels V_0 et V_1 par un électromètre ou celui des charges correspondantes Q_0 et Q_1 par le galvanomètre balistique.

...solu de la résis-
... magnétiques, sui-
... l'un ou l'autre des
... résistances, la capa-
... le rapport.
... elle équivaut à celle
... entre les deux armatu-
... avoir réuni les arma-
... totale ... du sys-
...
... applicable à la résistance
... le produit Cr de la
... d'isolement.
... compliquée par l'absorption
... différents suivant le temps
... du câble en contact avec la
... préciser les conditions. La
... des télégraphes en France
... une pile de 100 couples Daniell
... de 10 ohms. On met le câble en
... pendant 15 secondes et on mesure
... instantanée. On charge de nouveau
... on décharge le câble après l'avoir
... une minute.
... produit Cr est indépendant de la
... câble et qu'il est simplement
... résistivité ρ de l'isolant par son
... K. Le câble, avec son âme, son
... être assimilé à un condensa-
... centriques de longueur L et de
... de la capacité et de la résistance
...

$$\ldots \qquad Cr = \frac{K\rho}{4\pi}$$

... c'est la conséquence de
(159) ... flux d'électricité et le

Pour étudier la résistance des diélectriques, M. Curie [1] argente les deux faces d'une lame et trace un sillon sur l'une des argentures, de manière à isoler une surface *a* entourée d'un anneau de garde; cette surface *a* communique avec un quartz piezoélectrique et l'anneau de garde au sol. On porte la surface complète opposée à un potentiel déterminé, par une pile, et on compense avec le quartz la charge que prend la surface *a*, de manière que son potentiel soit nul. La pile étant supprimée, on abandonne l'appareil à lui-même. Au bout du temps *t* l'équilibre est détruit; le poids qu'on est obligé d'enlever sur le quartz pour rétablir l'équilibre est proportionnel à la perte de charge électrique.

664. Résistances liquides. — Des difficultés particulières se présentent pour les liquides électrolysables. Le passage d'une quantité quelconque d'électricité dans le liquide produit toujours une décomposition proportionnelle et transporte les produits sur les électrodes. Celles-ci, identiques à l'origine, deviennent le siège d'une force électromotrice de polarisation qui croît jusqu'à une valeur maximum (**182**).

Si la force électromotrice extérieure E est inférieure à ce maximum, un état d'équilibre tend à s'établir et le courant devrait cesser complètement. En réalité, le courant ne s'annule pas, mais reste très faible, sans qu'il y ait décomposition apparente de l'électrolyte; il est juste suffisant pour maintenir la polarisation constante et réparer les pertes par diffusion. Si la force électromotrice E est supérieure au maximum de polarisation, des bulles de gaz se dégagent aux électrodes.

L'effet immédiat de la polarisation des électrodes est donc de diminuer l'intensité du courant et de produire une augmentation *apparente* de la résistance. On attribuait autrefois cet effet à une résistance spéciale que l'électricité aurait rencontrée en passant d'un corps solide dans un liquide ou inversement, et on l'avait appelé *résistance au passage*. La présence sur les électrodes de dépôts non conducteurs, de bulles de gaz par exemple, peut introduire dans certains cas une résistance nouvelle qu'on peut encore appeler résistance au passage, mais dans un sens très différent du précédent.

[1] J. CURIE, *Ann. de chim. et de phys.* [6], t. XVIII, p. 203; 1889.

L'expérience ... Wheatst
tance, en unit ... différer
vant que la ... comp
deux systèmes ... En effet,
cité C du con ... pile.
Si le conde ... quo
qui serait pro ... ésistance
res. On déter ... spondante

tures par la

tème : la val

Cette mét
d'isolement
capacité du
L'expérien ... toute objection
électrique et ... résistance dont i
pendant leq ... pas assuré que la
source ; il e
règle établi ... partie, quand on
est d'employ ... emploie comme
ayant chacu ... tion, car la pola-
communica ... pile. Pouillet (²) a
alors V_0 pa ... ssolutions de sul-
pendant 15 ... n, avait un tube bien
abandonné ... ngueur. Ce tube était
Il est à r ... métal considéré.
forme et d ... tube de verre, ne
proportionn ... que la partie infé-
pouvoir ind ... variable du fond.
isolant et s ... ndent évidemment
teur formé ... isposition fournit
rayons *a* et ... ode.
(57, 83 et 1 ... Le liquide que l'on
... forme de siphon
... poreux remplis du
... placés dans des

$\frac{1}{C}$

Ce résult
la corrélati
flux d'induc

... 1843.

ırges contenant une dissolution de sulfate de zinc
:trodes en zinc amalgamé. Pour comparer deux
en remplit successivement les vases poreux et le
ıt clair que l'on fait ainsi disparaître la polarisa-
:ctrodes métalliques, mais on n'évite pas d'une
nplète les variations de force électromotrice qui
ɔroduire aux surfaces de contact du liquide avec
: zinc à travers le vase poreux.

e des chutes de potentiel fournit une méthode qui
:ochable ([1]). Le liquide est contenu dans un tube
'ique fermé à ses deux extrémités par des plaques
même section qui servent d'électrodes principales.
ectricité peut être considéré comme uniforme et
de niveau comme normales à l'axe du tube.

de platine isolés, que l'on peut appeler *électrodes*
ı *sondes électriques*, plongent en deux points A et
e et communiquent avec les électrodes d'un élec-
.a chute de potentiel mesurée par l'électromètre
produit du courant par la résistance de la colonne
: les deux plans, si les fils ne sont pas polarisés.
'ur cela, qu'ils n'aient livré passage à aucun cou-
able, ce qui revient à dire que la capacité de l'é-
doit être infiniment petite par rapport à la capa-
'isation des fils.

é d'un électromètre à quadrants est toujours très
ıpport à celle des électrodes parasites. Si l'on
ı contraire, d'un électromètre capillaire (**613**), on
ıc la surface immergée des électrodes soit très
apport à celle du mercure dans le tube capillaire
ent. Il y avantage, dans ce cas, à employer des
tine comme électrodes, parce que la capacité de
est alors de 20 à 25 fois plus grande que pour les
ıx.

ıparer directement la résistance de la colonne
le d'un conducteur métallique, on fait passer le
:ipal à travers une boîte de résistances et on met
ent en communication avec l'électromètre les

ı. *de l'Éc. Norm. Sup.* [2], t. II, p. 209; 1873. — G. LIPPMANN, *C. R.*
.. t. LXXXIII, p. 192; 1876.

Afin d'élin ... s de deux points de
opérait avec ... ns les deux cas, les
maintenait ... les forces électro-
par un rhéo ... différence
suppose co ... polarisation, en l'é-
que la force ... urant et prenant la
pelle x, x'...
tante du ...
rhéostat, ... on des électrodes
... A et B, séparées
... court le courant
... points A et B sé-
... courant I. L'élec-
... si formé, la dévia-

Cepen ... — M. Kolhrausch
les dépôt ... ides une propriété
est impo ... idale, comme ceux
polarisat ... ans un champ uni-
La dif ... bobine.
considér ... voltamètre et une
électrod ... treuit, ... E sin
risation ... rce électromotrice
mesuré ... pour une époque
fate de ...
cylindri...
fermé à
et un fil
laissant
rieure. ... érieure à sa valeur
A des d ... roportionnelle à la
des col ... rigine : en appelant
même ... inverse de la diffé-
M. P. ... d'électricité, dans
veut éli ... peut écrire
dont les
même ...

(1) Wi...
(2) Po... 280 et 370 ; 1869 —
(3) Pa...

L'équation (3) devient alors

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = \frac{de}{dt}.$$

C'est le problème traité précédemment (395), puisque la polarisation des électrodes équivaut à l'interposition d'un condensateur de capacité c.

La réactance du circuit est alors $L\omega - \frac{1}{c\omega}$. Comme le carré de cette expression s'ajoute au carré de la résistance R dans l'expression de l'amplitude du courant, il existe une vitesse de l'inducteur sinusoïdal pour laquelle le courant efficace est maximum. On a alors $Lc\omega^2 = 1$ et le courant efficace est simplement égal au quotient de la force électromotrice efficace par la résistance R.

On peut utiliser cette propriété directement. La résistance R du circuit étant complétée par une résistance du liquide x, on détermine le maximum de courant efficace, lequel correspond à une valeur ω_0 satisfaisant à la relation $1 = Lc\omega_0^2$.

Remplaçant le liquide par une résistance métallique r sans induction propre, on fait varier la vitesse de l'inducteur, ou la valeur de ω, de manière à obtenir le même courant. L'impédance étant la même dans les deux cas, il en résulte

$$(R + x)^2 = (R + r)^2 + L^2\omega^2.$$

Cette méthode suppose qu'il sera possible de réaliser le courant maximum dans le premier cas ; il faudra ensuite, dans la seconde expérience, mesurer la période T de la force électromotrice et connaître le coefficient L ou l'éliminer par une nouvelle épreuve dans des conditions différentes.

Il est plus avantageux de chercher, pour la même vitesse de rotation de l'inducteur, la résistance métallique r qui, substituée au liquide, reproduit la même intensité. L'égalité des impédances donne

$$(R + x)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2 = (R + r)^2 + L^2\omega^2.$$

deux électrodes parasites du liquide et celles de deux points de cette boîte. Si l'indication est la même dans les deux cas, les résistances sont égales. S'il existait entre les forces électromotrices de contact aux points A et B une différence accidentelle, indépendante du courant et de la polarisation, on l'éliminerait en renversant le sens du courant et prenant la moyenne des déviations observées.

On éliminera mieux encore la polarisation des électrodes avec un courant auxiliaire. Les électrodes A et B, séparées dans le liquide par la résistance r que parcourt le courant principal I, sont réunies respectivement aux points A′ et B′ séparés par la résistance métallique r' sur un courant I′. L'électromètre étant intercalé dans le circuit ainsi formé, la déviation est nulle pour la condition $\mathrm{I}r = \mathrm{I}'r'$.

665. Emploi des courants alternatifs. — M. Kolhrausch[1] a utilisé pour la mesure des résistances liquides une propriété des courants alternatifs de forme sinusoïdale, comme ceux qu'on obtient par la rotation d'un cadre dans un champ uniforme, ou la rotation d'un aimant dans une bobine.

Considérons un circuit renfermant un voltamètre et une source S. Appelant R et L les constantes du circuit, $e = \mathrm{E}\sin\omega t$ la force électromotrice de la source, ε la force électromotrice de polarisation du voltamètre, le courant i, pour une époque quelconque, satisfait à l'équation

$$L\frac{di}{dt} + \mathrm{R}i + \varepsilon = e = \mathrm{E}\sin\omega t. \tag{3}$$

Si la polarisation reste toujours très inférieure à sa valeur maximum, on peut admettre qu'elle est proportionnelle à la quantité d'électricité qui a passé depuis l'origine; en appelant c la capacité des électrodes, c'est-à-dire l'inverse de la différence de potentiel que leur donnerait l'unité d'électricité, dans l'hypothèse de cette proportionnalité, on peut écrire

$$c\varepsilon = \int i\,dt, \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{i}{c}.$$

(1) F. Kohlrausch, *Pogg. Annalen*, t. CXXXVIII, p. 280 et 370; 1869. — T. CXXXXVIII, p. 143; 1873. — Jubelband, p. 290; 1874.

L'équation (3) devient alors

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = \frac{de}{dt}.$$

C'est le problème traité précédemment (395). puisque la polarisation des électrodes équivaut à l'interposition d'un condensateur de capacité c.

La réactance du circuit est alors $L\omega - \frac{1}{c\omega}\cdot$ Comme le carré de cette expression s'ajoute au carré de la résistance R dans l'expression de l'amplitude du courant, il existe une vitesse de l'inducteur sinusoïdal pour laquelle le courant efficace est maximum. On a alors $Lc\omega^2 = 1$ et le courant efficace est simplement égal au quotient de la force électromotrice efficace par la résistance R.

On peut utiliser cette propriété directement. La résistance R du circuit étant complétée par une résistance du liquide x, on détermine le maximum de courant efficace, lequel correspond à une valeur ω_0 satisfaisant à la relation $1 = Lc\omega_0^2$.

Remplaçant le liquide par une résistance métallique r sans induction propre, on fait varier la vitesse de l'inducteur, ou la valeur de ω, de manière à obtenir le même courant. L'impédance étant la même dans les deux cas, il en résulte

$$(R + x)^2 = (R + r)^2 + L^2\omega^2.$$

Cette méthode suppose qu'il sera possible de réaliser le courant maximum dans le premier cas ; il faudra ensuite, dans la seconde expérience, mesurer la période T de la force électromotrice et connaître le coefficient L ou l'éliminer par une nouvelle épreuve dans des conditions différentes.

Il est plus avantageux de chercher, pour la même vitesse de rotation de l'inducteur, la résistance métallique r qui, substituée au liquide, reproduit la même intensité. L'égalité des impédances donne

$$(R + x)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2 = (R + r)^2 + L^2\omega^2. \tag{1}$$

deux électrodes parasites du liquide et e
cette boîte. Si l'indication est la même
résistances sont égales. S'il existait e
motrices de contact aux points A et B
telle, indépendante du courant et de
liminerait en renversant le sens du
moyenne des déviations observées.

On éliminera mieux encore la p
avec un courant auxiliaire. Les él
dans le liquide par la résistance
principal I, sont réunies respective
parés par la résistance métallique
tromètre étant intercalé dans le
tion est nulle pour la condition I

665. Emploi des courants alte
a utilisé pour la mesure des résis
des courants alternatifs de for
qu'on obtient par la rotation d
forme, ou la rotation d'un aima

Considérons un circuit ren
source S. Appelant R et L les c
la force électromotrice de la
de polarisation du voltamètr
quelconque, satisfait à l'équ

$$L\frac{di}{dt} + Ri$$

Si la polarisation reste
maximum, on peut admet
quantité d'électricité qui
la capacité des électro
rence de potentiel que le
l'hypothèse de cette pr

K... Pogg
... XXXVIII, p. 145; 187

..., il faut qu'o
... T².

...icile de réalis
...oduction des
...hlrausch éch
... très faibles
... nt la capacit
... ande et la pér
... it un nombre
... On devra cons
... et r est indé
... servira de contr

... M. Guthrie et Bo
... les liquides de l'i
... par le mouve
... sur eux-mêmes et
... de polarisation
... révolution suspe
... aimants extérieurs,
... ment uniforme, es
... autour de l'axe com
... la communica

... courants induits d
... intensité du cha
... la conductibilité
... mouvement. S'il n'y a
... lui-même, ni contre
... le liquide finirait
... que les aimants. D'a
... vase un systèm
... du mouvement
... équilibre au momen
... les diverses cou

...rennent un mouvement de rotation très lent ...angulaire va en décroissant du centre à la cir... dont la valeur moyenne n'atteint pas le vingt ...lle des aimants. On peut donc admettre sans ... que la torsion mesure l'action électromagné...suite, pour une même vitesse et un même champ, ...lité du liquide.

...urait que le vase seul ne donnait lieu par lui-même ...ction. Pour tenir compte des variations du champ ...ent de torsion du fil, on recommençait chaque ... en suspendant dans le vase un disque de laiton : ... devait rester la même pour une même vitesse, ... le champ et le fil n'avaient pas été modifiés.

...teurs ont appliqué cette méthode à des mélanges ...lfurique et d'eau. Leurs résultats s'accordent assez ... ceux de M. Kolhrausch, surtout en ce qui concerne ...on du maximum et du point d'inflexion de la courbe ...sente la conductibilité de ces mélanges.

Résistance d'un galvanomètre ou d'une pile. — L'em... shunts permet de déterminer la résistance ρ de la pile ...sistance g du circuit galvanométrique lui-même, sans ...oit nécessaire de recourir à un autre instrument.

...mesure d'abord le courant primitif I_0, puis le courant i ... avec un shunt de pouvoir m, enfin le courant direct I ...introduction d'une résistance r. On a alors

$$E = I_0(\rho + g) = mi\left(\rho + \frac{g}{m}\right) = I(\rho + g + r);$$

$$\rho = \frac{r}{m-1} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{I_0 - i}{I_0 - I}, \qquad g = \frac{r}{m-1} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{mi - I_0}{I_0 - i}$$

...la résistance r a été choisie de façon que les deux inten... i et I soient égales, il reste simplement

$$\rho = \frac{r}{m-1}, \qquad g = \frac{r}{m-1} \cdot \frac{mI - I_0}{I_0 - I}.$$

...galvanomètre à grande résistance peut donner directe... la résistance de la pile [1]. On observe d'abord le cou...

[1] W. Thomson, *Journ. of Tel. Eng.*, t. I, p. 399; 1873.

Pour que les résistances x et r soient ég

$$1 = 2Lc\omega^2, \qquad 2\omega^2 = \omega_0^2,$$

Dans ce cas encore, il serait souvent
vitesse convenable de l'inducteur, et l
ficient L et c complique les formules
à cette difficulté en employant des c
des électrodes platinées à grande surf
considérable. Si la capacité c est as
assez petite pour que le produit L
grand, l'équation (4), se réduit à x
alors que l'équivalence des résista
dante de la vitesse ; cette vérifica
l'exactitude des expériences.

666. Entraînement par induction
ont cherché à déduire la conducti
sité des courants induits dans le
d'un aimant. Ces courants étant f
électrodes ne peuvent donner a

Le liquide est renfermé dans u
par un fil métallique. Un syst
produit un champ horizontal
pable de recevoir une rotation
du fil et du vase. Des écrans
du mouvement par l'interméd

Toutes choses égales d'ai
la masse liquide sont prop
à la vitesse du déplacemen
liquide ; ils tendent à s'op
aucun frottement du liqui
parois, le vase resterait i
prendre la même vitesse d
part, si la masse liquide f
gide, celui-ci serait entra
qu'à ce que le couple de
actions électromagnétiq

Guthrie et Boys, Phil. M

trois intensités observées dans le galvanomètre G ; on a

$$aI_0 = (g+a)i_0 = (g+a+r)i = (g+a+r')i',$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{i'}{i} \cdot \frac{i_0 - i}{i_0 - i'}.$$

Si l'intensité i_0 est maintenue constante dans la branche dérivée, les intensités I_0, I et I′ du courant principal donnent

$$\frac{i_0}{a} = \frac{I_0}{g+a} = \frac{I}{g+a+r} = \frac{I - I_0}{r};$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{I - I_0}{I' - I_0}.$$

Cette dernière méthode, indiquée par M. Bosscha (1), ne peut fournir des résultats exacts que si les différences $I - I_0$ et $I' - I_0$ sont assez grandes, c'est-à-dire si les résistances r et r' sont du même ordre que celle du galvanomètre.

Lorsque la résistance du galvanomètre qui sert aux lectures est très grande, il suffit de le placer lui-même en dérivation sur une partie constante du circuit dérivé et les formules ne changent pas.

669. **Décharges d'induction**. — La décharge produite par une force électromotrice instantanée, comme celles d'induction, est en raison inverse de la résistance du circuit ; il suffit alors de remplacer dans les formules les déviations permanentes de l'aiguille par les arcs d'impulsion. W. Weber (2), par exemple, déplaçait un aimant entre des limites fixes, dans l'intérieur d'une bobine.

Les résistances à comparer r et r' seront introduites dans dans le circuit, comme précédemment, mais on peut aussi les placer en dérivation sur le galvanomètre, à la condition toutefois que l'emploi des shunts ne modifie pas le partage de la décharge (**636**). On ferme d'abord le circuit par un galvanomètre de résistance g, et on ajoute successivement en dérivation sur le galvanomètre les résistances r et r', puis les

(1) Bosscha, *Pogg. Ann.*, t. CX, p. 452 ; 1860.
(2) W. Weber, *Electrodyn. maasb. Wiederstand mess.*, p. 209.

pliquée par Christie [1] dès 1833, mais c'es
que l'on doit d'en avoir montré toute la féc

Comme les liaisons des conducteurs son
plexes, il est utile d'examiner d'abord les pr
d'un ensemble de conducteurs linéaires, ren
électromotrices et réunis de manière à coi
de forme quelconque (158) arrivé à l'état p

Nous dirons que le réseau constitue un
lorsque deux points quelconques peuvent ê
par un circuit fermé emprunté au réseau
courant dans les différentes branches s
les forces électromotrices et les résist
priétés du réseau peuvent se déduire
tions, au point de vue algébrique, n
plutôt à les établir par des considér
nature des phénomènes.

Supposons que le réseau renferme
sommets, c'est-à-dire m points auxqu
trois des conducteurs.

La condition

$$\Sigma i = 0. \tag{1}$$

appliquée aux sommets, donner
tinctes. En effet, considérons
d'un conducteur, et appliquons
tous les sommets que l'on re
au point A par un chemin ext
obtiendrons ainsi une série
chacune d'elles renferme au
elles impliquent la condition
traversent un plan quelcon
des conducteurs, y compri
il en est ainsi, en particuli

(1) Christie, *Phil. Trans. L. li.*
(2) Wheatstone, *The Backeria*
p. 303; 1843. — *Scientific. papers*
(3) Voir Poggendorff, *Ann. de*
Bosscha, *Pogg. Ann.*, t. CIV, p.
t. XVII, p. 105, 1863. — J. Ray

Si la résistance r' est ajustée de façon que l'aiguille soit maintenue au zéro, il en résulte

$$\frac{k}{k'} = \frac{g+r}{g'+r'}.$$

Pour un galvanomètre réglé, où $k=k'$ et $g=g'$, il reste $r=r'$. On éliminera les défauts de réglage par substitution, comme dans une double pesée, en remplaçant r par une résistance étalonnée r_1 qui rétablisse l'équilibre.

Si, au lieu de ramener l'aiguille au zéro dans chaque expérience, on l'observait à un même repère correspondant à une déviation δ, la méthode de substitution ne serait rigoureuse que si le courant principal I et, par suite, la force électromotrice restaient invariables.

On détermine par expérience la sensibilité de la méthode en cherchant la déviation que produit une variation connue de l'une des résistances. La discussion des formules permettrait de fixer la meilleure résistance à donner au galvanomètre, mais ces considérations ont perdu beaucoup d'intérêt.

Quand les résistances à comparer sont très faibles, on les met respectivement en dérivation sur les bobines du galvanomètre différentiel; il est avantageux alors de faire passer le courant de la pile successivement et en sens contraires dans les deux bobines, et on a

$$I = \frac{g+r}{r}\,i = \frac{g'+r'}{r'}\,i' = \frac{E}{\rho + \dfrac{gr}{g+r} + \dfrac{g'r'}{g'+r'}}.$$

Ces équations donnent, en posant

$$D_1 = \rho(g+r)(g'+r') + gr(g'+r') + g'r'(g+r),$$

$$\delta = ki - k'i' = E\,\frac{kr(g'+r') - k'r'(g+r)}{D_1}.$$

Comme précédemment, les résistances r et r' sont égales pour $\delta = 0$, lorsque le galvanomètre est réglé, et on éliminera les défauts de réglage par substitution.

Si les résistances à comparer sont très différentes, on mettra le shunt sur la bobine qui correspond à la plus faible r. Soit m' le pouvoir multiplicateur du shunt, i et i' les intensités; l'aiguille étant au zéro, on a

$$ki = k'i, \qquad i(r+g) = m'i'\left(r'+\frac{g'}{m'}\right);$$

$$k(m'r'+g') = k'(r+g).$$

Avec un galvanomètre réglé, il reste simplement

$$r = m'r'.$$

Quand le shunt ne suffit pas, on met les deux bobines dans des circuits séparés, l'une avec la résistance r et n couples, l'autre avec la résistance r', un seul couple et le shunt. C'est aussi un procédé souvent employé pour mesurer l'isolement d'un câble; on a alors

$$r = nm'r'.$$

Nous citerons encore, comme se rattachant à l'emploi du galvanomètre différentiel, la méthode de sir William Siemens (¹) et celle de M. Jenkin (²).

Dans l'appareil de Siemens, les deux bobines du galvanomètre différentiel sont éloignées l'une de l'autre d'une quantité fixe, on les déplace parallèlement à elles-mêmes par rapport à l'aiguille, jusqu'à ce que celle-ci revienne au zéro. Une graduation empirique donne le rapport des deux courants et, par suite, celui des résistances.

Ce rapport s'obtient également par les deux cadres rectangulaires de M. Jenkin (626), quand le système est tourné d'un angle φ tel que l'aiguille reste au zéro; on a alors

$$\tang\varphi = \frac{ki}{k'i'} = \frac{k}{k'}\,\frac{g'+r'}{g+r}.$$

[illegible] **Résistances très faibles.** — Les difficultés spéciales que présente la mesure des résistances très faibles sont dues

(¹) Siemens, *B. A. Report*, 1867; *Reprint*, p. 142.
(²) *B. A. Report*, 1867; *Reprint*, p. 144.

principalement à l'importance relative que prennent les résistances des prises de contact aux points de jonction. D'autre part, ces conducteurs ne sont plus assimilables à des fils linéaires et il est nécessaire de définir quelle est alors la signification des mesures.

Considérons dans la masse du conducteur deux surfaces de niveau infiniment petites A et B, deux petites sphères, par exemple, l'une traversée par l'électricité qui entre, l'autre par l'électricité qui sort (162) ; si ces deux sphères, servant d'électrodes, sont respectivement aux potentiels V_a et V_b, et que I soit le courant total, la résistance R du milieu qui les sépare est donnée par la relation

$$V_a - V_b = RI. \tag{5}$$

Cette résistance peut être calculée en divisant en tubes de flux la portion du milieu comprise entre les deux surfaces des électrodes, et appliquant à l'ensemble des tubes les propriétés des courants dérivés.

Pour mesurer la résistance d'un conducteur, en général, quatre électrodes sont nécessaires : deux d'entre elles mettent le conducteur sur le trajet d'un courant, deux autres, qui jouent le rôle de *sondes* électriques, réunissent deux points A et B du conducteur avec le galvanomètre ou tout autre appareil de mesure.

Dans un régime permanent, les potentiels sont des fonctions linéaires des courants, avec la même constante arbitraire, puisque leurs différences s'annulent avec les courants. Si I est le courant direct, entre les points A et B, et i le courant dérivé on peut donc écrire

$$V_a - V_b = xI + yi. \tag{6}$$

Il est clair que le coefficient x représente la résistance du conducteur entre les points A et B, puisqu'on retrouve l'équation (5) en faisant $i = 0$, c'est-à-dire en laissant ouvert le circuit des sondes.

Il suffira ainsi de deux équations analogues à (6), dans lesquelles on déterminera par expérience la différence de poten-

pliquée par Christie [1] dès 1833, mais c'est à Wheatstone [2] que l'on doit d'en avoir montré toute la fécondité.

Comme les liaisons des conducteurs sont alors assez complexes, il est utile d'examiner d'abord les propriétés générales d'un ensemble de conducteurs linéaires, renfermant des forces électromotrices et réunis de manière à constituer un réseau de forme quelconque (**158**) arrivé à l'état permanent [3].

Nous dirons que le réseau constitue un système *complet*, lorsque deux points quelconques peuvent être reliés entre eux par un circuit fermé emprunté au réseau. Les intensités du courant dans les différentes branches sont déterminées par les forces électromotrices et les résistances (**155**). Les propriétés du réseau peuvent se déduire de la forme des équations, au point de vue algébrique, mais nous chercherons plutôt à les établir par des considérations empruntées à la nature des phénomènes.

Supposons que le réseau renferme n conducteurs, ayant m *sommets*, c'est-à-dire m points auxquels aboutissent au moins trois des conducteurs.

La condition

$$\Sigma i = 0, \tag{1}$$

appliquée aux sommets, donnera lieu à $m-1$ équations distinctes. En effet, considérons les deux extrémités A et A' d'un conducteur, et appliquons cette loi successivement à tous les sommets que l'on rencontre, en allant du point A au point A' par un chemin extérieur au conducteur AA'; nous obtiendrons ainsi une série d'équations différentes, puisque chacune d'elles renferme au moins un nouveau courant, mais elles impliquent la condition que la somme des courants qui traversent un plan quelconque P, coupant le faisceau entier des conducteurs, y compris le premier, soit toujours nulle; il en est ainsi, en particulier, pour la somme des courants qui

(1) Christie, *Phil. Trans. L. R. S.*, for 1833.

(2) Wheatstone, *The Backerian lecture* for 1843. — *Phil. Trans. L. R. S.*, t. V, p. 303; 1843. — *Scientific. papers*, p. 127.

(3) Voir Poggendorf, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. XVIII, p. 489; 1846. — Bosscha, *Pogg. Ann.*, t. CIV, p. 460; 1858. — Lucien de la Rive, *Arch. de Genève*, t. XVII, p. 105; 1863. — J. Raynaud, *Journ. de Phys.*, t. II, p. 161; 1873.

aboutissent en A′, de sorte que l'équation relative à ce point est déjà implicitement contenue dans les précédentes.

Désignons par p le nombre minimum de conducteurs qu'il faut enlever pour supprimer tout circuit fermé. Ces p conducteurs forment ce que nous appellerons un système de fils *nécessaires*, et peuvent être choisis en général de plusieurs manières différentes.

La condition relative aux circuits fermés,

$$\Sigma(ir - e) = 0, \tag{2}$$

donne lieu à p équations distinctes. En effet, nous allons montrer d'abord que l'addition d'un fil dans un réseau quelconque n'introduit qu'une équation nouvelle de la seconde espèce.

Soient A et A′ deux points réunis déjà par plusieurs chemins, V et V′ leurs potentiels. La différence de potentiel $V - V'$ est égale à l'une quelconque des expressions $\Sigma(i_1 r_1 - e_1)$, $\Sigma(i_2 r_2 - e_2)$..., relatives aux différents chemins C_1, C_2,... qu'on peut suivre pour aller de A en A′. Si l'on ajoute entre ces deux points un conducteur r, renfermant une force électromotrice e et parcouru par le courant i dans le nouvel état, on a aussi

$$V - V' = ir - e = \Sigma(i_1 r_1 - e_1) = \Sigma(i_2 r_2 - e_2) = \ldots.;$$

l'addition du conducteur r introduit donc dans le système une équation nouvelle, et une seule.

Quand on supprime un système de p fils nécessaires, le réseau est entièrement ouvert et ne peut donner lieu à aucune équation de la dernière forme. L'addition successive des p fils nécessaires, qui rétablissent le réseau primitif, introduit donc p équations distinctes, ce qui démontre la proposition.

Comme le réseau renferme n conducteurs différents et que le phénomène physique est défini, la somme totale des équations doit être égale à la somme n des intensités des courants ; il en résulte la condition

$$p + m - 1 = n, \qquad p = n - m + 1.$$

Le nombre minimum p des conducteurs nécessaires est

On peut supposer, dans le cas gé
renferment des forces électromotrice
les courants respectifs étant I, i, α,
Les quatre sommets fourniront
et les circuits fermés trois autres
le nombre des conducteurs néce
aura ainsi

$$I = \alpha + \alpha' \quad \ldots = \frac{MN}{a};$$

$$(3) \quad \begin{cases} i = \alpha - \beta \ldots \\ a\alpha + ri - a'\alpha \ldots \\ b\beta - b'\beta' - r \ldots \\ RI + a\alpha + b \ldots = E\frac{a}{N}. \end{cases}$$

Ces équations s'appliquent ... les forces électromo-
forces électromotrices comp ... ue les diagonales R et r
Quand il s'agit du régime
le cas d'une seule force él
de la superposition des état ... $E_a - E_b$),
le courant dans un côté q
courants relatifs à chacu
Les remarques génér ... es équations analogues
seau complet permetter ... ectromotrices considérées
minateur commun de ... écrire directement par
donnent 20 combinais
trancher les quatre co
tissant à un même som
minateur, et on peut ... $\frac{\ldots(E_a - E_b - e)}{M}$,

$\Delta = Rr(a + a' + b + \ldots$ ... $\frac{\ldots(E_a - E_a + e)}{M}$,

... $\frac{\ldots(E_a - E_a + e)}{M}$,

$\Delta = Rr(a + a' + b - \ldots$ ... $\frac{\ldots(E_a - E_b + e)}{M}$,

La seconde fo ... $\frac{\ldots(E_a - E_b - e)}{M}$.
de la même man
derniers terme
face de la pyra ... comme on devait le pr

...lantes des forces électro-
...é conjugué.
...que la force électromotrice E
...permanent n'est pas établi,
...lectromotrices d'induction.
... négligeables, ces forces élec-
...le l'induction propre de cha-
. $l_{a'}$,... les coefficients de self-

$$E_{a'} = -L_{a'} \frac{dx'}{dt}, \quad \ldots$$

...ferme le galvanomètre et dont l dé-
... induction, le courant est

$$\ldots) - b\left(L_a \frac{dx}{dt} - L_{a'} \frac{dx'}{dt}\right) - (a+b)l\frac{di}{dt}.$$

... variation du courant principal est très
... la période d'oscillation de l'aiguille,
...rtionnelle à l'intégrale de idt.
...es de cette intégrale qui ne dépend pas
...el à la différence $x_2 - x_1$, $\beta_2 - \beta_1$, des in-
...finale; ces termes disparaissent dans le cas
...ont les mêmes aux deux limites.
...si, en particulier, pour les termes relatifs à
...es du réseau si, au lieu d'une force électro-
...le E, on introduisait dans la branche R une
...rice instantanée d'induction; la condition d'é-
...étant réalisée, l'aiguille reste immobile dans
...que l'intensité i du courant dans le pont est
...imites.
...roduit dans la branche R une force électro-
...te E, les diagonales étant toujours conju-
...courants sont d'abord nuls au moment de la
...cuit et prennent finalement, d'après les équa-
...eurs

$$= x_0 = E\frac{a'}{N}, \qquad x'_2 \cdot \beta'_2 = x'_0 = E\frac{a}{N}.$$

et posant, pour abréger,

$$M = b(a + a') + r\ldots$$
$$N = R(a + a') + a\ldots$$

il en résulte

$$D_0 = \frac{a + a'}{a} M, \qquad \Delta_0 \ldots$$

(5)
$$\begin{cases} I_0 = E\,\dfrac{a + a'}{N}, \\ \alpha_0 = \beta_0 = E\,\dfrac{a'}{N}. \end{cases}$$

… même … restera …

Supposons maintenant q… trices dans toutes les branch… … pas conjuguées restent conjuguées ; on peut … complexes :

… me la branc…

$$P = (a + a')E + \ldots$$
$$Q = ar(E_a - E_a\ldots$$

… contraire … ulté, qui

Les équations (3), ou … à (4) relatives à toutes le… séparément, équations … analogie, donnent alors



(6)
$$\begin{cases} I = \dfrac{P}{N}, \qquad i = \ldots \\ \alpha = \dfrac{a'}{a + a'}\,\dfrac{P}{N} - \ldots \\ \alpha' = \dfrac{a}{a + a'}\,\dfrac{P}{N} \ldots \\ \beta = \dfrac{a'}{a + a'}\,\dfrac{P}{N} \ldots \\ \beta' = \dfrac{a}{a + a'}\,\dfrac{P}{N} \ldots \end{cases}$$

On voit que les i…

...and on appuie sur le bouton M, le ...ct en A et B ferme le circuit de la ...e contact en C et D ferme le circuit

... la force électromotrice E soit sinu... du courant dans le pont est repré... à dénominateur essentiellement posi... N est la somme des carrés

$$\ldots L_a L_{b'})]^2 + \omega^2 (a L_{b'} + b' L_a - a' L_b - b L_{a'})^2.$$

...pression soit nulle, il faut, comme on l'a ... ait en même temps

$$\ldots ba - ab' = \omega^2 (L_b L_{a'} - L_a L_{b'}),$$

$$a L_{b'} + b' L_a = a' L_b + b L_{a'}.$$

... intercalé dans le pont resterait alors silen...nt satisfaire à ces deux conditions par le simple ... l'une des résistances. Toutefois, si l'équilibre ...es établi, le numérateur N est très petit et le bruit qu'on obtient dans le téléphone, en chan...ance b', correspond sensiblement à la condition ...e de N par rapport à b' soit nulle.

...n des coefficients de self-induction L_a est nul, ...s de silence se réduisent à

$$\ldots - ab' = \omega^2 L_b L_{a'}, \qquad a L_{b'} = a' L_b + b L_{a'}.$$

...re n'est autre que celle du minimum et la seconde ...e pas b'. Désignant par ε la résistance qu'il faut ... valeur de b', réglée par les courants continus, ...r le moindre bruit dans le téléphone, on a

$$a\varepsilon = L_b L_{a'} \omega^2.$$

...ham (¹) a vérifié par expérience que la résistance ...taire ε est proportionnelle au carré de la fréquence ...t alternatif. La force électromotrice était produite

(¹) ..., *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 127; 1895.

La décharge dans le galvanomètre est

$$q = \int i\,dt = \mathrm{E}\frac{aa'}{\mathrm{MN}}\left[a\left(\frac{L_b}{a} - \frac{L_{b'}}{a'}\right) - b\left(\frac{L_a}{a} - \frac{L_{a'}}{a'}\right)\right],$$

ou, en tenant compte de la relation $ab' = ba'$,

$$q = \int i\,dt = \mathrm{E}\frac{aba'}{\mathrm{MN}}\left[\left(\frac{L_b}{b} - \frac{L_a}{a}\right) - \left(\frac{L_{b'}}{b'} - \frac{L_{a'}}{a'}\right)\right].$$

La rupture du circuit produit le même effet, mais en sens contraire. Dans les deux cas, l'aiguille restera donc immobile pour la condition

$$\frac{L_b}{b} - \frac{L_a}{a} = \frac{L_{b'}}{b'} - \frac{L_{a'}}{a'}.$$

Lorsque les diagonales r et R ne sont pas conjuguées, les courants induits obéissent à des lois plus complexes; l'impulsion de l'aiguille, au moment où l'on ferme la branche R qui renferme la pile, peut être même de signe contraire à la déviation permanente. Pour éviter cette difficulté, qui rend

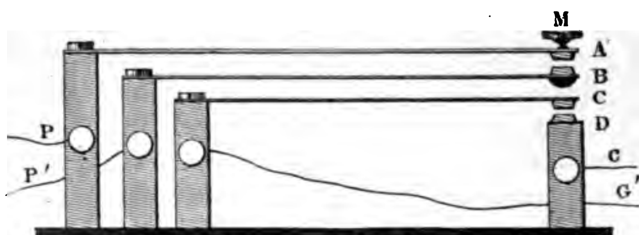


Fig. 182.

les observations beaucoup plus longues, on a soin de fermer d'abord la pile, puis le galvanomètre; l'aiguille reste alors au zéro, quels que soient les coefficients d'induction, si l'équilibre du pont pour le régime permanent est établi, et elle se déplace toujours dans le sens de la déviation définitive.

On arrive généralement à ce résultat en manœuvrant deux clefs indépendantes placées l'une sur la branche de la pile et l'autre sur celle du galvanomètre. Cette double opération peut aussi s'exécuter d'une manière automatique, au moyen d'une clef spéciale à deux contacts successifs (fig. 182) formée

lames élastiques. Quand on appuie sur le bouton M, le contact qui s'établit d'abord en A et B ferme le circuit de la pile; un instant après, le contact en C et D ferme le circuit du galvanomètre.

Supposons encore que la force électromotrice E soit sinusoïdale. Le carré moyen du courant dans le pont est représenté par une fraction, à dénominateur essentiellement positif, dont le numérateur N est la somme des carrés

$$[ba' - ab' - \omega^2(L_b L_{a'} - L_a L_{b'})]^2 + \omega^2(a L_{b'} + b' L_a - a' L_b - b L_{a'})^2.$$

Pour que cette expression soit nulle, il faut, comme on l'a vu déjà (**396**), qu'on ait en même temps

$$ba' - ab' = \omega^2(L_b L_{a'} - L_a L_{b'}),$$
$$a L_{b'} + b' L_a = a' L_b + b L_{a'}.$$

Un téléphone intercalé dans le pont resterait alors silencieux. On ne peut satisfaire à ces deux conditions par le simple changement de l'une des résistances. Toutefois, si l'équilibre est à peu près établi, le numérateur N est très petit et le minimum de bruit qu'on obtient dans le téléphone, en changeant la résistance b', correspond sensiblement à la condition que la dérivée de N par rapport à b' soit nulle.

Lorsque l'un des coefficients de self-induction L_a est nul, les conditions de silence se réduisent à

$$ba' - ab' = \omega^2 L_b L_{a'}, \qquad a L_{b'} = a' L_b + b L_{a'}.$$

La première n'est autre que celle du minimum et la seconde ne renferme pas b'. Désignant par ε la résistance qu'il faut ajouter à la valeur de b', réglée par les courants continus, pour obtenir le moindre bruit dans le téléphone, on a

$$a\varepsilon = L_b L_{a'} \omega^2.$$

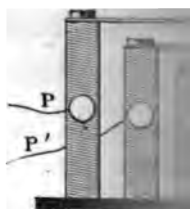
M. Abraham (¹) a vérifié par expérience que la résistance supplémentaire ε est proportionnelle au carré de la fréquence du courant alternatif. La force électromotrice était produite

(¹) ABRAHAM, *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 127; 1895.

La décharge dans ... urnant en face de
... de périodes pouvait
$q = \int i dt$ ... est très satisfaisant.
... des harmoniques
ou, en tenant comp... le silence relative au

$q = \int i dt$ ... valeur de i donnée par
... que la sensibilité de la
... us est, pour une force
La rupture du ... inverse de Δ.
contraire. Dans le... les, on peut se demander
bile pour la condi... de vue, que la pile et le
... des diagonales.
... la pile et le galvano-
... ance propre, le dénomina-
Lorsque les dia... telle que
courants induits
pulsion de l'aigui ... $(a + a')(b + b')$
qui renferme la
déviation perman

... $(a' - b)$ soit positif, c'est-
... $a > b$, ou $a < b'$ et $a' < b$.
... être considérée comme à peu
... reviennent à supposer que
... sont rangées par ordre de gran-
... antes, c'est-à-dire que les deux
... les points de jonction, l'un des
... et l'autre des deux plus petites.
... et la première disposition vaut
... aurait lieu pour $R < r$. On en



les observations ...
d'abord la pile, ...
zéro, quels que ... a lieu lorsque la plus grande
libre du pont ... anomètre, est située sur la diago-
déplace toujours ... aboutissent séparément les plus
On arrive géné... résistances du quadrilatère.
clefs indépendan... anomètre est généralement plus
et l'autre sur ce...
peut aussi s'évi... erche à équilibrer une résistance b
d'une clef spécia... ance b', a et a' étant des résistances

··s. Si on prend $a = a'$, on a aussi $b' = b$; mais il suffit .un rapport arbitraire entre les branches a et a', pour ··ndition d'équilibre corresponde au même rapport branches b et b'.

on est près de l'équilibre ([1]), le courant i, qui cor-. une erreur $-\varepsilon$ commise sur la valeur de b', est ·té par l'expression

$$i = E\frac{a}{\Delta}\varepsilon = E\frac{\varepsilon}{K},$$

·quelle on peut remplacer Δ par la valeur Δ_0 qui cor-. à l'équilibre du pont.

iminant la résistance a' de l'expression de Δ_0 par la ·n d'équilibre, on a

$$\cdots = \left[R\left(1+\frac{b'}{b}\right)+b'\left(1+\frac{a}{b}\right)\right]\left[r\left(1+\frac{b}{a}\right)+b\left(1+\frac{b'}{b}\right)\right],$$

posant

$$S = Rb + bb' + Rb' \qquad \text{et} \qquad T = r + b + b',$$

$$K = \frac{ST}{b} + br' + T\frac{b'}{b}a + \frac{Sr}{a}.$$

inimum de l'erreur absolue ε est la variation de résis-qui correspond au plus faible courant i que le galvano-permet d'apprécier.

reur absolue et l'erreur relative sont donc

$$\varepsilon = \frac{i}{E}K, \qquad \frac{\varepsilon}{b'} = \frac{i}{E}\frac{K}{b'}.$$

six quantités a, a', b, b', r et R, la résistance b à mesurer seule qui soit donnée ; R et r sont entièrement arbi-; les trois autres résistances a, a' et b', sont liées à b par

r SCHWENDLER, *Ph. Mag.* [4], t. XXXI, p. 364; 1866 et t. XXXIII, ;7 — HEAVISIDE, *Ph. Mag.* [4], t. XLV, p. 114; 1873. — GRAY, *Ph.* t. XII, p. 283; 1881.



par un disque, muni de barreaux de fer, tournant en face de l'aimant d'un téléphone et dont le nombre de périodes pouvait atteindre 6000 par seconde. Le contrôle est très satisfaisant, malgré le trouble produit par la persistance des harmoniques auxquels ne s'applique pas la condition de silence relative au son fondamental.

675. Conditions de sensibilité. — La valeur de i donnée par la seconde des équations (4) montre que la sensibilité de la méthode appliquée aux courants continus est, pour une force électromotrice déterminée, en raison inverse de Δ.

Les branches du pont étant invariables, on peut se demander d'abord s'il est indifférent, à ce point de vue, que la pile et le galvanomètre occupent l'une ou l'autre des diagonales.

Si on permute les deux diagonales, la pile et le galvanomètre emportant chacun sa résistance propre, le dénominateur Δ prend une nouvelle valeur Δ', telle que

$$\begin{aligned}\Delta' - \Delta &= (R - r)[(a + b)(a' + b') - (a + a')(b + b')]\\ &= (R - r)(a - b')(a' - b).\end{aligned}$$

Supposons que le produit $(a - b')(a' - b)$ soit positif, c'est-à-dire qu'on ait à la fois $a > b'$ et $a' > b$, ou $a < b'$ et $a' < b$.

La relation $ab' = a'b$ pouvant être considérée comme à peu près satisfaite, ces deux conditions reviennent à supposer que les quatre résistances a, a', b, b', sont rangées par ordre de grandeurs croissantes ou décroissantes, c'est-à-dire que les deux sommets A et B (fig. 180) sont les points de jonction, l'un des deux plus grandes résistances, et l'autre des deux plus petites.

Dans ce cas, si $R > r$, $\Delta' > \Delta$ et la première disposition vaut mieux que la seconde; l'inverse aurait lieu pour $R < r$. On en déduit cette règle :

Le maximum de sensibilité a lieu lorsque la plus grande des résistances, pile ou galvanomètre, est située sur la diagonale qui joint les sommets où aboutissent séparément les plus grandes et les plus petites résistances du quadrilatère.

Dans la pratique, le galvanomètre est généralement plus résistant que la pile.

Supposons que l'on cherche à équilibrer une résistance b par une résistance étalonnée b', a et a' étant des résistances

lait réaliser la sensibilité maximum avec des bran-
égales, les équations (8) donneraient

$$b^2 = Rr = a^2,$$
$$a = a' = b = b' = \sqrt{Rr}.$$

;, les quatre branches du pont devraient avoir la
ance.

ne genre de discussion ne s'applique plus aux
l et r, parce qu'il faut faire intervenir la constante
ique et la force électromotrice. Si on se donne le
e et la pile, il est clair que toute résistance auxi-
sur l'une ou l'autre des deux diagonales diminue

; que la pile soit donnée, ainsi que les résistances
ranches du pont et la gorge de la bobine galva-
le maximum de sensibilité pour le galvanomètre
quand la résistance de la bobine est égale à la
du réseau total entre les deux extrémités C et D
la diagonale sur laquelle se trouve le galvano-
fet, d'après le théorème de M. Thevenin (672), si
et V′ les potentiels des points C et D, quand la
est ouverte, le courant i est le même que si ces
t les extrémités d'un conducteur unique de résis-
rmant une force électromotrice égale à V — V′.
rt, étant donnés un certain nombre de couples
ntre eux, on obtient le courant maximum quand
se de manière que la résistance de la pile soit
sistance du reste du circuit ([1]).
s actuel, lorsque la balance est établie, les deux

rce électromotrice et ρ la résistance de chacun des n couples;
en m séries de p couples, $n = mp$, réunis par une résistance ex-
isité du courant est

$$I = \frac{pe}{\frac{p\rho}{m} + r} = \frac{e}{\frac{\rho}{m} + \frac{r}{p}} = \frac{e}{\frac{\rho}{n} p + \frac{r}{p}}.$$

n est maximum pour la condition $r = p^2 \frac{\rho}{n} = p \frac{\rho}{m}$, c'est-à-dire
ice de la pile est égale à la résistance extérieure.

la condition d'équilibre. On peut considé

1° Supposons qu'avec b, on donne b', r e

est la seule indéterminée, le rapport de

La valeur de a qui correspond au minim

K s'obtiendra en égalant à zéro la dérivé

par rapport à a, ce qui donne immédiat

$$a^2 = \frac{b}{b'}\frac{rS}{T}, \qquad a'^2 = \frac{b}{b}$$

$$K_1 = \frac{ST}{b} + b'r + 2\sqrt{b'r\frac{ST}{b}} = ($$

$$\frac{K_1}{b'} = \frac{1}{b}\left(\sqrt{\frac{ST}{b'}} + \right.$$

2° Quand on se donne seulement

ordinaire de la pratique, il reste à

deux branches latérales du pont.

Quelle que soit la valeur de b'.

leures valeurs de a et de a' devront

ditions précédentes. Il suffit donc

seule quantité indépendante, et d

minimum le rapport de K_1 à b'.

La dérivée de la fraction $\frac{ST}{b'}$

nulle; il en résulte

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} b'^2 = Rb\,\dfrac{r+b}{R+b} \\[2ex] a'^2 = rR, \end{array}\right.$$

Lorsque les résistances R

port à b, ces valeurs se rédu

port des branches a et a' d

Ce rapport est encore trè

est très grande, ce qui do

$$b'^2 = Rb\,\frac{r}{R}$$

Pour trouver les meilleures conditions de sensibilité, il faut examiner l'expression

$$Ii = I^2 \frac{a'b - ab'}{D} = E^2 \frac{D}{\Delta^2}(a'b - ab'),$$

ou, en remplaçant les quantités D et Δ par leurs valeurs approchées D_0 et Δ_0 relatives à l'équilibre,

$$i = E^2 \frac{a(a+a')(a'b-ab')}{[b(a+a')+r(a+b)][R(a+a')+a'(a+b)]^2}.$$

Il y aurait à chercher comment il faut choisir le fil dans les deux bobines de l'électrodynamomètre pour rendre maximum le produit $GS'Ii$; toutefois, cette discussion ne présenterait pas grand intérêt, la sensibilité étant beaucoup moindre que par l'emploi du galvanomètre.

Il peut être avantageux, au contraire, de laisser le pont ouvert et d'évaluer par un électromètre la différence de potentiel $V - V'$ qui existe entre les points C et D. Le problème direct se résoudrait facilement en supposant le pont ouvert, mais il suffit de remarquer que cette différence de potentiel est la limite du produit ir lorsque la résistance r devient infinie. La relation

$$ir = V - V' = E \frac{r}{\Delta}(a'b - ab')$$

donne, pour une erreur $-\varepsilon$ commise sur la branche b',

$$V - V' = E \frac{ar}{\Delta} \varepsilon.$$

Quand on fait $r = \infty$ et qu'on élimine ensuite la résistance a par la condition d'équilibre, on a

$$\frac{\Delta}{ar} = H = R \frac{a+a'+b+b'}{a} + \frac{(a+b)(a'+b')}{a},$$

$$H = R(b+b')\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{b'}{b} \frac{(a+b)^2}{a}.$$

diagonales … on obtient alors
dérer pour … H.
disposées p…
celle des d…
Les con…
et au galva…

$$\frac{1}{R} \quad \ldots \quad - R\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)\Big]^2.$$

ou, en ten…

(9)

… ssion, il est évident qu
… surtout lorsque les ré
… considérables, parce qu
… it alors très faible.

… méthode de Lord Kelvin
… déterminer directemen
… sur une des branches
… qu'il soit nécessaire d'en
… s le pont (1).
… munie d'un interrupteur
… iée par le passage du cou
… manière que la déviatio
… qu'on ouvre l'interrupteu

Les dif…
deux à d…

Si l'on…
tions de …
que pour…
les équat…

676. Di…
électrody…
condition…
les indic…
de l'inter…
très faib…
dans le…
des rési…
On év…
le circu…
la dévia…
tionnell…

G
R
b'

… branches satisfont à la relati
… sommets C et D du pont s
… est nul dans le fil qui les réu
… action de ce fil ne modifie en r
… es branches latérales.

(1) F. … t. XIX, p. 253; 1871.

Pour apprécier la sensibilité de cette méthode, on peut upposer que le pont est formé par un fil très court, et qu'en baissant ou relevant la clef de l'interrupteur, on fait passer a résistance r de zéro à l'infini. En supposant que l'équilibre st à peu près établi, on remplacera encore le dénominateur Δ par la valeur approchée

$$\Delta_0 = \frac{MN}{a} = N\,\frac{b(a+a')+r(a+b)}{a}.$$

Les courants β_1 et β_2 relatifs aux valeurs extrêmes $r=0$ et $r=\infty$ sont alors, d'après les équations (4),

$$\beta_1 = E\,\frac{a}{N}\cdot\frac{b'}{b},\qquad \beta_2 = E\,\frac{a}{N}\cdot\frac{a'+b'}{a+b}.$$

Si l'on suppose que l'erreur de réglage sur la branche b' soit égale à ε, il en résulte

$$\beta_1-\beta_2 = E\,\frac{a}{N}\,\frac{b'a-ba'}{b(a+b)} = E\,\frac{a}{N}\,\frac{a\varepsilon}{b(a+b)}.$$

En posant $b=b'$ et $a=a'=mb$, il vient

$$\beta_1-\beta_2 = \frac{\varepsilon}{b}\,\frac{E}{2(R+b)+mb+\dfrac{2R+b}{m}}.$$

Le dénominateur est minimum pour $m^2b=2R+b$ et devient alors égal à $2(R+b)+2\sqrt{b(2R+b)}$. La différence des déviations est d'autant plus grande, pour une erreur relative donnée sur b', que la résistance R est plus faible.

678. Résistance d'une pile ; méthode de Mance. — La même disposition donnera la résistance d'un conducteur qui renferme une force électromotrice, comme celle d'un couple ; il suffit d'y permuter la pile et le galvanomètre (¹).

La résistance qui contient la force électromotrice E_b étant placée sur la branche b (fig. 184), on ajuste b' de manière que la déviation du galvanomètre reste constante quand on fait.

(¹) MANCE. *Proceed. of the R. S. L.* t. XIX, p. 248 ; 1871.

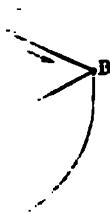
Si la résistance a est seule indéterm alors satisfaite.
pour la valeur minimum H_1 du coeffic les deux bran-
nts de résistance
ence sur le cou-

$$a^2 - b^2 = R\frac{b}{b'}(b -$$

$$H_1 = b'\left(\frac{a+b}{b}\right)^2 = b'\left[1+\sqrt{\right.$$

ence, il suffit de ne

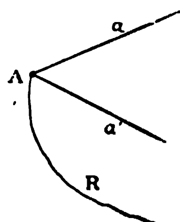
Sans pousser plus loin cette dis
l'emploi de l'électromètre convien
sistances des branches du pont so
le courant dans un galvanomètre



677. Résistance d'un galvanomèt
— La condition d'équilibre perm
la résistance d'un galvanomètre
du parallélogramme (fig. 183), s
ployer un second galvanomètre

Il suffit que la diagonale CD s
L'aiguille du galvanomètre est (6) que la force élec-
rant β; on ajuste la résistance
reste la même quand on ferme

$$= irE_b:$$



$$- E_b\frac{a}{M}.$$

$$= E_b\frac{a(a'b - Rr)}{MN},$$

$$= E_b\frac{a[(a+a'+r)R+aa']}{MN}.$$

branches les direc-
Si les résistances des qu figure. Il n'y a d'ambi-
d'équilibre ordinaire, les branche AD, dont le sens
au même potentiel, le co à la flèche inférieure,
et la suppression ou l'int est nul pour $a'b = Rr$ et
les courants qui parcou $r = 0$ ou $r = \infty$, c'est-à-
la clef d'interruption.
toutes les branches, sauf
interruptions du pont, l'aiguille

(1) Sir W. Thomson, *Proc.*

...de que si les effets d'induction sont né-...s : on devra donc, en général, attendre ...ps après chaque opération.

... expérience quelle est la variation de ... pour obtenir un changement appréciable ...ourant observé.

... courant qui traverse la pile peuvent avoir ...ier la force électromotrice E_b, que nous ...stante.

...de la méthode, quand il s'agit de la résis-...st de ne pas permettre l'emploi de galva-..., à moins qu'on ne les introduise en dériva-...ale R.

...supprime une partie des inconvénients de la ...tance en coupant le circuit du galvanomètre

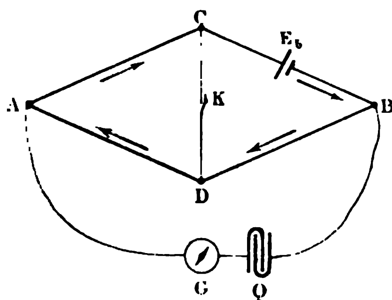


Fig. 185.

...rcaler un condensateur Q (fig. 185). Cette disposi-...t à faire $R = \infty$ et, par suite, $I = 0$.

... la condition d'équilibre du pont est satisfaite, les ...onales sont conjuguées ; les variations de résistance ... d'elles CD sont sans effet sur la différence de ... aux extrémités A et B de la seconde et, par suite, sur ... du condensateur. L'aiguille du galvanomètre doit ...ter au zéro quand on fait fonctionner l'interrupteur ; ...st nécessaire, cette fois, que les effets d'induction ...bsolument éliminés, puisqu'on n'observe pas une dé-... permanente.

...., *Phil. Mag.* (5), t. III, p. 515 ; 1877.

jouer l'interrupteur ; la relation $a'b = ab'$ est alors sat
En effet, c'est seulement dans ce cas que, les deu:
ches r et R étant conjuguées, les changements de rés
de la première ne peuvent avoir aucune influence sur
rant qui traverse la seconde.

Pour discuter plus complètement l'expérience, il suff

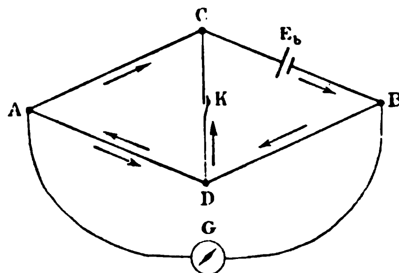


Fig. 184.

conserver dans les formules générales (6) que la forc
tromotrice E_b ; on a alors

$$P = a'E_b, \qquad Q = arE_b ;$$

$$I = E_b \frac{a'}{N}, \qquad i = -E_b \frac{a}{M},$$

$$\alpha = \frac{E_b}{a+a'}\left(\frac{a'^2}{N} + \frac{ar}{M}\right), \qquad \alpha' = E_b \frac{a(a'b - Rr)}{MN},$$

$$\beta = \frac{E_b}{a+a'}\left[\frac{a'^2}{N} + \frac{a(r+a+a')}{M}\right], \qquad \beta' = E_b \frac{a[(a+a'+r)R\text{-}}{MN}$$

Les courants ont dans les différentes branches les
tions indiquées par les flèches de la figure. Il n'y a d'
guité que pour le courant α' de la branche AD, dont le
correspond à la flèche supérieure ou à la flèche inféri
suivant qu'on a $a'b \gtrless Rr$; ce courant est nul pour $a'b =$ l
il change de sens suivant qu'on fait $r = 0$ ou $r = \infty$, c'e
dire quand on ferme ou qu'on ouvre la clef d'interruptio

Le courant étant modifié dans toutes les branches,
celle du galvanomètre, par les interruptions du pont, l'aig

Dans le cas des résistances moyennes, on commence par établir l'équilibre à une unité près, avec des bras égaux et en mettant le shunt du galvanomètre au millième ; puis on multiplie le rapport des bras du pont par 10, 100...., successivement, de manière à faire passer dans le galvanomètre une fraction croissante du courant, jusqu'à ce qu'on utilise tous les cadrans ; enfin, l'équilibre étant presque atteint, on supprime le shunt, et on observe les déplacements δ et δ', de part et d'autre du zéro, pour la correction finale.

Il est important de ne laisser passer le courant que pendant le temps strictement nécessaire à l'observation du galvanomètre, afin d'éviter l'échauffement des fils.

Pour éliminer le défaut d'exactitude du rapport des bras, on peut opérer par substitution. Les résistances b et b_1, introduites successivement entre les bornes C et B, sont proportionnelles aux valeurs x et x_1 de la boîte qui correspondent aux deux équilibres.

On doit s'assurer aussi, surtout avec les instruments très sensibles, que la branche du galvanomètre ne renferme pas de force électromotrice parasite, résultant par exemple d'un effet thermoélectrique, ce qui apporterait un grand trouble dans les mesures ([1]).

Lorsque les forces électromotrices E et e existent seules, les équations générales (10) donnent

$$i = \frac{e(a+a'+b+b') + \mathrm{I}(a'b - ab')}{\mathrm{D}}.$$

Si l'équilibre du pont est à peu près établi, l'intensité I est sensiblement indépendante de la force électromotrice e du conducteur conjugué ; on peut la remplacer par sa valeur approchée (5) et D par D_0, ce qui donne

$$i\frac{\mathrm{M}}{a} = e\left(1 + \frac{b+b'}{a+a'}\right) + \mathrm{E}\,\frac{a'b - ab'}{\mathrm{N}},$$

u, d'une manière très approchée,

$$i\frac{\mathrm{M}}{a} = e\left(1 + \frac{b}{a}\right) + \mathrm{E}\frac{ab}{\mathrm{N}}\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)$$

([1]) R. T. Glazebrook, *Ph. Mag.* [5], t. XI, p. 291; 1881.

Les équations génér

La différence de p
à-dire entre les arm

$V = a'x + b'z$

les valeurs V_1 et
deviennent alors

$V_1 = - E_b$

Pour une erreur

$\frac{V_2 - V_1}{E_b}$ $(b + b$

Si on suppose

Dans le cas act
que le rapport m
potentiel à obser
tive de résistance

679. Cas des liq
renferme un liq
force électromo
équilibrées et
branches b et b

un des sommets C par un fil rectiligne A'B', le long duquel puisse se déplacer un contact mobile C. Au lieu de faire varier l'une des résistances, on établira la balance par une position convenable du point C sur le fil.

Si on appelle l la longueur A'B' du fil supposé homogène et régulier, x la distance A'C, on aura pour condition d'équi-

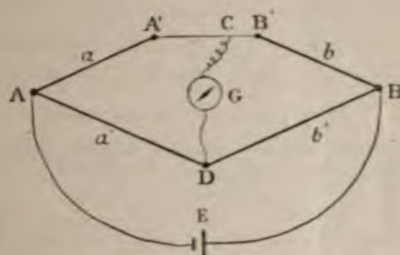


Fig. 186.

libre, en exprimant les résistances a et b des côtés AA' et BB' en unités de longueur du fil,

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a+x}{b+l-x}.$$

Le fil a ordinairement 1 mètre de longueur environ et un diamètre de $1^{mm},5$ à 2 millimètres ; il est en laiton, en maillechort ou mieux en platine iridié, alliage qui présente l'avantage d'être inoxydable et de ne pas s'amalgamer.

Ce fil forme l'un des côtés d'un rectangle allongé (fig. 187) et les trois autres côtés sont constitués par de larges bandes de cuivre dont les résistances peuvent être considérées comme négligeables. Ces bandes présentent en P, Q, P' et Q' des interruptions qui peuvent être fermées, soit par des bandes épaisses de cuivre, soit par des résistances a, b, a', b'. Les deux points A et B sont reliés par la pile, le fil du galvanomètre est attaché en D et au contact mobile C, dont la position se détermine par une règle divisée.

Le contact en C s'opère au moyen d'une espèce de couteau à arête mousse, ordinairement en platine, qui vient s'appliquer perpendiculairement sur le fil. Ce mode de contact serait

Le courant i est nul pour la conditio

$$\frac{b'}{b} - \frac{a'}{a} = \frac{e}{E} \cdot \frac{N}{a}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{e}{E}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\Big[R$$

L'influence de la force électromot rable quand la résistance R de la bra est très grande. En outre, le second change de signe avec E en conserva si donc on renverse le courant de l résistances b' et b'_1 qui annulent le mètre, on aura

$$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} + \delta, \qquad \frac{b'_1}{b} = \frac{a'}{a} -$$

La résistance cherchée est d et b'_1 relatives aux deux sens d

Si, en renversant le couran établie, on en conclut que la f on s'en assurerait également circuit du galvanomètre.

Lorsque, la force électrom pas nulle, la condition $a'b$ déviation de l'aiguille est change pas quand on renv qu'on ferme alternativeme

On peut dès lors, si l'on d'abord le circuit du gal l'aiguille et ajuster ensu déviation ne change pa cette méthode n'est enc duction sont insensible

681. Pont à corde. — convient particulièrem tances et pour la com

Remplaçons dans

(1) R. Kirchhoff, *Pogg.*

on ou altè-
tande alter-
sur la même



entre les points D et C,
mum de sensibilité, pour
étincelles de rupture.
de construction très soi-
ur la reproduction de l'ohm.



en millimètres; elle sert à
communication avec le galvano-
fil flottant. Le contact s'éta-

relevé dans sa position
touche M en ébonite, on
mais on l'abandonne à
uit sur le fil une pression
ale de l'opérateur. Ce cou-
glisse le long de la règle,
pression et déplacer légère-
un vernier tracé sur le cha-
n de l'échelle. Les fils P et P′
errupteur, les fils G et G′ vont

sont représentées sur la figure
une bobine B renfermée dans un
roduites dans le circuit au moyen
s sur les bandes latérales et conte-
ainsi les substituer l'une à l'autre
stances a' et b' sont aussi enfermées
C; les prises de contact se font dans
un commutateur O permet de permuter
déplacer.
habituelle des ponts à corde, les barres
nt de jonction ont une résistance négli-
orts des résistances à comparer doivent
pour que la différence puisse être com-
portions du fil. Comme ces résistances sont
ordre d'un ohm, un galvanomètre à grande
ouverait, pour ainsi dire, fermé en court cir-
is d'employer un galvanomètre de faible ré-
isant aux conditions du n° 675.
ition des expériences. — Si les interruptions P
sont fermées elles-mêmes par des pièces de résis-
able, l'équation d'équilibre se réduit à

$$\frac{b'}{a'} = \frac{l-x}{x}.$$

nd membre de cette équation étant susceptible de
outes les valeurs positives, on peut comparer par ce
es résistances quelconques; mais il est facile de voir
nsibilité diminue à mesure que le point d'équilibre

[illegible] l'autre des extrémités du fil. En appe-
[illegible] contact qui correspond à une varia-

$$[illegible] \frac{\delta r}{[illegible]} = \frac{l}{x(l-x)}\, \delta x.$$

[illegible] sensibilité absolue ou relative est
[illegible] et nulle aux extrémités.
[illegible] électriques sont particulièrement à
[illegible] ie, et on doit éviter de toucher avec
[illegible] es métalliques de l'appareil.
[illegible] encore deux manières d'opérer, soit
[illegible] comparaison des rapports.
[illegible] tion est la plus exacte et elle n'exige
[illegible] résistances auxiliaires. On place suc-
[illegible] les deux résistances à comparer b
[illegible] positions x et x_1 du curseur qui cor-
[illegible], on a alors

[illegible]

[illegible] le rapport des résistances b et a, il
[illegible] les nouvelles lectures correspondantes
[illegible] ent alors

[illegible]

[illegible] est plus grande que la longueur
[illegible] série d'expériences avec
[illegible] telles que les dif-
[illegible] d'entre elles soient mesurables
[illegible] première avec b et de la

dernière avec b_1, et on aura

$$b - b_1 = (b - r_1) + (r_1 - r_2) + \ldots + (r_n - b_1).$$

Pour la comparaison des rapports, il est nécessaire de connaître les valeurs de a et de b en fonction de l'unité de longueur du fil, dont elles forment pour ainsi dire le prolongement. Comptons d'abord ces résistances respectivement depuis les points A et B jusqu'aux positions extrêmes des contacts aux bouts correspondants du fil. On introduit en P′ et Q′ des résistances a' et b' dont le rapport p est connu et on observe la position d'équilibre x du contact, puis la position x' après inversion des résistances a' et b'. On a alors

$$\frac{a'}{b'} = p = \frac{a + x}{b + l - x} = \frac{b + l - x'}{a + x'};$$

$$a = \frac{px' - x}{1 - p}, \qquad b = \frac{p(l - x) - (l - x')}{1 - p}.$$

Si le rapport p est égal à l'unité, il en résulte $x = x'$ et l'expérience donne seulement la différence

$$a - b = l - 2x.$$

En fermant les intervalles P et Q par des pièces de cuivre sans résistance, on déterminera ainsi les résistances α et β des bouts AA′ et BB′ comptés jusqu'à la position du contact aux divisions extrêmes.

Les résistances a et b, y compris les compléments α et β, étant connues, les résistances à comparer a' et b' seront intercalées en P′ et Q′; il est encore avantageux de permuter ces résistances, ce qui donne deux lectures x et x', et on a

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + x}{b + l - x} = \frac{b + l - x'}{a + x'} = \frac{a + b + l + (x - x')}{a + b + l - (x - x')}.$$

Si ce rapport est voisin de l'unité, auquel cas on n'utilise qu'une portion $(x - x')$ très petite du fil, on peut écrire

$$\frac{a'}{b'} = 1 + 2\,\frac{x - x'}{a + b + l}, \qquad \frac{a' - b'}{b'} = 2\,\frac{x - x'}{a + b + l}.$$

La différence $a' - b'$ est proportionnelle à l'écart des deux positions x et x'; en outre, pour une même valeur de cette différence, l'écart $x - x'$ est d'autant plus grand que les résistances auxiliaires a et b sont elles-mêmes plus grandes.

On met cette remarque à profit pour la reproduction des étalons de résistance. On prépare une série de résistances a et b, a_1 et b_1, a_2 et b_2, égales deux à deux, afin de maintenir les lectures dans le milieu du fil, et dont les valeurs sont de dix en dix fois plus grandes environ. La résistance b' étant l'étalon, on ajuste la copie a', avec les résistances b', à une division près de l'échelle. On remplace a et b par a_1 et b_1 et on ajuste de nouveau a', à une division près, et ainsi de suite autant que le permet la sensibilité du galvanomètre. Si l'ajustement est fait à une division près, avec les bobines de l'ordre a_n, l'erreur de la copie est $\pm \frac{2}{2a_n + l}$.

Cette méthode de comparaison, appliquée à des résistances qui ne sont pas très petites, permet aisément d'atteindre une approximation inférieure à 0,00001, ce qui correspond pour un fil de cuivre, par exemple, à une variation de température de $\frac{1}{400}$ de degré centigrade.

Quand les résistances à comparer sont trop différentes, on emploie encore une série de résistances intermédiaires $r_1, r_2, \ldots r_n$, dont les rapports successifs et ceux des extrêmes avec a' et b' sont directement mesurables; on a alors

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a'}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdots \frac{r_n}{b'}.$$

Pour des résistances très inégales, il sera quelquefois avantageux de choisir les résistances auxiliaires de telle sorte que, disposées en série, elles soient à peu près égales à a', et qu'en fils parallèles leur conductance soit voisine de celle de b'. En désignant par p et q des rapports ainsi déterminés, le rapport des résistances a' et b' se déduira des équations

$$a' = (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)p,$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = \frac{1}{b'q}.$$

Lorsque les résistances auxiliaires $r_1, r_2, \dots r_n$ ont la même valeur r, les équations se réduisent à

$$a' = nrp, \qquad nb'q = r; \qquad \frac{a'}{b'} = n^2 pq.$$

Si ces résistances, sans être égales, sont très voisines de leur valeur moyenne r, chacune d'elles peut s'écrire $r(1+\beta)$; le résultat final n'est pas changé quand les quantités de l'ordre de β^2 sont négligeables, auquel cas il n'est pas nécessaire de déterminer ces corrections.

683. Calibrage du fil. — L'exactitude des méthodes précédentes suppose la parfaite homogénéité du fil, sinon dans toute sa longueur, au moins dans la partie utilisée pour les lectures. Cette condition est ordinairement réalisée quand le fil a été préparé avec de bons alliages et étiré avec soin, mais il est nécessaire de la contrôler par un calibrage.

Une première méthode consiste à reproduire identiquement les opérations employées pour le calibrage d'un tube thermométrique, comme nous l'avons indiqué (**656**) à propos de la construction de l'étalon. On prend une résistance auxiliaire qui soit, par exemple, équivalente à la n^e partie du fil, et on la mesure par substitution, en choisissant les résistances latérales de manière à utiliser successivement les n parties du fil. On fait ensuite la même opération avec une résistance auxiliaire qui soit double, triple, etc., de la première, de façon que les portions de fil utilisées soient toujours limitées au voisinage des points principaux du calibrage.

La disposition suivante rendra ces opérations plus faciles. On remplacera les résistances a' et b' par un fil auxiliaire A_1B_1 (fig. 189) semblable au premier. Les intervalles P' et Q' restant ouverts, les intervalles P et Q sont fermés, l'un par une plaque de cuivre sans résistance appréciable, l'autre par une résistance auxiliaire f équivalente à la n^e partie du fil A'B'. Enfin les attaches du galvanomètre se font en des points variables, l'une en D_1 et l'autre en C.

Le contact D_1 étant en un point quelconque du fil A_1B_1, appelons a_1 et b_1 les deux résistances AA_1D_1 et BB_1D_1, x et x' les lectures faites sur le fil A'B' quand on intercale successivement la résistance f en P et en Q, l la longueur totale de

...s les branches terminales. On a

$$\frac{x}{x} = \frac{x'}{f+l-x'}, \qquad \text{d'où} \qquad f = x' - x.$$

... ...geant la position du point D_1 sur le second ... mesurer la résistance f successivement par les p... ... du fil comprises entre les points principa...

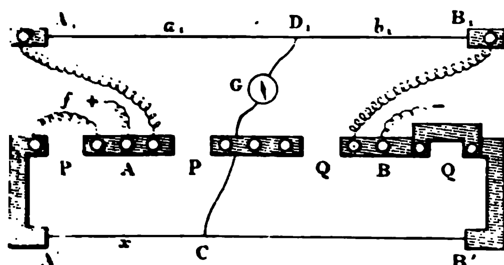
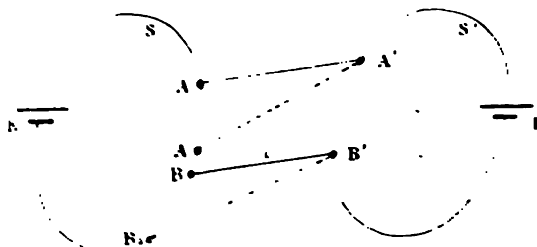


Fig. 189.

...age. Une série d'opérations semblables avec des ... auxiliaires différentes permettra de déterminer ... relative à chaque division x.

... méthode suivante repose sur une idée due à Von ... Considérons deux circuits S et S' (fig. 190)



F...

... forces électromotrices E et E' ; deux points A ... étant ... respectivement aux deux p...

et B du second, soit i l'intensité du courant dans un des fils auxiliaires BB'.

Si on déplace les points A et B en A_1 et B_1 de façon que la résistance B_1A_1 reste égale à AB, l'intensité i ne change pas et la résistance de la portion AA_1 est la même que celle de BB_1. En particulier, si le point A_1 est venu au point B, les résistances AB et BB_1 sont égales ; de là un procédé qui permet de diviser une résistance donnée en deux parties égales.

Soit PQ le fil à calibrer (fig. 191), AB la portion que l'on veut

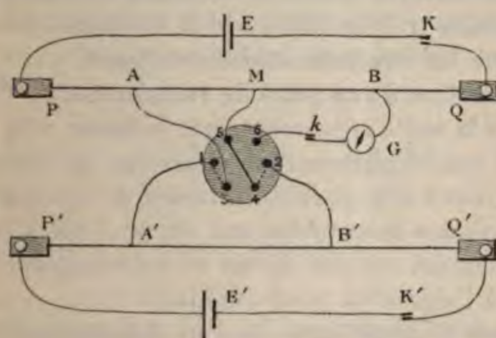


Fig. 191.

diviser en deux parties égales au point M, A' et B' deux points d'un fil quelconque P' Q'. Désignons par les nos 1, 2, 3, 4, 5 et 6 les godets d'un commutateur à bascule ([1]), dont les communications avec les différentes parties des deux fils sont indiquées par la figure, les godets 1 et 2 servant d'axe pour la rotation de l'équipage mobile.

Quand on le fait basculer d'un côté ou de l'autre, on réunit les godets 1 et 3, 2 et 4, ou 1 et 5, 2 et 6 ; dans le premier cas, les communications des deux circuits sont AA' et MB' ; dans le second, MA' et BB', la dernière des deux combinaisons renfermant toujours le fil du galvanomètre.

La bascule étant dans la première position, on déplace le contact B' de manière que le courant soit très faible dans le galvanomètre et on déplace le contact M jusqu'à ce que le jeu

([1]) Cette bascule est une modification légère du *gyrotrope de Pohl* (Katsner's Archiv., t. XIII, p. 49 ; 1828), dont l'emploi comme *inverseur de courant* est des plus commodes et des plus sûrs (fig. 192).

Les six godets A, B, A', B', P et N sont remplis de mercure et communiquent

alternatif de la bascule laisse l'aiguille du galvanomètre immobile ; les résistances AM et MB sont alors égales.

Les communications sont établies par des fils fins fixés aux godets et munis, à leurs extrémités libres, de petits poids destinés à tendre les fils que l'on pose simplement en A et B.

Des clefs d'interruption K, K' et *k* permettent de n'établir les courants dans les deux circuits principaux, puis dans le galvanomètre, qu'au moment des observations.

On peut d'ailleurs laisser le courant passer dans les deux circuits d'une manière continue, l'échauffement des fils n'ayant pas d'influence sur l'exactitude de la méthode. La seule condition est que les courants soient constants.

684. Vérification d'une boîte de résistances. — Nous avons vu que, dans la boîte représentée par la figure 177, les cavités des plaques qui constituent la couronne de chaque cadran permettent, avec des chevilles munies de serre-fils, d'isoler toutes les bobines intermédiaires. On peut alors prendre ces bobines isolément ou par séries et les comparer à d'autres résistances à l'aide d'un pont auxiliaire.

On compare d'abord entre elles les différentes bobines d'un même cadran, une à une, deux à deux, etc., ce qui fournit un

avec les serre-fils correspondants. Les godets AA', BB' sont réunis en croix p[ar] deux gros fils de cuivre isolés ; les deux godets P et N servent d'axe à la bascu[le]

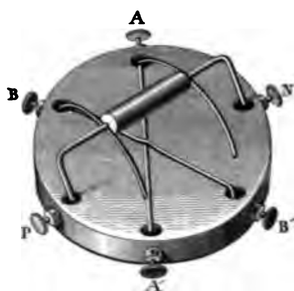


Fig. 192.

proprement dite, laquelle se compose de deux arcs conducteurs isolés l'un [de] l'autre et communiquant respectivement avec les godets P et N.

Les extrémités de la pile étant attachées en P et en N, le bouton B est posi[tif] pour la position de la bascule indiquée sur la figure, et négatif si on renverse l['é]quipage de manière que les extrémités des arcs plongent dans les godets A' et [B']. Pour l'expérience qui précède, on a supprimé un des fils en croix.

grand nombre d'équations de condition. Une unité supplémentaire, par exemple celle qui se trouve à l'intérieur de la boîte en vv', permet ensuite de constituer avec le premier cadran dix unités que l'on compare avec les dizaines. Ces deux cadrans et l'unité supplémentaire forment aussi 100 unités qui serviront à comparer les centaines, et on opérera de même pour les bobines de 1000 unités.

Il faut avoir soin, quand on compare deux systèmes de bobines b et b', de déterminer la résistance des fils de communication β et β'. Comme les résistances b et b' sont presque égales et les valeurs de β et β' très faibles, on peut écrire, en désignant par p le rapport obtenu directement, lequel est très voisin de l'unité,

$$p = \frac{b+\beta}{b'+\beta'} = \frac{b}{b'}\left(1 + \frac{\beta-\beta'}{b}\right),$$

$$\frac{b}{b'} = p\left(1 + \frac{\beta'-\beta}{b}\right) = p + \frac{\beta'-\beta}{b}.$$

Cette précaution est surtout importante quand il s'agit de la comparaison des unités. On construit alors une table des valeurs des bobines en fonction de l'une d'entre elles ou de leur valeur moyenne.

685. Pont double de Lord Kelvin. — Cette combinaison in-

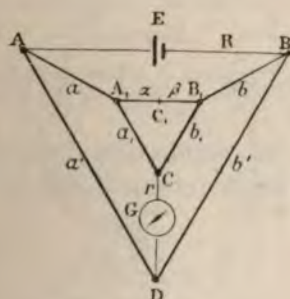


Fig. 193.

génieuse des résistances se rapproche du pont à corde en ce que l'équilibre s'établit au moyen de contacts glissants. L'appareil (fig. 193) comprend neuf conducteurs qui peuvent être

considérés comme formant les neuf arêtes d'une pyramide triangulaire tronquée. Le galvanomètre étant intercalé dans la branche CD, le courant est nul quand les deux points C et D sont situés sur une même surface de niveau électrique; cette surface coupe la branche A_1B_1, de résistance γ, en un certain point C_1, qui se trouve ainsi au potentiel commun des points C et D, et partage ce conducteur en deux parties dont les résistances respectives sont α et β.

Lorsque l'équilibre est établi, les résistances a_1 et α, b_1 et β, comptées des points A_1 et B_1 jusqu'à la surface de niveau CC_1, sont respectivement proportionnelles; on a donc

$$\frac{a_1}{\alpha} = \frac{b_1}{\beta} = \frac{a_1 + b_1}{\gamma}.$$

La constitution du réseau fournit ainsi une méthode indirecte pour déterminer le rapport des résistances α et β, par le rapport des résistances a_1 et b_1 relatives à un conducteur auxiliaire A_1CB_1 de dimensions très différentes.

La même règle appliquée aux résistances comptées à partir des sommets A et B, jusqu'à la même surface de niveau C_1CD, donne aussi

$$(10) \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{a + \dfrac{1}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{\alpha}}}{b + \dfrac{1}{\dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{\beta}}} = \frac{a + \dfrac{a_1}{1 + \dfrac{a_1}{\alpha}}}{b + \dfrac{b_1}{1 + \dfrac{b_1}{\beta}}} = \frac{a + \dfrac{a_1}{1 + \dfrac{a_1 + b_1}{\gamma}}}{b + \dfrac{b_1}{1 + \dfrac{a_1 + b_1}{\gamma}}}.$$

En particulier, si la somme des deux résistances a_1 et b_1 est constante, et qu'on la prenne égale à γ, l'équation se réduit simplement à

$$(11) \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{2a + a_1}{2b + b_1}.$$

Considérons les neuf branches disposées comme dans la figure 194 : a' et b' sont les deux résistances à comparer, AB et PQ deux fils cylindriques et homogènes; l'extrémité C du fil du galvanomètre peut glisser le long de PQ; deux contacts

A_1 et B_1 isolés l'un de l'autre, mais maintenus à une distance constante, et communiquant respectivement avec les deux extrémités de PQ, peuvent se déplacer le long du fil AB. Le curseur A_1B_1, à contact double, est placé d'abord dans une

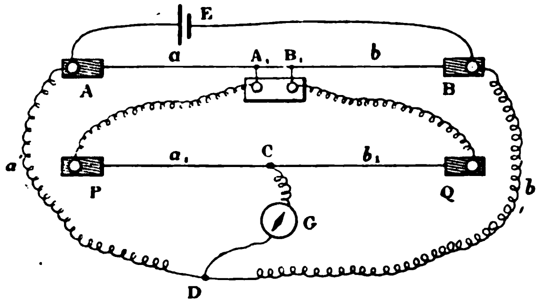


Fig. 194.

position telle que l'aiguille du galvanomètre soit à peu près au zéro, et on achève le réglage en déplaçant le point C. La formule (10) donne le rapport des deux résistances a' et b' et elle se réduit à la formule (11) si la résistance γ de la portion du fil AB comprise entre les contacts A_1 et B_1 est égale à la résistance totale du fil PQ.

Cette disposition a été réalisée par Lord Kelvin et Varley

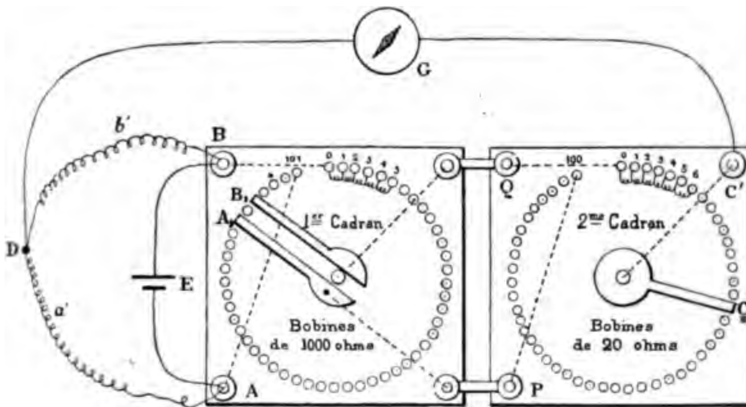


Fig. 195.

sous la forme représentée par la figure 195. Chacun des fils AB et PQ est remplacé par une série de bobines égales entre

considérés comme form ... drans désignés par les
triangulaire tronquée. ... rmée de 101 bobines
la branche CD, le ... unes de 20 ohms. Les
et D sont situés sur ... relient les bobines suc-
cette surface coupe la ... manivelles. Les deux
certain point C_1, qui ... entre eux deux bobines de
points C et D, et parta... résistance égale à celle des
les résistances respe...

Lorsque l'équilibre ... tant sur le premier con-
comptées des points ... premier cadran jusqu'à ce
sont respectivement ... suffisante, à moins d'une
... bre. Agissant ensuite sur
... on cherche encore, à moins
... le contact qui donne l'équi-

La constitution ... N bobine du premier cadran
directe pour dét... cond, on a
le rapport des ...
auxiliaire A_1CB. ... (101 — N — 2) 1 000,
La même ré... (100 — n) 20;
des sommets A
donne aussi ... $\frac{(100 - n) 10}{} = \frac{10\,000}{100N + n} - 1.$

(10) $\frac{a'}{b'}$ ... est voisin de l'unité, le nombre
... erreur d'une unité sur n n'entraîne
... le rapport des résistances. L'exac-
... se rapproche des extrémités du
... observant les déviations du galvano-
En parti... n et $n+1$ qui comprennent la
est constant ... obtiendra encore, par une proportion
duit simpl... plus exacte.
... très faibles [1]. — La méthode du
(11) ... particulièrement à la mesure des résis-

Cons... de comparer les résistances a et b
figure ... première entre les points A et A_1, la
et PQ ...
fil du g...

... t. XXIV, p. 149; 1862.

entre les points B et B_1 de deux conducteurs réunis troisième c; les résistances a', b', a_1 et b_1 sont très On déplace les contacts C et D du galvanomètre deux circuits jusqu'à ce que le courant soit nul. En

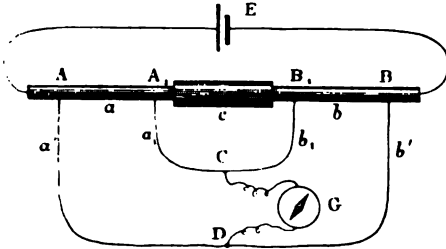


Fig. 196.

γ la résistance intermédiaire A_1B_1, le rapport des es a' et b' est donné par l'équation (10).

e résistance γ est très petite par rapport à la somme on peut écrire

$$= \frac{a + a_1 \dfrac{\gamma}{a_1 + b_1}}{b + b_1 \dfrac{\gamma}{a_1 + b_1}} = \frac{a}{b}\left[1 + \left(\frac{a_1}{a} - \frac{b_1}{b}\right) \frac{\gamma}{a_1 + b_1}\right].$$

e la différence $\frac{a_1}{a} - \frac{b_1}{b}$ est très voisine de zéro, on voit ésistances a et b, a' et b', sont très sensiblement dans orts d'un pont équilibré.

pas tenu compte des résistances dues aux contacts A_1 et B_1, mais l'erreur est négligeable si on a choisi ances auxiliaires a', b', a_1 et b_1 assez grandes.

1 et Matthiessen (1) ont employé la disposition sui- ui élimine plus complètement cette cause d'erreur. g. 197) sont des résistances connues formées par des qu'on peut à volonté porter d'un côté sur l'autre, sans somme soit changée; PQ est le fil d'un pont à corde. acts sont pris sur chacun des conducteurs au moyen

(1) ...ll., *Electr. and Magnet.*, t. I, p. 444.

pointes ou de deux couteaux montés sur une l
à une distance constante et mesurée exactement. (
des pointes communique avec un petit godet à merc

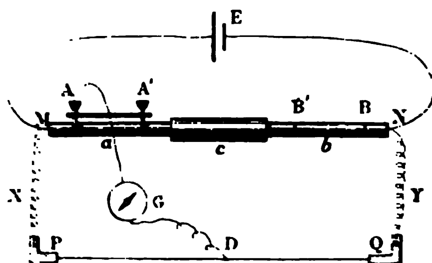


Fig. 197.

dans lequel on plonge l'un des fils du galvanomètre l'autre extrémité est en D.

On règle les résistances X et Y et la position du point manière que l'aiguille du galvanomètre reste au zéro. A lons α la résistance MA, S la résistance totale de M en N résistance du fil PQ, x celle de PD et T la somme X + l. Si on prend le contact successivement en A et A', les va X et X', x et x' relatives aux deux équilibres donnent

$$\frac{S}{T} = \frac{\alpha}{X + x} = \frac{\alpha - a}{X' + x'} = \frac{a}{X - X' + x - x'}.$$

On aura, de même, en appelant X_1 et X'_1, x_1 et x'_1 les valeurs relatives aux contacts en B et B',

$$\frac{S}{T} = \frac{a}{X_1 - X'_1 + x_1 - x'_1};$$

il en résulte

$$\frac{X - X' + x - x'}{X_1 - X'_1 + x_1 - x'_1}.$$

Les résistances des points de contact, n'agissant qu sur la branche du galvanomètre, n'interviennent pas dar équations d'équilibre, la seule condition à remplir est q résistances S et T restent invariables.

687. Balance d'induction. — Les courants induits dans un conducteur sont, toutes choses égales, en raison inverse de sa résistance et on a déjà utilisé cette propriété (669) pour comparer les résistances par la mesure des décharges induites. On peut rapprocher du pont de Wheatstone la disposition suivante, qui consiste à équilibrer les effets d'induction de deux circuits différents.

Supposons qu'on intercale dans un circuit qui renferme une force électromotrice variable E (fig. 198) deux bobines



Fig. 198.

égales A et A' séparées par une distance assez grande pour que leur induction mutuelle soit négligeable.

Au-dessus d'elles on place, à la même distance et respectivement suivant le même axe, deux autres bobines égales a et a', de manière que les coefficients d'induction mutuelle soient les mêmes pour les deux systèmes.

Lorsque les bobines induites a et a' ont la même induction propre et qu'on ferme respectivement leurs circuits par des fils de résistances égales R et R', dont les coefficients de self-induction sont égaux ou négligeables, les courants induits de part et d'autre par une variation quelconque de la force électromotrice sont égaux à chaque instant. L'addition de deux résistances égales r et r', sans coefficient de self-induction ou ayant des coefficients égaux, ne trouble pas l'égalité, de sorte que si l'on joint séparément les bobines induites aux deux cadres d'un galvanomètre *différentiel* parfaitement équilibré, l'aiguille doit rester immobile.

Le galvanomètre ne mesurant que les quantités totales d'électricité, il suffit pour l'équilibre que la décharge ou la valeur intégrale des deux courants induits soit la même, et approximativement aussi leur durée, pourvu que cette durée

reste très courte par rapport à la période d'oscillation de l'ai guille. Cette condition n'exige pas la symétrie complète de deux systèmes, mais seulement l'égalité des résistances et des coefficients d'induction mutuelle, quels que soient d'ailleurs les coefficients de self-induction.

Le galvanomètre ne peut plus servir si le courant inducteur, au lieu des variations brusques de sens déterminé que donne la rupture ou la fermeture du circuit, éprouve des variations se succédant rapidement en sens contraires, comme celles que produirait un interrupteur vibrant ou un microphone placé dans le circuit de la pile, ou encore un électromoteur à courants alternatifs. Dans ce cas, il faut avoir recours à un instrument, tel que le téléphone, sensible seulement au variations instantanées du courant. Un téléphone *différentiel* par exemple, restera silencieux si les courants sont égaux chaque instant, ce qui exige en outre que les coefficients d self-induction des deux systèmes soient égaux (505).

Il est du reste indifférent que le téléphone différentiel so actionné par les courants induits dans les bobines *a* et *a'* o par deux dérivations du circuit inducteur traversant respecti vement les deux bobines A et A' ([1]).

C'est sur ce principe de l'équilibre de deux circuits qu repose la disposition employée par M. Hughes ([2]), sous l nom de *balance d'induction*, pour comparer les propriété électriques et, en particulier, la résistance de corps qui s présentent sous une forme quelconque.

On place un téléphone T (fig. 199) dans le circuit des deu bobines induites *a* et *a'*, réunies de manière que leurs cou rants soient de sens contraires. Quand les coefficients d'induc tion mutuelle ont la même valeur, la balance est établie et l téléphone reste silencieux. L'introduction d'un conducteu quelconque C entre les bobines A et *a* forme un écran partie qui détruit l'équilibre et fait reparaître le bruit.

Soient L, R, I pour le circuit inducteur; l, r, i pour le cir cuit induit; λ, ρ, γ pour le conducteur, ou plus exactemen pour un anneau qui lui serait équivalent, le coefficient d self-induction, la résistance et l'intensité du courant à l'époqu

([1]) CHRYSTAL, *Ph. Tr. R. S. E.*, t. XXIX, p. 609; 1880.
([2]) HUGHES, *Phil. Mag.* [5], t. II, p. 50; 1879.

quelconque t; M et m les coefficients d'induction mutuelle du conducteur vis-à-vis des bobines A et a. En tenant compte de l'équilibre primitif, les équations des courants sont

$$(12)\quad \begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + M\dfrac{d\gamma}{dt} + RI = E, \\ l\dfrac{di}{dt} + m\dfrac{d\gamma}{dt} + ri = 0, \\ \lambda\dfrac{d\gamma}{dt} + M\dfrac{dI}{dt} + m\dfrac{di}{dt} + \rho\gamma = 0. \end{cases}$$

Si on diminue alors d'une quantité M_0, le coefficient d'in-

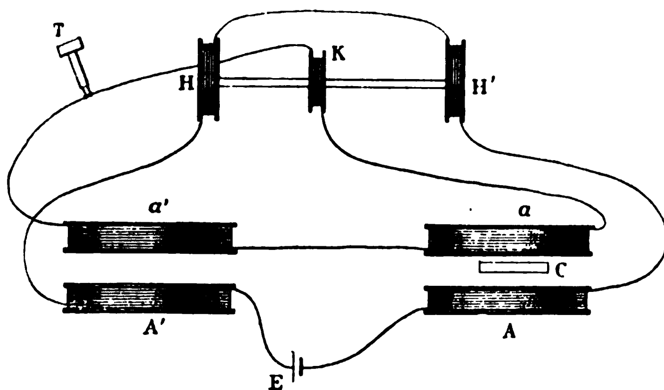


Fig. 199.

duction mutuelle des bobines A' et a', par exemple en les éloignant, les deux premières équations deviennent

$$L\frac{dI}{dt} - M_0\frac{di}{dt} + M\frac{d\gamma}{dt} + RI = E,$$

$$l\frac{di}{dt} - M_0\frac{dI}{dt} + m\frac{d\gamma}{dt} + ri = 0.$$

Pour que le courant soit toujours nul dans le fil induit, il faut qu'on ait $M_0 dI = m d\gamma$; les variations simultanées étant proportionnelles, les deux courants doivent avoir la même période et la même phase. Cette condition n'est pas réalisable en général et, sans éteindre le son dans le téléphone, on ne peut obtenir ainsi qu'un minimum de bruit.

Au lieu de modifier la position relative des bobines principales, ce qui donnerait lieu à des changements trop brusques, M. Hughes a trouvé plus commode d'avoir recours à un appareil auxiliaire qu'il appelle *sonomètre*.

Cet appareil se compose de deux bobines identiques H et H', fixées aux extrémités d'une règle horizontale, entre lesquelles peut se déplacer parallèlement à elle-même une bobine K; les premières sont intercalées dans le circuit inducteur et la bobine mobile dans le circuit induit. Les inductions des bobines H et H' sur K étant de signes contraires, l'effet est nul quand celle-ci occupe exactement le milieu de la règle; l'induction augmente sur l'un ou l'autre des deux systèmes suivant qu'on déplace la bobine K à droite ou à gauche. La position qui dans chaque cas ramène le silence fournit une mesure arbitraire de l'effet produit par le conducteur.

Une autre méthode de mesure consiste à modifier seulement la balance par l'introduction d'un conducteur entre les bobines A' et a'. M. Hughes y fait glisser une lame de zinc taillée en forme de coin très aigu; une division permet d'évaluer l'épaisseur de la lame qui rétablit le silence et équilibre l'effet produit par le conducteur C.

On peut encore introduire dans le système A'a' un petit disque ou un anneau de cuivre, mobile autour d'un axe horizontal. L'action est nulle quand le plan du disque est normal à celui des bobines et maximum pour la position parallèle.

On conçoit que cette disposition puisse compenser mieux que le sonomètre l'action d'une plaque métallique, parce qu'elle donne lieu à un phénomène de même nature. En désignant par des lettres accentuées les quantités relatives au nouveau conducteur C', les équations (12) doivent être remplacées par les suivantes :

$$L\frac{dI}{dt}+M\frac{d\gamma}{dt}+M'\frac{d\gamma'}{dt}+RI=E,$$

$$l\frac{di}{dt}+m\frac{d\gamma}{dt}-m'\frac{d\gamma'}{dt}+ri=0,$$

$$\lambda\frac{d\gamma}{dt}+M\frac{dI}{dt}+m\frac{di}{dt}+\rho\gamma=0,$$

$$\lambda'\frac{d\gamma'}{dt}+M'\frac{dI}{dt}-m'\frac{di}{dt}+\rho'\gamma'=0.$$

Pour que le téléphone reste absolument silencieux, il faut qu'on ait $m\,d\gamma = m'\,d\gamma'$ et, par suite, pour des courants alternatifs, $m\gamma = m'\gamma'$. Les dernières équations donnent alors

$$\left(M'\lambda - M\lambda' \frac{m}{m'}\right)\frac{d\gamma}{dt} + \left(M'\rho - M\rho' \frac{m}{m'}\right)\gamma = 0.$$

Comme cette relation doit être satisfaite à toute époque, il en résulte

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{Mm}{M'm'}.$$

La balance d'induction associée au téléphone est un appareil d'une sensibilité extrême. Elle met en évidence les plus petites différences entre le poids, la nature, le degré de pureté ou la température de deux conducteurs de mêmes dimensions, telles que deux pièces de monnaie, placées dans des conditions identiques par rapport aux deux systèmes de bobines.

Elle permet de déceler dans un corps mauvais conducteur la présence de masses métalliques très petites [1] et peut être employée avec beaucoup d'avantages pour vérifier l'isolation des différentes spires d'une bobine, dont on laisse les extrémités ouvertes [2], etc. C'est donc un instrument très précieux pour les recherches qualitatives, mais qui se prête moins bien aux mesures : on n'obtient pas, en général, l'extinction complète du bruit et, quelles que soient les corrections, il est difficile d'interpréter l'expérience d'une manière rigoureuse.

RÉSULTATS GÉNÉRAUX.

688. Métaux et alliages. — D'après la valeur adoptée pour l'ohm international (**421**), la conductivité du *mercure* est égale à $1{,}063 \cdot 10^{-5}$. Pour l'*argent* et le *cuivre* recuits, qui sont les meilleurs conducteurs de l'électricité, on aurait respectivement $67{,}23 \cdot 10^{-5}$ et $63{,}32 \cdot 10^{-5}$, mais les moindres traces d'impuretés ou d'oxydes en dissolution dans le métal suffisent pour augmenter beaucoup leur résistance.

(1) Graham Bell, *American Journ. of sciences*. Août 1882.

(2) Lord Rayleigh and Mrs Sidgwich, *Ph. Tr. R. S. L.*, p. 411; 1884.

Au lieu de modifier la posit... ...ue avec la température e...
pales, ce qui donnerait lieu à...
M. Hughes a trouvé plus co... $-\gamma t^3 + \dots$).
reil auxiliaire qu'il appelle...

Cet appareil se compose ... ...mpris entre 0,0035 et 0,00...
fixées aux extrémités d'un... ...e : il est donc très voisin d...
peut se déplacer parallèl... ...de sorte que la résistanc...
les premières sont inter... ...à la température absolue.
bobine mobile dans le ... ...e a, sans doute, une raiso...
bines H et H' sur K étan... ...de mettre en évidence ; no...
quand celle-ci occupe ... ...omment la considération d...
duction augmente sur l'... ...pourrait y conduire.
qu'on déplace la bobi... ...re de 10^{-6} et peut être néglig...
qui dans chaque cas ... ...γ serait de l'ordre de 10^{-9}.
arbitraire de l'effet pr... ...ueus (¹), les formules paraboliqu...

Une autre méthode ... ...passe beaucoup 100° ; en foncti...
la balance par l'introd... ...et de la résistance R_0 à 0° cen...
A' et a'. M. Hughes ... ...atine, du *fer* et du *cuivre* se r...
forme de coin très ... ...pression de la forme

seur de la lame qui ... $\sqrt{T} + \beta T - 1$).
duit par le condu...

On peut encore ... ...e à deux termes parait encore suf...
que ou un anneau ... ...res de 100° et de −123°. MM. Ca...
tal. L'action est ... ...si trouvé que pour le *mercure*, do...
celui des bobines ... ...on entre −35° et 20° est voisin ...

On conçoit qu... ...e devient 4,08 fois plus grande p...
que le sonomè... ...et que le coefficient reprend la vale...
qu'elle donne la ... ...des autres métaux.
signant par des ... ...(²) ont étendu leurs mesures ent...
nouveau condu... ...de l'oxygène dans le vide). La t...
placées par l... ...résultats, en prenant les résistanc...
...températures comme abscisses, sem...
...tend à devenir nulle pour la tem...
...Ces courbes sont sensiblement rect...
...et presque tous les alliages : elles s...

...t. I, p. 123 ; 1872 et t. III, p. 296, 1874.
...t. C., p. 1188 ; 1885.
...t. XXXIV, p. 526 ; 1892 et t. XX...
...t. X, p. ... ; 1895.

…ement concaves vers les ordonnées pour le *fer*, le *nickel* … *cuivre*, convexes pour le *platine*, l'*or*, le *palladium* et … *gent*. Le changement des propriétés du *mercure* ne se fait … d'une manière brusque au moment de la solidification. … 36 à — 42°, la résistivité apparente dans le verre passe … 89600 à 30770, devenant 2,912 fois moindre.

Tous les métaux présentent des modifications analogues … le changement d'état. M. Vassura (¹) a trouvé ainsi qu'à … température de solidification le rapport des résistances à l'état liquide et à l'état solide est, pour les métaux suivants,

Étain.	Bismuth.	Thallium.	Cadmium.	Plomb.
2,20	0,45	2	1,97	2,93

D'après M. Kohlrausch (²), la résistance du *fer* croît d'abord lentement avec la température, puis d'une manière plus rapide que pour les autres métaux, jusqu'au point où ses propriétés magnétiques disparaissent; la courbe des résistances s'infléchit alors et la variation redevient lente, comme au début. Il en serait de même pour la *fonte* et le *fer électrolytique*.

Ces résultats ont été précisés par M. Le Chatelier (³). La modification du *fer*, qui se produit à 850°, est indépendante des proportions de carbone, silicium, etc., qu'il peut contenir. Le point critique du *nickel* est à 340°. Pour l'*acier*, les coudes de la courbe figurative de la résistance traduisent le point de récalescence (730°), c'est-à-dire de transformation du carbure de fer, et le point critique (850°) du fer.

La résistivité des *alliages* est quelquefois voisine de celle qu'on pourrait déduire de leur composition; tels sont les alliages dans lesquels entrent seulement certains métaux, le *plomb*, l'*étain*, le *zinc*, le *cadmium*. Généralement elle est beaucoup plus grande et même supérieure à celle de chacun des métaux qui les constituent; ce dernier cas se présente pour les alliages de l'*argent* et du *cuivre* entre eux ou avec l'*or*, le *platine*, le *nickel*, etc.

La propriété particulière des alliages est qu'ils sont beaucoup moins sensibles aux variations de température. Ainsi,

(¹) G. VASSURA, *Nuovo Cim.* t. XXXI, p. 25; 1892.
(²) F. KOHLRAUSCH, *Wied. Ann.*, t. XXXIII, p. 42; 1888.
(³) H. LE CHATELIER, *Journ. de Phys.* [2], t. X, p. 369; 1891.

les valeurs du coefficient α sont comprises entre 0,000 27 et 0,000 44 pour les *maillechorts*, entre 0,000 22 et 0,000 31 pour les alliages de *platine-argent*.

Il arrive même que la résistance diminue quand la température augmente [1]. Des alliages de nickel, zinc et cuivre, connus sous le nom de *platinoïde*, ont présenté des coefficients de — 0,000 051 à — 0,000 022 : un échantillon de maillechort a donné — 0,000 035. Il en est de même pour les alliages de *ferro-manganèse* ou de *manganèse nickelé* avec le *cuivre*. Toutefois, ces alliages ne paraissent pas avoir de stabilité. Si on les chauffe à 100° et qu'on les ramène à la température ordinaire en répétant plusieurs fois l'opération, le coefficient de variation finit par s'annuler et redevenir positif.

Les courbes de résistance présentent encore des coudes plus marqués que pour les métaux. L'*acier au manganèse* aurait un point critique vers — 40° et un autre vers 700°.

Les alliages de *fer* et de *nickel* n'ont qu'un point critique, intermédiaire à ceux des deux métaux, ce qui semble indiquer une véritable combinaison au-delà de cette température.

Le *ferro-nickel* n'est pas magnétique, dans son état normal, et ne paraît subir aucune transformation moléculaire. Après avoir été traité par l'hydrogène humide, qui peut oxyder le carbone et le silicium, il devient magnétique avec un point de transformation à 550°. Au refroidissement, la transformation inverse se produit entre 0° et 100°.

Les alliages du *cuivre* avec le *nickel* ou avec le *zinc* subissent, dans un intervalle de 100° environ, un changement progressif accusé par un point d'inflexion compris entre un maximum et un minimum.

689. Conductibilités électrique et thermique. — Forbes [2] a remarqué le premier que l'ordre des métaux est le même pour les conductibilités calorifique ou électrique. MM. Wiedemann et Franz [3], allant plus loin, ont constaté que les deux espèces de propriétés sont sensiblement proportionnelles, ce qui exige que les variations avec la température suivent les mêmes lois dans les deux cas.

(1) Bottomley, *Elektrotechn. Zeitschrift*, t. VI, p. 442; 1888. — E. Nichols, *Amer. Journ. of Sc.*, t. XXXIX, p. 431; 1890.

(2) Forbes, *Ph. Mag.*, t. IV, p. 15; 1834. — *Ph. tr.*, *R. S. E.*, t. XXIII, p. 132; 1860

(3) Wiedemann et Franz, *Pogg. Ann.*, t. LXXXIX, p. 530; 1853.

Cette relation semble résulter de diverses expériences [1], faites par la méthode des températures variables, en vue de déterminer, non seulement les rapports des conductivités thermiques des différents corps, mais leurs valeurs absolues. Toutefois les nombres obtenus présentent quelque incertitude; ils sont d'ailleurs insuffisants, car on a supposé dans les calculs que les deux conductivités thermiques, intérieure et extérieure, sont indépendantes de la température.

M. Tait [2] considère les deux coefficients comme des fonctions linéaires de la température. La méthode qu'il emploie exige deux expériences, l'une statique, consistant à déterminer la distribution des températures stationnaires dans une barre chauffée à l'une de ses extrémités; l'autre dynamique, dans laquelle on étudie le refroidissement d'un morceau très court de la même barre. Cette seconde expérience donne la quantité de chaleur perdue par la surface à chaque température; on peut alors déduire de la première la conductivité intérieure et sa variation avec la température. Les expériences de M. Tait ont porté sur le fer, le cuivre pur et le cuivre ordinaire, le plomb et le maillechort. Il en résulte que le sens des variations est le même dans les deux cas, mais que ces variations sont loin d'être proportionnelles.

Les propriétés physiques des métaux sont tellement variables que la question ne peut être résolue qu'en étudiant les deux phénomènes sur le même échantillon.

M. F. Weber [3] prend le métal à étudier sous la forme d'un tore de révolution. Pour déterminer la conductivité thermique, il chauffe l'une des sections jusqu'à ce que la distribution des températures soit devenue stationnaire; puis il étudie le refroidissement, en observant les températures successives en deux points situés l'un à 45°, l'autre à 225° de la section primitivement chauffée. Si les dimensions de l'anneau sont convenablement choisies, la température peut être considérée sans erreur sensible comme constante dans toute une section, et la propagation comme s'effectuant parallèlement

(1) Angström, *Pogg. Ann.*, t. CXIV, p. 513; 1861 et t. CXVIII, p. 423; 1863. — [...]umann, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. LXVI, p. 185; 1863. — Lenz, *Bull. de* [l']*Acad. de Saint-Pétersb.*, t. XV, p. 54; 1870.

(2) Tait, *Phil. Trans. L. R. S.*, t. XXVIII, p. 717; 1877.

(3) F. Weber, *Bibl. univ. de Genève*, [3] t. IV, p. 107; 1880.

… est la section, la quantité
… l'unité de temps, la section

… points o et 1 est $ks\frac{u_0 - u_1}{l}$;

… ction B, à égale distance des
… proportionnelle, par les mêmes
… nce

$$\ldots + u_n \ldots \frac{ks}{l} \varepsilon$$

… aleur reçue par la région AB de
… ployée à l'échauffer et l'autre est
… eure.
… spécifique de l'unité de volume,
… segment, dont le milieu se trouve

… la quantité totale de chaleur ab-

… est donc, en appelant θ la tempé-
…

$$\ldots \frac{du_n}{dt} \ldots \Big) \ldots (n-1)\gamma s l \frac{d\theta}{dt}.$$

… aleur perdue par le rayonnement de
… on $f(\theta)$ de la température moyenne,
…

$$\ldots 1)\gamma s l \frac{d\theta}{dt} + f(\theta).$$

… auffement, la différence ε tombe rapi-
… pour la température moyenne θ.
… que les valeurs de θ et θ soient les
… cas, il en résulte

$$\ldots 1)\gamma \ldots \Big(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \Big).$$

… de ε par les données de l'expérience.
… plus approchée que les segments sont

plus courts, mais l'erreur reste négligeable quand, pour des barres de bons conducteurs de 1c,5 de diamètre, la longueur l ne dépasse pas 2 centimètres.

Cette méthode était mise en œuvre d'une manière très simple. La barre était percée de 9 trous très fins de 0mm,4 de diamètre destinés à recevoir les sondes thermoélectriques, et numérotés 0, 1, 2... 8. Deux couples ayant leurs soudures, l'un en 0 et 1, l'autre en 7 et 8, sont réunis en sens contraires dans un même circuit; le courant différentiel donne directement la valeur de δ. Sept autres couples associés en série ont leurs soudures impaires dans les trous 1, 2, 3... 7, les soudures paires étant à une même température; le courant observé est proportionnel à θ.

Les conductibilités électriques étaient déterminées sur les mêmes barres aux températures de 0 et de 100°.

Les résultats ainsi obtenus confirment la loi de Wiedemann et Franz et mettent en évidence cette autre relation que le rapport $\frac{k_{100}}{c_{100}}:\frac{k_0}{c_0}$ est sensiblement constant et égal à 1,367. On aurait donc, d'une manière générale, en désignant par T la température absolue et par C une constante,

$$\frac{k}{c} = \text{CT}.$$

Dans le cas des métaux très conducteurs, le coefficient k varie très peu avec la température; la formule exprime alors simplement le résultat connu que la résistance des métaux purs est proportionnelle à la température absolue. Il est remarquable que la loi se maintienne pour des alliages tels que le laiton et le maillechort; le coefficient de variation de la conductibilité électrique est alors moindre, mais celui de la conductibilité calorifique beaucoup plus grand que pour les métaux purs : il y a exactement compensation.

La loi de proportionnalité ne s'applique pas aux alliages de grande résistance. MM. Van Aubel et Paillot (1) ont étudié ainsi divers alliages en mesurant leurs résistances par le pont double et les conductibilités thermiques par la méthode de

(1) VAN AUBEL et PAILLOT, *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 522; 1895.

[illegible] En rapportant toutes les valeurs à [illegible] ainsi obtenu :

	[illegible]bilité électrique		Conductibilité thermique.
	[illegible]	à 15°.	
		1	1
	[illegible].65	0,644	0,711
	[illegible],603	0,630	0,807
	0,139	0,148	0,300
	0,082	0,086	0,193

[illegible] thermométriques. — La comparaison des [illegible] qu'on l'a utilisée depuis longtemps [illegible] thermométrique (¹).

[illegible] des métaux est voisin de $\alpha = 0,004$: [illegible] très petit ∂t de température, la variation [illegible]

$$\partial t = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial R}{R} = 250\,\frac{\partial R}{R}.$$

[illegible] de [illegible] ohms, par exemple, et qu'on [illegible] approximation de $1^{\omega}.10^{-6}$, ce qui est assez [illegible]

$$[illegible]\,250 \frac{10^{-6}}{[illegible]} = \frac{1}{10000}.$$

[illegible] les conditions du *bolomètre* employé [illegible] dans une série de travaux remarquables [illegible] critiques. L'appareil se compose d'une [illegible] ayant de 1^{mm} à $0^{mm},5$ de largeur, [illegible] épaisseur, et [illegible] environ de longueur, re[illegible] sur elle-même en ligne sinueuse, de ma[illegible] La résistance est de l'ordre [illegible] semblables sont installés sur deux [illegible] W [illegible]

[illegible] rayonnante sur une masse

'air, dont la dilatation déforme un liquide, et détermine les ariations correspondantes de résistance du liquide.

Dans leurs études sur les oscillations électriques, MM. Rubens et Ritter [1] se sont servis également d'un bolomètre en communication avec le résonateur et qui s'échauffait par le passage des courants; la sensibilité aurait été 3 ou 4 fois plus grande que pour l'appareil de M. Langley.

On peut ainsi [2] réaliser un véritable thermomètre, qui reste identique à lui-même et qui soit applicable entre des limites de température très écartées. Le *platine* pur est le métal qui convient le mieux pour cet usage.

En fonction du thermomètre à air, la résistance est donnée par une expression de la forme

$$R = R_0(1 + \alpha t - \beta t^2).$$

Entre les températures de 0° et de 100°, le coefficient moyen est $\alpha_1 = \alpha - 100\beta$. Si l'on pose, en général,

$$R = R_0(1 + \alpha_1 \theta), \qquad \theta = \frac{R - R_0}{R_0 \alpha_1} = \frac{R - R_0}{R_{100} - R_0} 100,$$

la quantité θ désignant une valeur particulière de la température, déduite de la résistance même du platine, on a

$$\alpha_1 \theta = \alpha t - \beta t^2 = \alpha t - \frac{\alpha - \alpha_1}{100} t^2, \qquad \alpha_1 (t - \theta) = (\alpha - \alpha_1)\left(\frac{t^2}{100} - t\right).$$

En posant $\dfrac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_1} = \dfrac{\delta}{100}$, on peut écrire

$$(3) \qquad t - \theta = \delta\left(\frac{t^2}{100^2} - \frac{t}{100}\right).$$

Jusqu'à 600°, l'erreur de cette formule n'atteint pas 1° et les valeurs de θ sont données par les résistances à moins de 0°,1. On déterminera d'ailleurs, pour chaque fil, le coefficient δ par les températures d'ébullition de quelques liquides, tels que l'*aniline* (184°,13), le *mercure* (356°,75) et le *soufre* (444°,53).

(1) RUBENS et RITTER, *Wied. Ann.*, t. XL, p. 55; 1890.

(2) H. L. CALLENDAR, *Phil. Trans.*, *L. R. S.*; 1887, p. 161. — E. H. GRIFFITHS, *ibid.*; 1891, p. 43. — GRIFFITHS et CALLENDAR, *ibid*, p. 119. — GRIFFITHS et CLARK, *Ph. Mag.* [5], t. XXXIV, p. 505; 1892.

La formule convient également aux basses températures. Si l'on admet que la résistance R s'annule au zéro absolu, on en déduit pour θ des valeurs qui varient, suivant les fils, de $-287°,03$ à $-295°,81$ et donnent, comme moyenne, $t = -273°,86$.

Le coefficient δ est compris entre 1,46 et 1,65; au voisinage de 50°, la différence $\theta - t$ serait donc d'environ 0°,35. La différence $t - \theta$ s'élèverait à 45° pour la température de 600° et à 15° au voisinage de zéro absolu.

Pour construire le thermomètre, on enroule sur un tube de verre un fil de platine convenablement isolé, dont la résistance est de l'ordre de 5 ohms, et on le plonge dans le milieu dont on veut connaître la température; un appareil semblable est placé dans la glace fondante et le rapport des résistances est déterminé par le pont de Wheatstone. MM. Dewar et Fleming, en particulier (688), ont fait usage de cette méthode.

691. Dissolutions. — On obtient les nombres les plus variables pour la résistance de l'*eau*, quelque soin qu'on ait mis à la purifier. Les moindres traces de matières étrangères en dissolution, même gazeuses, en augmentent très rapidement la conductibilité; on doit admettre que les résistances les plus grandes correspondent à l'eau la plus pure et on n'est jamais assuré d'en trouver la valeur maximum.

La conductivité [1] paraît inférieure à $0,7.10^{-15}$ pour de l'eau distillée à l'air avec les plus grandes précautions et à $0,0424.10^{-15}$ après distillation dans le vide. Si on chauffe cette eau vers 50°, la conductivité augmente beaucoup, jusqu'à $0,13.10^{-15}$. Par refroidissement, elle ne reprend pas tout à fait ses propriétés primitives, mais l'écart est très faible.

Le passage d'un courant produit le même effet que le contact de l'air, sans doute à cause des gaz dissous provenant des électrodes.

La résistance de la glace est beaucoup plus grande. Un même échantillon [2], dont la résistance à l'état liquide était de $3,231.10^5$ ohms, avait à l'état solide une résistance de $3,987.10^{10}$ à 0° et de $4,380.10^{10}$ à $-15°$.

Pour déterminer l'influence des matières en dissolution, surtout quand la solution est très étendue, il faut se servir

(1) KOHLRAUSCH et HEYDWEILLER, *Wied. Ann.*, t. LIII, p. 209; 1894.
(2) FOUSSEREAU, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. V, p. 317; 1885.

'eau très pure, car on ne peut admettre dans tous les cas que la conductance du liquide soit la somme des conductances de l'eau employée et du corps dissous.

La conductance d'une solution varie avec sa richesse et l'on doit considérer comme à peu près évident qu'elle est d'abord proportionnelle à la quantité du corps dissous par unité de volume. On peut appeler ***conductivité moléculaire*** du corps dissous le quotient de la conductivité d'une solution par le nombre m d'équivalents en grammes qu'elle renferme par litre; la ***résistivité moléculaire*** est l'inverse de cette grandeur, c'est-à-dire le produit de la résistivité du liquide par le nombre d'équivalents.

L'étude des dissolutions a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, parmi lesquels nous citerons en particulier ceux de M. Kohlrausch [1] et de M. Bouty [2].

La proportionnalité de la conductance des solutions très diluées à leur richesse avait été déjà constatée par M. Lenz [3] pour les sels alcalins étendus jusqu'à 0,01 d'équivalent. Toutefois, M. Lenz fut ainsi amené à conclure que l'influence de l'anion ou de l'élément acide s'efface de plus en plus, à mesure que la dilution augmente, et qu'alors celle du cation subsiste seule. Ainsi, la valeur limite de la conductivité moléculaire serait la même pour tous les sels de potasse et aussi pour tous les sels de soude, mais avec des valeurs particulières à ces deux catégories de sels.

A mesure que la richesse augmente, la conductance du liquide est presque toujours croissante, sauf des cas exceptionnels qui présentent des maxima. Pour les dissolutions salines, la résistivité moléculaire à température constante peut se représenter, d'après M. Kohlrausch, par l'expression

$$r = a\left(1 + A m^{\frac{1}{3}}\right).$$

Il en résulte que l'*excès de la résistivité moléculaire r sur sa valeur limite a est proportionnelle à la racine cubique de*

[1] Voir pour l'historique, R. KOHLRAUSCH, *Wied. Ann.*, t. XXVI, p. 161; 1885.
[2] BOUTY, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. III, p. 433; 1884. — *Journal de Physique*, [2], t. III, p. 325; 1884 et t. VI, p. 5; 1887.
[3] LENZ, *Mém. de l'Acad. de St.-Pétersbourg* [7], t. XXVI, n° 3, p. 1; 1878.

la distan

toute l'exa
périences.
s la même v
que les dissol
ences de M. B
à $\frac{1}{1000}$, montr
siblement la
s *normaux*.
ctivité et de l
s les sels nor
quelques sels
anière satisfai
l'insuffisance
la constitution
lyse.
, on remarque
considérée co
subsiste à to
éjà que la co
le au bino
eur pour tou
st pas générale
aque solution, m
vers une limite
es les sels.
potassium, par ex
jusqu'à 0,0333, quan
varie de 3 à 0,01 ; ell
on normale d'un équ
de zéro, la résisti
0,091.
este inférieure à $\frac{1}{10}$, le
elle de la solution norm
représenté par

$$\frac{0,2976\,m^{\frac{1}{3}}}{1+0,0333\,t}.$$

692. Transport des ions dans l'électrolyse. — Le passage u courant dans une solution saline est toujours accompagné l'électrolyse. Si l'on fait usage d'électrodes inaltérables, en platine par exemple, séparées par une distance convenable, on peut isoler les corps formés autour de chacune d'elles. Les dégagements de gaz sont toujours accompagnés de quantités correspondantes de base ou de métal à la cathode et d'acide à l'anode, mais le phénomène se présente avec deux caractères très différents.

Pour certains sels, comme le *sulfate de potasse*, les ions cheminent également dans les deux sens : quand un équivalent de sel est décomposé, la solution s'appauvrit de la moitié d'un équivalent à chaque électrode ; l'électrolyse est *normale*.

Avec le *nitrate de soude*, au contraire, la perte à l'anode n'est que 0,386 d'équivalent du sel, la partie complémentaire 0,614 faisant défaut à la cathode. Hittorf (1), qui a étudié ces particularités avec soin, appelle *nombres de transport* les fractions n et $1 - n$ du nombre total d'équivalents décomposés qui manquent respectivement à la cathode et à l'anode.

Le quotient p de la moindre résistivité moléculaire d'un sel par la valeur limite relative au chlorure de potassium doit être égal à l'unité si la loi des conductivités moléculaires est applicable ; c'est ce qui a lieu pour un certain nombre de sels anhydres dont l'électrolyse paraît normale. Les écarts sont plus grands pour d'autres sels, surtout quand ils forment des combinaisons avec l'eau, et pour la plupart des sels hydratés. En même temps, les nombres de transport sont inégaux de part et d'autre ; ils varient avec la richesse et ne tendent pas vers la limite 0,5 à mesure que la dilution augmente.

Dans les expériences de M. Bouty, la loi se vérifie à quelques centièmes près pour les sels de *potassium* (le fluorure excepté) et d'*ammoniaque*, le *sulfate* et l'*azotate d'argent*, l'*iodure de zinc*, l'*azotate de plomb* et le *sulfate de thallium*.

Le tableau suivant renferme les cas irréguliers. La valeur de p est déterminée par l'équivalent du sel, ou son poids moléculaire pour un atome du métal. Le chiffre placé à côté des sels hydratés indique le nombre de molécules d'eau ($H^2O = 16$).

(1) HITTORF, *Pogg. Ann.*, *passim*; 1853 à 1859.

la quantité m, ou en raison inver
des molécules dans la solution.

Cette formule paraît se vérifier a
comporte la précision relative des

Toutefois, la constante a n'ava
les différents sels, sans doute pa
taient pas assez diluées. Les ex
dues jusqu'à des valeurs de m ég
contraire, que cette constante e
un grand nombre de sels neutr
termes, *les valeurs limites de la*
moléculaires sont les mêmes p

La plupart des sels anhyd
satisfont, en effet, à cette loi d
tains écarts peuvent être attr
tion, ou à la formation d'hy
ou encore aux conditions d

Avant d'examiner ce dern
qu'une loi d'équivalents ne
un caractère scientifique q
rature. M. Kohlrausch ava
d'une solution saline est
et que le coefficient α a l
D'après M. Bouty, cette
cient α est bien constant
mente avec la dilution
0,0333, qui serait comm

Dans le cas du *chl*
valeur de α croît depui
bre m d'équivalents p
suite constante. Pour
sel par litre à la te
égale à 15,37 ohms,

Tant que la valeur
la résistivité molécu
peut être très sensi

[illegible]	p.
[illegible]	1,21
[illegible]	1,37
[illegible]	1,26
[illegible]	1,33
[illegible]	1,45
[illegible]	1,18
68	1,47
147	1,30
131	1,41
152,5	1,18

…RATÉS.

	168	1,2
	133,25	1,1
	122	0,9
	101,5	1,
	99	1,
	143	1,
	118	1,
[illegible]	128	1
[illegible]	149	1
[illegible]	155	1
[illegible]	147,75	1
[illegible]	185	1
[illegible]	161	1
[illegible]	64	1
3,5	123	[illegible]
3,5	139	[illegible]
3,5	144	[illegible]
3,5	140,5	1
3,5	140,5	1
2,5	124,75	1

SELS ANHYDRES

Sel.	
Fluorure de potassium.......	
Chlorure de sodium..........	
Azotate de soude	
Chlorate »	
Chlorure de lithium........	
» calcium.......	
Sulfate de chaux..........	
Iodure de calcium........	
Azotate de baryte.......	
Chlorate »	

SELS H

Iodure de sodium......	
Chlorure de strontium. .	
» baryum ...	
» magnésium	
» manganèse	
Carbonate de soude. ...	
Azotate de chaux. ...	
» magnésie..	
» zinc.	
» cadmium.	
» cuivre. ..	
Hyposulfite de baryt	
Sulfate de soude. ..	
» lithine. .	
» magnési	
» fer ...	
» zinc. .	
» nickel	
» cobalt	
» cuivre	

...ortent avec eux.
...icité $\pm q$ par équi-
... courant est

...endue, la résistivité
...a résistivité molécu-
la différence de po-
... le champ électrique,

... 10^2;

...solutions très étendues de

$$= \frac{12,3}{1+\alpha t} 10^9 (\text{C.G.S.}).$$

...10^2. Si la valeur de V_1 est
... pour les sels normaux,

...$= 4^c,21.10^{-4}(1+\alpha t)$.

... avec la température comme
...rait à $1^c,51$ par heure pour la

... — Il est naturel de com-
... ions, au travers de la masse
...térieur des liquides.
... meuve parallèlement à un plan
... une fonction $f(r)$ de sa dis-
... infiniment voisines, situées
... l'une sur l'autre une action
...tionnelle à leur vitesse relative
... surface, η étant une constante
...uide.

qu'on appelle le coefficient de frottement déduite des expériences relatives à l'écou- par les tubes capillaires. Il résulte, en es de Poiseuille (1) que, si on appelle D le L sa longueur et p la différence des pres- mités, la quantité Q de liquide qui s'écoule temps a pour expression

$$Q = K \frac{pD^4}{L}.$$

K, qui dépend de la nature du liquide, est en de la constante η et varie avec la température nome $1 + at + bt^2$; cette quantité η peut donc lée par une expression de la forme

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + at + bt^2}.$$

méthode (2) consiste à déduire ce coefficient des de Coulomb (3) pour déterminer la *cohérence* d'un étudiant l'amortissement des oscillations d'un corps ns le fluide. En appelant λ le décrément logarith- s oscillations, R le rayon du disque oscillant, M le d'inertie du système et T_0 la période des oscillations ide, M. Mayer arrive à la formule

$$\lambda \frac{M}{R^4} = \sqrt{\frac{5}{8}\pi^3 T_0 \eta}.$$

ssmann (4), appliquant cette dernière formule con- ent corrigée aux expériences de Kohlrausch et Gro- déduit que le produit de la conductivité électrique efficient de frottement intérieur est, pour un même ème état de dissolution, indépendant de la tempéra- *résistivité électrique est donc proportionnelle au coef- frottement.*

(1) ILLE, *Mém. des Sav. Étrang.*, t. XI, p. 433. — *Ann. de Chim. et de* . VII, p. 50; 1843.

(2) YER, *Pogg. Ann.*, t. CXIII, p. 55, 193, 383; 1861.

(3) MB, *Mém. de l'Institut*, t. III; 1801. — *Mém. de la S. de Phys.*, t. I, p. 331.

(4) MANN, *Wied. Ann.*, t. XVIII, p. 119; 1883.

On peut admettre aussi que les ions
de part et d'autre, la même quantité d'él
valent, c'est-à-dire I $\mu s u q$, et l'intensit

$$I = 2\mu s u q.$$

D'autre part, si la solution est asse
ρ du liquide est égale au quotient d
laire r par le nombre m. En appelant
tentiel par unité de longueur, c'est-à-
il en résulte

$$I = \frac{V_1}{\rho} s = \frac{V_1}{r} m s =$$

$$u = \frac{1}{2q} \cdot \frac{V_1}{r}.$$

Or, la résistivité moléculaire de
chlorure de potassium est

$$r = 15^{\omega},37 \frac{0,8}{1+\alpha t} = \frac{12^{\omega},3}{1+\alpha}$$

On a vu enfin (653) que $q = 9$
d'un volt, ou 10^8, on a, au mo

$$u = \frac{1+\alpha t}{2.96,5.10^2} \cdot \frac{10^8}{12,3.1}$$

La vitesse moyenne varie
la conductivité ; elle corres
température de zéro.

693. Relation avec le fro
parer ce transport matéri
du dissolvant, au frottem

Supposons qu'un liquid
fixe, la vitesse d'un poin
tance r au plan. Deux t
aux distances r et $r + dr$
parallèle au mouvement.
et égale à $\eta f'(r)$ par un
qui dépend de la nature

La constante η, qu'on appelle le coefficient de frottement intérieur, peut être déduite des expériences relatives à l'écoulement des liquides par les tubes capillaires. Il résulte, en effet, des expériences de Poiseuille [1] que, si on appelle D le diamètre du tube, L sa longueur et p la différence des pressions aux deux extrémités, la quantité Q de liquide qui s'écoule dans l'unité de temps a pour expression

$$Q = K \frac{pD^4}{L}.$$

Or, le facteur K, qui dépend de la nature du liquide, est en raison inverse de la constante η et varie avec la température comme le trinome $1 + at + bt^2$; cette quantité η peut donc être représentée par une expression de la forme

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + at + bt^2}.$$

Une autre méthode [2] consiste à déduire ce coefficient des expériences de Coulomb [3] pour déterminer la *cohérence* d'un fluide, en étudiant l'amortissement des oscillations d'un corps plongé dans le fluide. En appelant λ le décrément logarithmique des oscillations, R le rayon du disque oscillant, M le moment d'inertie du système et T_0 la période des oscillations dans le vide, M. Mayer arrive à la formule

$$\lambda \frac{M}{R^4} = \sqrt{\frac{5}{8} \pi^3 T_0 \eta}.$$

M. Grossmann [4], appliquant cette dernière formule convenablement corrigée aux expériences de Kohlrausch et Grotrian, en déduit que le produit de la conductivité électrique par le coefficient de frottement intérieur est, pour un même sel au même état de dissolution, indépendant de la température; *la résistivité électrique est donc proportionnelle au coefficient de frottement.*

[1] POISEUILLE, *Mém. des Sav. Étrang.*, t. XI, p. 433. — *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. VII, p. 50; 1843.
[2] O. MAYER, *Pogg. Ann.*, t. CXIII, p. 55, 193, 383; 1861.
[3] COULOMB, *Mém. de l'Institut*, t. III; 1801. — *Mém. de la S. de Phys.*, t. I, p. 331.
[4] GROSSMANN, *Wied. Ann.*, t. XVIII, p. 119; 1883.

La moyenne des valeurs obtenues par M. Bouty pour la variation de résistivité d'un grand nombre de sels normaux est $\alpha = 0,033695$.

D'après Poiseuille, le frottement intérieur de l'eau est en raison inverse du trinome $1 + 0,0336793\,t + 0,0002209938\,t^2$.

L'identité des coefficients principaux est une vérification de la loi énoncée par M. Grossmann.

694. Sels fondus. — Comme pour les dissolutions, la conductivité des sels fondus croît d'abord avec la température.

En comptant la température t à partir du point de fusion t_0, la résistivité ρ peut être représentée par

$$\rho = a(1 - \alpha t + \beta t^2).$$

On déduit ainsi des expériences de M. Foussereau (¹):

	a.	α.	t_0.
A. Chlorate de potasse.	4,19	»	359°
B. Azotate de potasse.	1,68	0,0080	327
C. Azotate de soude.	2,47	0,0086	298
B + C.	2,40	0,0077	219
D. Azotate d'ammoniaque. . .	3,09	0,0088	153
2D + B + C.	5,29	0,0068	126
E. Chlorure de zinc.	4,80	0,0120	256

La loi de Grossmann paraît également s'appliquer aux sels fondus. Toutefois le produit de la conductivité par le frottement intérieur varie d'un sel à l'autre, sans relation apparente avec l'équivalent chimique du sel.

Les expériences de MM. Bouty et Poincaré (²) ont été étendues jusqu'à la température de décomposition des sels, en prenant des tampons d'amiante comme électrodes parasites, auquel cas leur polarisation est négligeable.

D'autre part, M. Poincaré a constaté, conformément à une remarque antérieure de M. Lippmann pour les dissolutions, que des électrodes en argent ne se polarisent pas dans un

(¹) G. Foussereau, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. V, p. 351; 1885.

(²) E. Bouty et L. Poincaré, *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 368; 1889. — L. Poincaré, *Ibid.*, p. 373.

sel fondu quand le sel renferme des traces d'azotate d'argent, ce qui permet d'employer des méthodes plus simples.

La conductivité est proportionnelle au binome $1 + \alpha t$, en comptant les températures à partir d'un certain point t_0. On obtient ainsi pour différents *azotates*, les valeurs de γ étant les inverses des résistivités à t_0 exprimées en ohms,

	t_0.	γ.	α.	d.	$\alpha d.10^5$.
Potasse.	350	0,724	0,005	1,84	920
Soude	350	1,302	0,00497	1,84	920
Argent.	350	1,233	0,0025	3,9	975
Ammoniaque. . .	200	0,400	0,0073	1,36	971

Ces résultats ne sont pas entièrement conformes à ceux qu'avait obtenus M. Foussereau, surtout en ce qui concerne le coefficient de variation. On remarquera aussi que le produit du coefficient α par la densité d du sel à la température t_0 est à peu près constant.

En outre, la conductivité d'un mélange de deux sels fondus peut se déduire de leurs conductivités respectives, rapportées aux volumes qu'ils occupent dans le mélange, même quand les valeurs de α sont inégales.

695. Mauvais conducteurs. Diélectriques. — Certains corps, comme le *charbon* de cornue et différents *sulfures* métalliques, ont une conductivité comparable à celle des métaux, quoique beaucoup plus faible, mais elle croît avec la température. La résistivité des charbons employés pour la lumière électrique est d'environ $0^{\omega},004$, ou 42 fois celle du mercure; elle varie de 0,0003 par degré entre zéro et 100°.

L'influence de la température sur la résistivité des diélectriques, d'après M. Foussereau, se traduirait par la formule

$$\log. \rho = a - bt + ct^2.$$

Pour le *phosphore* bien pur, la résistivité à 50° est de $1,33.10^6$ ohms; de 25° à 100°, elle diminue dans le rapport de 6,6 à 1. On a d'ailleurs

	a.	b.	$-c$.
Phosphore liquide. .	6,5035	0,00523	0,0000434
— solide. .	11,2103	0,01475	0,0002255

L'augmentation relative z de résistance est d'abord plus rapide que celle du champ magnétique H et tend à lui devenir proportionnelle. On peut la représenter [1] par un développement à trois termes $a\mathrm{H} + b\mathrm{H}^2 - c\mathrm{H}^3$, ou mieux encore par la formule hyperbolique

$$z(z+\beta) = \alpha \mathrm{H}^2.$$

La valeur de z est sensiblement proportionnelle au carré du champ ou au champ lui-même, suivant que z est petit ou grand par rapport à la constante β.

Les constantes α et β varient d'ailleurs suivant les échantillons. Avec du bismuth aussi pur que possible, obtenu par la décomposition du sous-nitrate, M. Leduc a ainsi trouvé, pour la température de 18°,

$$\alpha = 221.10^{-11}, \qquad \beta = 0{,}263.$$

H.	z.	z calc.	H.	z.	z calc.
680	4,0	3,8	5080	139,2	141,4
1500	18,7	17,8	6070	182,0	183,0
2350	40,0	40,4	7290	237,3	235,8
3080	64,4	64,3	8470	289,4	288,0
4230	106,0	107,2	9000	311,3	311,7

Les valeurs de α et β à différentes températures seraient:

t	18°	44°,7	100°	130°,8	157°,5
$\alpha.10^{11}$ . . .	221	143	55	33	22
β	263	275	301	318	342

A mesure que la température s'élève, la variation diminue et tend à devenir proportionnelle au champ.

Les résultats de M. Henderson [2], avec des champs dont l'intensité a été poussée jusqu'à 38900, indiqueraient une variation plus rapide de la résistance.

Voici, par exemple, les valeurs obtenues, à la températur

[1] A. Leduc, *Journ. de Phys.* (2), t. IV, p. 118; 1886 et t. X, p. 112; 1891.
[2] J. B. Henderson, *Ph. Mag.* (5), t. XXXVIII, p. 448; 1894.

minces dont les deux faces sont rendues conductrices, par exemple en les argentant, et mesure les charges au moyen du quartz piézo-électrique.

Si l'on met l'une des armatures en communication avec une pile, l'autre armature prend d'abord une charge instantanée et il s'établit ensuite un courant d'intensité décroissante qui tend vers une limite définie.

Le courant de charge est à chaque instant proportionnel à la force électromotrice, ainsi qu'à l'étendue des armatures et en raison inverse de l'épaisseur du diélectrique, c'est-à-dire à la capacité du condensateur formé par la lame.

Quand l'isolement est assez parfait pour que le courant de charge s'éteigne complètement, le courant de décharge suit les mêmes lois que le premier. Afin de préciser les expériences, M. Curie appelle conductibilité c au temps t le rapport du courant de charge à la force électromotrice.

Les conductibilités (ou les courants, qui leur sont proportionnels) paraissent obéir à la relation hyperbolique

$$c = at^{-n},$$

dans laquelle a et n sont des constantes, car si on traduit les phénomènes graphiquement, en prenant pour coordonnées $\log c$ et $\log t$, on obtient souvent des courbes rectilignes qui satisfont à l'équation

$$\log c = \log a - n \log t.$$

Tel est en particulier, le cas du *quartz*. La conductivité suivant l'axe, qui est d'abord notable, diminue rapidement, puis d'une manière plus lente, sans qu'on atteigne une valeur constante, même après plusieurs jours, et diffère d'un échantillon à l'autre. Une des expériences a donné, par exemple, en unités électrostatiques,

10 secondes.	1 minute.	10 minutes.	1 heure.	1 jour.	3 jours.
0,0252	0,0076	0,0068	0,0066	0,0063	0,0060

La température a une très grande influence, car la conductivité varie de 1 à 2.10^6 quand on passe de 20° à 300°.

C et D des autres faces sont au même potentiel; mais si l'on provoque un champ magnétique uniforme H parallèle à l'épaisseur a de la plaque, la symétrie est détruite et il se produit, entre les points C et D, une force électromotrice e, que

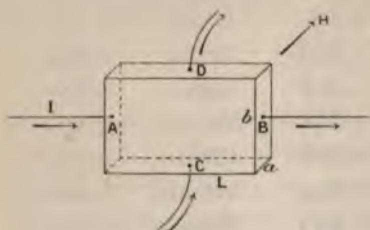


Fig. 200.

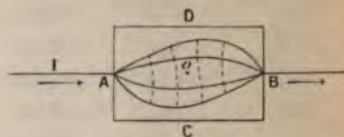


Fig. 201.

l'on déterminera par un électromètre ou par le produit ir du courant latéral i dans un circuit de résistance r.

La force électromotrice e est proportionnelle au champ H, au courant principal I et en raison inverse de l'épaisseur a; on peut donc écrire

$$(1) \qquad e = c\,\frac{\mathrm{HI}}{a}, \quad c = \frac{ea}{\mathrm{HI}} = \frac{i}{\mathrm{I}}\,\frac{ar}{\mathrm{H}}.$$

On voit qu'il y a tout avantage à employer des plaques très minces, comme pour les observations relatives à la résistance du bismuth dans un champ magnétique.

M. Hall donne au facteur c le nom de *pouvoir rotatoire magnétique*, mais cette expression a déjà été employée dans un autre sens; pour éviter toute confusion, nous l'appellerons *coefficient de Hall*. L'expérience montre d'ailleurs que cette quantité varie avec le champ et avec la température.

Si b est la largeur CD de la plaque, la densité du courant est $u = \frac{\mathrm{I}}{ab}$ et le quotient $\frac{e}{b} = e_1$ représente la force électromotrice transversale par unité de longueur; il en résulte

$$(2) \qquad \frac{e}{b} = c\,\frac{\mathrm{HI}}{ab}, \quad \text{ou} \quad e_1 = c\mathrm{H}u.$$

La force électromotrice par unité de longueur ne dépend que du champ et de la densité du courant.

Pour le *fer*, la force électromotrice e relative au phénomène de Hall est de même sens que l'action électromagnétique du champ sur le courant principal. Dans le cas de la figure, le courant latéral émanerait du point D; le cofficient c est considéré alors comme positif. Pour d'autres corps, dont le *bismuth* est le plus actif, le courant est de sens contraire et le coefficient c négatif.

M. Lebret [1] élimine la détermination du courant principal en faisant usage d'un galvanomètre différentiel. L'une des bobines du galvanomètre est située sur le circuit latéral, de résistance totale r, et reçoit le courant i produit par le champ; l'autre bobine renferme une résistance R placée en dérivation sur une partie r' du circuit principal. On a alors, pour ce courant dérivé i',

$$i'R = (I - i')r', \qquad i' = I\frac{r'}{R + r'}.$$

Le dénominateur de la dernière équation se réduit à R si la résistance r' est très petite. Lorsque le galvanomètre est réglé et que les résistances ont été choisies de manière que l'aiguille reste au zéro, il en résulte $i = i'$ et, par suite,

$$c = \frac{i'}{I} \cdot \frac{ar}{H} = \frac{a}{H} \cdot \frac{rr'}{R}.$$

Avec cette disposition, le circuit du courant n'a besoin d'être fermé que pendant quelques instants, ce qui supprime les erreurs dues à l'échauffement.

On évalue quelquefois le champ en unités absolues et les résistances en ohms; il est préférable d'éviter la confusion que peut causer ce mélange de systèmes différents et de rapporter toutes les mesures aux unités C. G. S.

L'existence d'une force électromotrice transversale e montre que les routes du courant primitif ont été modifiées. Si le potentiel est plus élevé en D qu'en C, les lignes du courant ont une forme analogue à celle des traits pleins de la figure 201, qui vont de A en B, et les courbes de niveau à celle des traits indiqués en pointillés.

[1] A. Lebret, *Comm. form the Lab. of Physics at the University of Leiden*, nos 15 et 19; 1895.

En appelant ρ la résistivité de la plaque, la différence de potentiel du courant primitif par unité de longueur, ou le champ électrique correspondant, est

$$E_1 = I\frac{\rho}{ab}.$$

La *déviation* moyenne δ du courant résultant qui traverse la section CD est donc

$$\tang\delta = \frac{e_1}{E_1} = \frac{e}{bE_1} = \frac{ea}{I\rho} = c\,\frac{H}{\rho}.$$

Cette déviation peut être déterminée par les valeurs de e et de E_1. Pour le *bismuth*, la résistivité ordinaire est d'environ 130.10^3; comme elle augmente de moitié dans un champ de 10000 unités, on peut prendre alors la valeur 195.10^3. Si l'on fait ensuite $c = 10$, il en résulte

$$\tang\delta = 10\,\frac{10^4}{195.10^3} = \frac{100}{195}, \qquad \delta = 27°9'.$$

Les résultats relatifs au *bismuth* paraissent varier beaucoup avec les échantillons. Ainsi M. Leduc n'a pas observé de déviation supérieure à 3°, tandis que M. Lebret a obtenu, pour le coefficient de Hall, jusqu'à 13,5 à $-12°$.

D'autre part, si l'on admet que l'influence de la température et celle du champ sont indépendantes, le cofficient c serait représenté, d'après M. Leduc, par

$$c = c_0(1 - \alpha H + \beta H^2)(1 + mt - nt^2),$$

avec

$$\alpha = 91.10^{-6}, \qquad \beta = 316.10^{-11},$$
$$m = 541.10^{-5}, \qquad n = 93.10^{-6}.$$

Cette expression donnerait un minimum par rapport au champ au voisinage de $H = 10000$ et un maximum relatif à la température vers 29°.

MM. Ettingshausen et Nernst [1] ont trouvé, au contraire, que pour le *bismuth* et le *nickel* le coefficient de Hall diminue

[1] ETTINGSHAUSEN et NERNST, *Wien. Berichte* [2], t. XCIV, p. 560; 1886.

assez rapidement, à mesure que le champ augmente, et que le produit cH tend à devenir constant lorsque le champ varie de 6000 à 16000.

En ce qui concerne la température, le coefficient c irait en croissant pour les métaux magnétiques, d'après M. Hall ([1]), et en diminuant pour les métaux non magnétiques.

Cette relation est encore trop générale. Sur un échantillon de *bismuth* très pur, M. Lebret trouve pour le coefficient de Hall un maximum de 13,5 à $-12°$, avec des valeurs de 11,24 à $-69°$ et 2,27 à $242°,5$. Dans une lame de bismuth impur, contenant un peu de fer, le phénomène a présenté une marche analogue, avec des valeurs moitié moindres, mais la température du maximum était inférieure à $-74°$.

Enfin, on peut remplacer le courant I par une décharge Q et observer la décharge latérale q dans un circuit de résistance r. En substituant à e le produit qr, l'expression

$$c = a\frac{qr}{HQ} = \frac{ar}{H}\cdot\frac{q}{Q}$$

donne le même coefficient que les courants continus.

Le phénomène de Hall ne paraît pas pouvoir être expliqué par une action du champ sur le courant lui-même, indépendamment du conducteur, car les surfaces de niveau devraient rester symétriques par rapport au plan transversal moyen et le potentiel conserverait la même valeur aux points C et D (fig. 201). M. Righi a opéré sur des lames fendues de O en B, les deux fragments de droite, qui reçoivent des parties I_1 et I_2 du courant principal, communiquant avec un galvanomètre différentiel. L'aiguille étant d'abord au zéro, le champ magnétique détruit l'équilibre et l'on a, par exemple, $I_1 > I_2$; or la différence $I_1 - I_2$ ne change pas quand on renverse le courant principal.

Il semble donc que le milieu est devenu hémiédrique, sous l'influence du champ, et qu'il a pris, au point de vue de la conductibilité, la symétrie (d) qui correspond au champ magnétique lui-même (**504**).

Toutefois, cette manière de voir n'est pas en contradiction

([1]) E. Hall, *Ph. Mag.* [5], t. XIX, p. 419; 1885.

formelle avec l'interprétation donnée par M. Rowland (485) pour le pouvoir rotatoire magnétique.

M. Bidwell ([1]) attribue le phénomène de Hall à des tensions inégales qui produisent des forces électromotrices et indique quelques expériences qui paraissent favorables à cette interprétation, mais il est difficile de concevoir que des différences de tension puissent se produire dans une lame de bismuth soumise à un champ magnétique uniforme.

Le tableau suivant renferme les principaux résultats obtenus par MM. Ettingshausen et Nernst et par M. Hall.

COEFFICIENT DE HALL.

	Ett. et N.	Hall.		Ett. et N.	Hall.
Tellure	+530	»	Platine	—0,00024	— 0,00024
Antimoine..	0,192	0,114	Aluminium ...	38	370
Acier..	0,0175	Variable.	Cuivre........	52	52
Fer.........	113	0,00785	Or............	71	66
Cobalt......	459	246	Argent..	83	86
Cadmium...	55	»	Magnésium...	94	350
Zinc........	41	82	Nickel........	242	1474
Plomb......	+ 9	+0	Charbon	176	»
Étain.......	— 0,00004	+0,00002	Bismuth......	—10,100	— 8,850

Le coefficient relatif aux alliages, en particulier pour ceux qui sont formés de cuivre et de zinc, est intermédiaire entre les valeurs qui correspondent aux métaux.

On voit encore que la relation indiquée (476) entre le signe du coefficient de Hall et les propriétés magnétiques ou diamagnétiques n'a pas de caractère général. Les métaux se trouveraient plutôt rangés à peu près dans l'ordre de leurs pouvoirs thermoélectriques.

Dans le cas du *bismuth*, la force électromotrice latérale e ne conserve pas exactement la même valeur quand on renverse la direction du champ. Cette dissymétrie particulière a été observée d'abord par MM. Ettingshausen et Nernst ([2]); elle paraît due à l'orientation des cristaux.

M. Lebret a été conduit à une interprétation du phénomène par l'expérience suivante. Si on permute le rôle des électrodes,

([1]) Sh. Bidwell, *Ph. Mag.* [5], t. XVII, p. 249; 1884. — *Journ. de Phys.* [2], t. III, p. 363; 1884.

([2]) Ettingshausen et Nernst, *Wied. Beiblatter*, t. II, p. 357; 1887.

en faisant passer le courant principal par les points C et D normalement à sa direction primitive, la dissymétrie change de signe avec la même valeur absolue, c'est-à-dire que la valeur de e est plus grande pour le sens du champ qui correspondait d'abord à la plus petite.

Il existe, en effet, dans une plaque de bismuth deux directions rectangulaires suivant lesquelles le défaut de symétrie est nul; il change alternativement de signe dans les quatre quadrants de ces directions principales et prend une valeur maximum suivant leurs bissectrices.

Pour rendre compte de la dissymétrie, il suffit d'admettre que la résistance du milieu a des valeurs différentes suivant les directions principales. En appelant X et Y les composantes du champ électrique parallèles à ces directions, u et v les composantes analogues du courant, le phénomène de Hall peut se traduire par les équations

$$X = k_1 u - hv, \qquad Y = k_2 v + hu.$$

Les facteurs k_1 et k_2 sont proportionnels aux résistivités principales; la constante h dépend de la nature du métal et de l'intensité du champ, et change de signe avec le champ.

Si le courant I fait l'angle α avec l'axe des x, on a $u = \mathrm{I}\cos\alpha$ et $v = \mathrm{I}\sin\alpha$; le champ électrique transversal, ou la force électromotrice e'_1 par unité de longueur, devient

$$e'_1 = Y\cos\alpha - X\sin\alpha = \left(h - \frac{k_1 - k_2}{2}\sin 2\alpha\right)\mathrm{I}.$$

Les valeurs de e'_1 sont donc très différentes quand on change le signe de h par l'inversion du champ. L'exactitude de cette formule a été confirmée par des expériences faites suivant les azimuts de 45° et de 60°.

Les écarts sont surtout manifestes pour les champs très intenses. Suivant les bissectrices des axes principaux, l'observation a donné, pour le rapport des forces électromotrices latérales relatives aux deux directions du champ :

Champ	1500	2160	2740	3480
Rapport	2,22	3,55	6,14	32,3

formelle avec l'interprétation donnée pa
pour le pouvoir rotatoire magnétique.

M. Bidwell [1] attribue le phénomène de
inégales qui produisent des forces électro
quelques expériences qui paraissent favo
prétation, mais il est difficile de concevoi
de tension puissent se produire dans u
soumise à un champ magnétique unifor

Le tableau suivant renferme les pri
tenus par MM. Ettingshausen et Nerns

COEFFICIENT DE HA

	Ett. et N.	Hall.	
Tellure.....	+530	»	Platin
Antimoine..	0,192	0,114	Alumi
Acier..	0,0175	Variable.	Cuiv
Fer.........	113	0,00785	Or...
Cobalt	459	246	Arg
Cadmium...	55	»	Ma.
Zinc........	41	82	Ni
Plomb......	+ 9	+0	Ch
Étain.......	— 0,00004	+0,00002	Bi

Le coefficient relatif aux allia
qui sont formés de cuivre et de
les valeurs qui correspondent a

On voit encore que la relatio
du coefficient de Hall et les pro
gnétiques n'a pas de caractèr
veraient plutôt rangés à peu
voirs thermoélectriques.

Dans le cas du *bismuth*, l
ne conserve pas exactement l
la direction du champ. Ce
observée d'abord par MM.
paraît due à l'orientation d

M. Lebret a été conduit
par l'expérience suivante.

(1) Sh. Bidwell, *Ph. Mag.* [5
t. III, p. 363; 1884.

(2) Ettingshausen et Nernst,

fois plus grande que celle qui résulterait du changement de volume. Aux températures plus élevées l'accroissement de résistance peut être attribué au dégagement de chaleur.

Le phénomène est inverse pour le *plomb* : la diminution de résistance est à peu près la même à 6°, 8° et 17°.

2°. *Traction.* — La longueur du fil augmente par la traction, en même temps que sa section diminue. Il est donc à prévoir que la résistance devienne alors plus grande, mais la résistivité elle-même est modifiée. Dans les limites d'élasticité parfaite, Mousson (¹) avait reconnu déjà que le rapport des variations de résistance et d'allongement est égal à 4,32 pour l'*acier*, à 3,61 pour le *fer* et 2,36 pour le *cuivre*. Quand on dépasse les limites d'élasticité, la résistance croît moins vite que l'allongement, mais elle persiste aussi après la décharge : Lord Kelvin (²) était arrivé à la même époque à des conclusions analogues.

Les expériences de M. Tomlinson (³) ont porté sur un grand nombre de métaux, *fer*, *acier*, *platine*, *argent*, *platine-argent*, *laiton*, *zinc*, *aluminium*, *étain*, *plomb*. Dans les limites d'élasticité, l'accroissement de résistance est proportionnel au poids tenseur; en même temps la résistivité augmente, sauf pour l'aluminium où elle diminue. Le *nickel* présente un cas spécial : pour une faible tension, la résistance et la résistivité diminuent; elles reprennent ensuite leurs valeurs primitives et finissent par augmenter.

La variation de résistivité en centièmes, calculée pour un allongement des fils égal à leur longueur primitive, a été

Fer.........	+2,62	Plomb......	+1,62	Cuivre.... ..	+0,01
Zinc.........	+2,11	Platine.....	+2,24	Aluminium..	−0,44
Étain.......	+1,63	Argent.....	+1,62	Nickel......	−8,86

Les métaux se classent à peu près dans le même ordre que pour le phénomène de Hall.

3°. *Torsion*, *enroulement*, *vibrations*, etc. — Mousson avait remarqué aussi que la résistance des fils de *fer* et de *cuivre*

(¹) Mousson, *Arch. de Genève*, t. XXXI, p. 111; 1856.
(²) Sir W. Thomson, *Math. and Phys. papers*, t. II, p. 189 et suiv.
(³) Tomlinson, *Ph. Mag.* [5], t. XVII, p. 400; 1884. — *Journ. de Phys.* [2], t. III, d. 366; 1884.

augmente quand on les enroule sur un cylindre, sans doute par un effet de la tension.

M. Hopps [1] arrive à des résultats inverses avec les fils de *cuivre*, *plomb*, *aluminium*, *magnésium*, *argent*. Pour le *fer*, un premier enroulement produit le même effet, mais la variation change de sens après quelques opérations semblables.

Diverses autres expériences n'ont pas fourni les mêmes résultats ; le phénomène dépend beaucoup de l'état initial du fil et du mode d'enroulement.

La torsion produirait aussi un accroissement de résistance [2], plus grand pour l'*acier* et le *fer* que pour le cuivre.

Enfin, il n'est pas établi que les vibrations aient une influence appréciable.

Ces diverses actions mécaniques ne paraissent pas susceptibles de lois générales.

Le recuit pendant un temps très court produit généralement une diminution de résistance, mais l'inverse a lieu si le recuit est prolongé et à une température élevée ; il paraît difficile de faire la part qui est due à l'oxydation du métal.

La trempe augmente beaucoup la résistance de l'*acier*, mais d'une manière très inégale suivant les propriétés chimiques ou mécaniques du métal. On a vu combien ces diverses opérations modifient les qualités du *bismuth*.

De même, le passage à la filière augmente la résistivité du fer et de l'acier et diminue celle du cuivre.

Enfin différents observateurs ont cru constater que la résistance des métaux est modifiée par le seul fait du passage d'un courant, mais il ne paraît pas établi que cet effet soit indépendant des variations de température.

4° *Aimantation*. — On doit encore à Lord Kelvin l'observation curieuse que l'aimantation temporaire du *fer* ou permanente de l'*acier*, dans le sens longitudinal, augmente sensiblement leur résistance.

Quand l'acier doux et le fer [3] sont aimantés par un courant dans le sens longitudinal ou transversal, l'accroissement de résistance serait d'abord proportionnel au carré du cou-

(1) J. Hopps, *Ph. Mag.* [5], t. XVIII, p. 433 ; 1884.
(2) Gerosa, *Nuovo Cimento* [3], t. XV, p. 38 ; 1884.
(3) W. G. Adams, *Ph. Mag.* [5], t. I, p. 153 ; 1876.

…lur éprouverait au contraire une … De même, le passage d'un courant … pour effet de diminuer la résistance de … celle du fer ou de l'acier doux.

… la résistance des métaux magnéti… augmente dans le sens de l'aimant… la direction perpendiculaire; pour … qui sont diamagnétiques, l'accrois… se produit dans les deux directions.

… d'assez grandes discordances entre les … par différents observateurs; on doit sans … au défaut d'identité des échantillons sur … les expériences.

… de **la lumière.** — Le *sélénium* présente un … particularités. La forme métallique conduit … que la variété cristallisée et la conductivité … avec la température, comme pour les diélectri… adier (²) trouve que la résistance diminue d'une … jusqu'à 125° et passe, vers 163°, par un maxi… qui paraît correspondre à un changement d'état. … (³), la variation serait très rapide et à peu près … après M. Sh. Bidwell (³), au contraire, il y aurait … de résistance entre 20° et 30°.

… M. W. Smith (⁴) cette découverte importante que … devient plus conducteur sous l'action de la lu… modification ainsi produite disparait très rapide… que le corps est ramené à l'obscurité.

…emens (⁵) obtient une variété très sensible en mainte… dant assez longtemps le sélénium amorphe à 210°. …efroidissement, la matière présente un aspect cristal… conductivité est doublée par la lumière diffuse et dé… la lumière solaire directe.

…ion de la lumière paraît instantanée, mais l'effet dure … un temps appréciable. En plaçant entre la source et le …m un disque tournant percé d'un certain nombre de

(¹) …UCCHI, *Atti del R. Ist. Veneto* (5), t. V, p. 17; 1882.
(²) CADIER, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCII, p. 1407; 1881.
(³) …LFORD BIDWELL, *Ph. Mag.* (V), t. XI, p. 302; 1881 et t. XX, p. 178; 1885.
(⁴) …LOUGBY SMITH, *Amer. journ. of sc.*, t. V, p. 301; 1873.
(⁵) SIEMENS, *Pogg. Ann.*, t. CLVI, p. 334; 1875.

augmente quand on les enr[illegible] constaté que la résis-
par un effet de la tension. [illegible] la vitesse de rotation

M. Hopps [1] arrive à des [illegible] la résistance à diffé-
cuivre, *plomb*, *aluminium*. [illegible] un éclairage de durée
un premier enroulement p[illegible] l'accroissement de ré-
tion change de sens après [illegible] de 8 secondes.

Diverses autres expéri[illegible] irrégulier, car la lumière
résultats; le phénomène d[illegible] de sélénium et, pour
fil et du mode d'enroulem[illegible]

La torsion produirait [illegible] du sélénium provient
tance [2], plus grand pou[illegible] se trouvent les cristaux.

Enfin, il n'est pas ét[illegible] beaucoup plus grande. Ainsi,
fluence appréciable. [illegible] cristallisé en poudre avec un

Ces diverses actions [illegible] d'argent ou le graphite
tibles de lois générales. [illegible] conductrice sensible à la lu-

Le recuit pendant un [illegible] ne se produit si on mé-
une diminution de rési[illegible] conductrice, telle que la
est prolongé et à une te[illegible]
faire la part qui est du[illegible] si d'autres corps ne joui-

La trempe augment[illegible] M. Bœrnstein [4], par exem-
mais d'une manière tr[illegible] le *platine* en lames minces
ques ou mécaniques [illegible] lumière, la conductivité de
opérations modifient [illegible] de 0,00015 par une longue

De même, le passa[illegible] lame de soufre [5] fondu
fer et de l'acier et du[illegible] augmenterait aussi sous l'in-

Enfin différents ob[illegible] ces différentes observations
tance des métaux est [illegible]
courant, mais il ne [illegible] observé par M. Arrhenius [6]
pendant des variatio[illegible] Pour des couches minces

[illegible] *Aimantation*. [illegible] obtenus par évaporation
vation curieuse que [illegible] la conductibilité augmente
manente de l'*acier*. [illegible] clairement. L'action du spectre
sibiement leur rési[illegible] maximum pour les rayons

Quand l'acier [illegible]
rant dans le sens [illegible]
de résistance se[illegible]

[illegible] XXXII.
[illegible] XVII.
[illegible]

voisins de la raie G; elle paraît en relation directe avec les propriétés photographiques.

M. Graham Bell [1] a eu l'idée d'appliquer les variations de résistance du sélénium sous l'influence de la lumière à la transmission de la parole, par un appareil dit *photophone*.

D'une manière générale, l'action des radiations de nature quelconque, calorifiques ou lumineuses, a fait l'objet de nombreux travaux, parmi lesquels nous citerons en particulier ceux de M. Mercadier [2], et que nous ne pouvons étudier ici dans leurs détails.

MM. Adams et Day [3] ont même constaté que la lumière produit sur le sélénium une véritable force électromotrice.

En plaçant dans l'eau distillée une plaque de sélénium cristallin (fondu vers 200°) et une lame de platine réunie à la première par un fil de platine, R. Sabine [4] trouve qu'à l'obscurité, le sélénium est positif par rapport au platine et que la force électromotrice est d'environ $0^{v},1$. Si on éclaire l'appareil par la lumière du jour, la force électromotrice change de signe et devient $-0^{v},05$. Par suite des effets de la polarisation, le sélénium redevient ensuite positif.

M. Fritts [5] prépare des plaques minces de sélénium en les fondant sur une lame métallique que l'on chauffe ensuite pour transformer le sélénium à l'état cristallin; on le recouvre alors d'une feuille d'or transparente. La lumière solaire transmise au travers de l'or, qui laisse passer les rayons verts, peut rendre la résistance de ces éléments 30 ou 40 fois moindre. En outre, quand on réunit les deux feuilles métalliques à un galvanomètre, l'action de la lumière produit un courant permanent dont la force électromotrice est à peu près proportionnelle à l'éclairement. Le phénomène ne paraît pas thermoélectrique, car les rayons obscurs sont sans effet.

700. **Poudres métalliques.** — Une masse formée de poudres métalliques présente une résistance considérable à cause de la petite étendue relative des surfaces de contact; elle devient conductrice quand on y a produit une série d'étincelles élec-

[1] Voir A. Bréguet, *Journ. de Phys.*, t. IX, p. 369; 1880.
[2] E. Mercadier, *C. R. de l'Acad. des Sciences;* 1881 et suiv., *passim.*
[3] Adams et Day, *Proceed. L. R. S.*, t. XXV, p. 113; 1876.
[4] R. Sabine, *Nature*, t. XVII, p. 512; 1878.
[5] C. E. Fritts, *Amer. Journ.* t. XXV, p. 465; 1883.

triques (¹). M. C. Onesti place ces limailles dans un tube de verre; la conductibilité de l'appareil est à peu près nulle, mais elle prend une valeur notable après qu'on l'a fait traverser par la décharge d'une bobine d'induction. L'effet était très variable suivant la compression de la limaille.

M. Branly prépare, à la température de fusion de la résine, un mélange intime de limaille fine d'aluminium et de résine que l'on coule dans un tube de verre renfermant deux tiges de cuivre comme électrodes. Ce tube intercepte complètement le courant d'une pile, mais il suffit de produire des étincelles dans le voisinage pour que sa résistance tombe à quelques centaines d'ohms et même beaucoup moins.

Le même phénomène se produit si on a réuni d'abord les électrodes pendant un instant par une pile d'un grand nombre de couples. Cette conductibilité est passagère, car elle disparaît par un simple choc sur le tube de verre.

Des résultats analogues s'obtiennent avec toutes les poudres métalliques, fines ou non, soit simplement tassées, soit solidifiées par l'intermédiaire d'une substance isolante, ou encore, à un moindre degré, avec un paquet de feuilles métalliques superposées.

Lorsqu'un tube à limaille a servi à une expérience pour des décharges assez fortes, il devient plus sensible et peut déceler des décharges beaucoup moindres.

On peut, avec M. Lodge, attribuer ces variations de résistance à une sorte d'adhérence provoquée par les étincelles multiples entre les grains de limailles, comme dans l'expérience du carreau étincelant. Toutefois l'explication s'applique difficilement au cas des poudres noyées dans un corps solide; il y a sans doute une modification particulière du milieu autour des particules conductrices.

MESURES ABSOLUES.

701. Caractère des méthodes. — La résistance d'un conducteur en unités électromagnétiques ayant les mêmes dimensions qu'une vitesse (**329**), la détermination d'une résistance

(¹) CALZECCHI ONESTI, *Nuovo cim.* [3], t. XVI, p. 58; 1885. — E. BRANLY, *Journ. de Phys.* [3], t. I, p. 459; 1892 et t. IV, p. 273; 1895.

...aux deux limites, ou qu'il a re-
... le coefficient de self-induction.
φ_2 : il suffit alors de connaître
... φ_2 des flux de force magné-
... du circuit dans les deux posi-

...uellement deux parties, l'une fixe,
...tre balistique, et l'autre formée par
... e S.

...lacé dans un champ uniforme, si l'on
... composantes du champ normales à
...positions extrêmes, ces composantes
... même sens par rapport au cadre, la
...orce est $S(F_1 - F_2)$. Si l'appareil part du
... repos en un temps très court, l'induc-
...ent pas et on a

$$Rq = S(F_1 - F_2).$$

... méthode, indiquée par Weber, consiste à
...erticalement dans le champ terrestre et à le
...ur face, à partir d'une position perpendicu-
...n magnétique : la variation du flux de force
378). Si le cadre était d'abord horizontal, le
...duit par la composante verticale Z et la varia-
...tournement égale à $2ZS$.
...ant mobile autour d'un axe, il faut, dans le pre-
... cet axe de rotation soit bien vertical ou du
...ndiculaire à la composante H. S'il fait un angle
H et un angle γ avec la verticale, la composante
...intervient ; en appelant I l'inclinaison, la variation
...etournement de 180° est alors

$$\ldots \cos\varepsilon - 2ZS \sin\gamma = 2HS \cos\varepsilon \left(1 + \operatorname{tang} I \frac{\sin\gamma}{\cos\varepsilon}\right).$$

... le défaut de réglage reste très faible, $\cos\varepsilon$ ne dif-
...unité que par une quantité du second ordre, mais le
...rme est proportionnel à l'angle γ et à la tangente
...linaison ; il peut ne pas être négligeable.

Une première difficulté tient à ce que la composante horizontale H du champ terrestre, qu'il est nécessaire de connaître pour évaluer les courants par la boussole des tangentes, était déterminée par la méthode de Gauss, sur laquelle on reviendra plus loin, et que cette expérience ne comporte pas une grande précision.

Pour éviter l'erreur relative à la température du fil immergé dans le calorimètre (**652**), M. Flechter [1] réunit les extrémités de cette résistance R par une résistance extérieure r très grande, qui reçoit un courant dérivé i. On a alors

$$JQ = I^2Rt = Iirt.$$

La mesure du courant total $I + i$ et du courant dérivé i donne alors la résistance r ou la valeur de J par la quantité de chaleur dégagée.

M. Lippmann [2] propose encore d'éliminer la détermination préalable de J en plaçant dans un même calorimètre le moteur destiné à échauffer le liquide par frottement et le fil qui doit être traversé par le courant. Si l'expérience est réglée de façon que le moteur, animé d'un mouvement uniforme par la chute d'un poids, ou le courant I, produisent alternativement la même élévation finale de température, équilibrée par les rayonnements, l'énergie mécanique W dépensée par unité de temps sera égale à l'énergie électrique I^2R correspondante du courant, d'où l'on déduira la valeur de R.

703. Décharges induites. — Dans un circuit qui ne renferme pas de force électromotrice permanente et qui est traversé par un flux de force φ, le courant induit satisfait à l'équation différentielle (**374**)

$$RI\,dt + d(\varphi + LI) = 0.$$

La quantité d'électricité q que débite le courant, pendant le temps $t_2 - t_1$, est alors

$$R\int I\,dt = Rq = [\varphi + LI]_{t_2}^{t_1}.$$

(1) L. Flechter, *Ph. Mag.* [5], t. XX, p. 1; 1885.
(2) G. Lippmann, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCV, p. 634; 1882.

Lorsque le courant est nul aux deux limites, ou qu'il a repris la même valeur, ainsi que le coefficient de self-induction, il reste simplement $Rq = \varphi_1 - \varphi_2$; il suffit alors de connaître la décharge q et la différence $\varphi_1 - \varphi_2$ des flux de force magnétique qui traversent la surface du circuit dans les deux positions extrêmes.

Le circuit comprend habituellement deux parties, l'une fixe, qui renferme le galvanomètre balistique, et l'autre formée par un cadre mobile de surface S.

Lorsque le cadre se déplace dans un champ uniforme, si l'on désigne par F_1 et F_2 les composantes du champ normales à la surface S pour les positions extrêmes, ces composantes étant comptées dans un même sens par rapport au cadre, la variation du flux de force est $S(F_1 - F_2)$. Si l'appareil part du repos pour arriver au repos en un temps très court, l'induction propre n'intervient pas et on a

$$Rq = S(F_1 - F_2). \tag{1}$$

1° Une première méthode, indiquée par Weber, consiste à placer le cadre verticalement dans le champ terrestre et à le retourner face pour face, à partir d'une position perpendiculaire au méridien magnétique; la variation du flux de force est alors $2HS$ (**378**). Si le cadre était d'abord horizontal, le flux serait produit par la composante verticale Z et la variation due au retournement égale à $2ZS$.

Le cadre étant mobile autour d'un axe, il faut, dans le premier cas, que cet axe de rotation soit bien vertical ou du moins perpendiculaire à la composante H. S'il fait un angle $90° - \varepsilon$ avec H et un angle γ avec la verticale, la composante verticale Z intervient; en appelant I l'inclinaison, la variation du flux par retournement de 180° est alors

$$2HS\cos\varepsilon + 2ZS\sin\gamma = 2HS\cos\varepsilon\left(1 + \operatorname{tang} I\,\frac{\sin\gamma}{\cos\varepsilon}\right).$$

Tant que le défaut de réglage reste très faible, $\cos\varepsilon$ ne diffère de l'unité que par une quantité du second ordre, mais le second terme est proportionnel à l'angle γ et à la tangente de l'inclinaison; il peut ne pas être négligeable.

On doit s'assurer encore que la positio
est perpendiculaire au méridien, en véri
qui le traverse ne produit pas d'action s
guille aimantée placée au centre ; l'erreur
serait du premier ordre.

Enfin la surface S doit être parallèle à
comme elle agit par sa projection sur un p
l'erreur correspondante serait du second
Si l'on désigne par g la constante du
tique, par h la composante horizontale du
point où est placé cet instrument et par α
de l'aiguille, toutes corrections faites, q
décharge q, on a (643)

$$(2) \qquad R = \frac{2HS}{q} = 2Sg\frac{H}{h}\cdot\frac{\pi}{\tau}$$

Dans ses expériences primitives [1],
qu'il a répétées plus tard avec Zöllner
culées par M. Wiedemann [3], Weber er
inducteur et pour le galvanomètre ba
bobines à peu près identiques. Dans ce
de g se calculent par les dimensions
et on doit encore apporter au facteur
à la longueur de l'aiguille (574).

Avec des barreaux de 10^c et de 20
Zöllner ont obtenu des résultats d
buent ces écarts à l'inégalité des ba
reur comme proportionnelle au c
déduisent la correction relative a
un peu arbitraire n'est pas en rap
sion des autres mesures.

On déterminait le rapport des
lations d'une aiguille ; l'angle d
la méthode de recul ou la métho
Kohlrausch [4] a introduit da

(1) W. WEBER, *Abhandl. der K. Säch*
(2) WEBER et ZÖLLNER, *Berichte der I*
(3) G. WIEDEMANN, *Versuche zur Best*
(4) F. KOHLRAUSCH, *Pogg. Ann.*; *Erg*

tion indiquée aussi par Weber. Le galvanomètre balistique est un appareil à grande sensibilité et la valeur de g est déterminée par la différence des amortissements à circuit ouvert ou fermé. L'équation (19) du n° **621** donne, en négligeant l'induction propre du circuit et supposant $\omega^2 = n^2$,

$$g^2 = \frac{2\,\text{KR}}{\text{M}^2}(\lambda' - \lambda) = \frac{2\,\text{R}}{\text{K}}\,\frac{h^2}{\omega^4}(\lambda' - \lambda),$$

$$\text{R} = 4\,\text{S}^2\text{H}^2\,\frac{\pi^2}{\tau^2\alpha^2}\cdot\frac{2}{\text{K}}\cdot\frac{\lambda' - \lambda}{\omega^4} = 8\,\frac{\text{S}^2\text{H}^2}{\text{K}\,\omega^4}\cdot\frac{\pi^2}{\tau^2}\cdot\frac{\lambda' - \lambda}{\alpha^2}.$$

Il reste alors à connaître le moment d'inertie K du système magnétique, ainsi que la composante horizontale H; celle-ci intervient au carré, de sorte que l'erreur relative correspondante est doublée dans la valeur de R.

Nous avons trouvé plus correct (1) d'éliminer en même temps les constantes h, g et H dans l'équation (2), en comparant (**639**) le galvanomètre balistique avec une boussole des tangentes formée par le cadre inducteur lui-même. Il suffit de tourner ce cadre de 90° par rapport à sa direction primitive, d'installer au centre une aiguille aimantée et de faire passer un même courant I dans le circuit commun, avec un shunt de pouvoir multiplicateur m sur le galvanomètre balistique si les sensibilités des deux appareils sont très différentes. Les déviations respectives ainsi observées sur les deux instruments étant Δ et δ, il en résulte

$$\text{I} = \frac{\text{H}}{\text{G}}\,\text{tang}\,\Delta = m\,\frac{h}{g}\,\text{tang}\,\delta,$$

$$\text{R} = 2\,\text{SG}\,\frac{m\,\text{tang}\,\delta}{\text{tang}\,\Delta}\cdot\frac{\pi}{\tau\alpha}.$$

Les déviations δ et α du galvanomètre balistique n'entrent dans la formule finale que par leur rapport; il n'est donc pas nécessaire de déterminer avec beaucoup de soin la distance de l'échelle qui sert à les évaluer et il n'y a pas de correction à faire pour l'aiguille. La déviation Δ doit être mesurée exactement et corrigée, s'il y a lieu, de la longueur de l'aiguille.

(1) MASCART, DE NERVILLE et BENOIT, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. VI, p. 5; 1885.

Les constantes S et G sont calculées par les dimensions du cadre. En appelant a le rayon moyen, N le nombre de spires et L la longueur du fil, on a, sauf des termes de correction,

$$S = N\pi a^2, \qquad G = N\frac{2\pi}{a}, \qquad SG = 2\pi^2 N^2 a = N\pi L.$$

Les quantités qu'il importe de déterminer avec soin sont donc la longueur totale L du fil, la période τ des oscillations simples et l'angle d'impulsion α.

2° Le flux de force magnétique dans un cadre peut être produit par un courant voisin; c'est la méthode employée par Kirchhoff [1]. Si ce courant varie de I_1 à I_2, et que M désigne le coefficient d'induction mutuelle des circuits, la variation du flux de force dans le premier est $M(I_1 - I_2)$; cette variation se réduit à $\pm MI$ quand on établit ou qu'on supprime le courant latéral I, ou à $2MI$ lorsque ce courant est renversé.

Si le courant I est mesuré par la déviation β dans une boussole des tangentes, dont les constantes sont H et G, l'équation (1) devient alors

$$(3) \qquad R\frac{h}{g}\frac{\tau}{\pi}\alpha = 2M\frac{H}{G}\operatorname{tang}\beta, \qquad R = 2\pi M\frac{H}{h}\cdot\frac{g}{G}\cdot\frac{\operatorname{tang}\beta}{\tau\alpha}.$$

La plupart des expériences ont été faites avec des bobines égales, à petite gorge, centrées sur le même axe. Le coefficient d'induction mutuelle M peut alors être déterminé en fonction des rayons moyens a et a' et de la distance x de leurs plans moyens (586). Si l'on fait $a' = a$, la valeur de M est une fonction de l'angle γ défini par la relation

$$\sin\gamma = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + x^2}}.$$

Comme le coefficient M est une longueur, c'est-à-dire une fonction homogène du premier degré des variables a et x, on peut écrire

$$\frac{dM}{M} = \lambda\frac{da}{a} + \mu\frac{dx}{x}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda + \mu = 1.$$

(1) Kirchhoff, *Pogg. Ann.*, t. LXXVI, p. 412; 1849.

On a, en effet, par les propriétés connues des fonctions homogènes,

$$M = f(a, x) = af'_a + xf'_x, \qquad dM = f'_a\,da + f'_x\,dx;$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{af'_a}{af'_a + xf'_x}\cdot\frac{da}{a} + \frac{xf'_x}{af'_a + xf'_x}\cdot\frac{dx}{x}.$$

L'erreur relative commise sur la valeur de M se déterminera ainsi par les facteurs λ et μ en fonction des erreurs relatives sur les mesures de a et de x. La table suivante a été calculée par Lord Rayleigh (¹) pour deux cercles égaux :

γ.	$\frac{x}{2a}$.	λ.	μ.	$\frac{M}{a}$.
60°	0,577	2,61	−1,61	0,316
70°	0,364	2,18	−1,18	0,597
75°	0,268	1,98	−0,98	0,828
80°	0,176	1,76	−0,76	1,186

La mesure de la distance x étant plus difficile, on répète les expériences après avoir retourné les bobines sur elles-mêmes de manière qu'elles occupent toutes les positions relatives. C'est ce qui a conduit les observateurs à employer des bobines enroulées sur des montures de bronze, afin que le repérage puisse se faire plus exactement.

Nous avons employé des bobines inégales concentriques avec leurs plans moyens en coïncidence. On a alors $x = 0$ et le calcul de M se fait par la formule (16)″ du n° **586**, ou simplement par l'expression (11)′ du n° **585**.

M. Roïti (²) a proposé de prendre comme circuit inducteur soit une longue bobine cylindrique de section S renfermant n spires par unité de longueur, soit un solénoïde circulaire de n spires par unité d'arc, en prenant pour l'induit N′ tours de fil enroulé sur la surface extérieure.

Dans le premier cas (**571**), on a sensiblement $M = 4\pi n N' S$. Dans le second cas (**405**), si x désigne le rayon de la circonférence sur laquelle se trouve un élément dS de la section, le

(¹) Lord Rayleigh, *Comparaison of meth. for the determ. of resist.*; 1884.
(²) Roïti, *Atti. Ac. Torino*; 1882. — *Nuovo Cim.* [3], t. XV, p. 97; 1884.

Les constantes S et G sont calculées
cadre. En appelant a le rayon moyen,
et L la longueur du fil, on a, sauf des

$$S = N\pi a^2, \qquad G = N\frac{2\pi}{a}, \qquad SG$$

Les quantités qu'il importe de
donc la longueur totale L du fil, la
simples et l'angle d'impulsion α.

2° Le flux de force magnétique da
duit par un courant voisin ; c'est
Kirchhoff [1]. Si ce courant varie d
coefficient d'induction mutuelle
flux de force dans le premier est
se réduit à $\pm M$I quand on établi
rant latéral I, ou à $2M$I lorsque

Si le courant I est mesuré par
sole des tangentes, dont les co
tion (1) devient alors

$$(3) \qquad R\frac{h}{g}\frac{\tau}{\pi}\alpha = 2M\frac{H}{G}\operatorname{tang}\beta,$$

La plupart des expériences
égales, à petite gorge, centré
d'induction mutuelle M peut
des rayons moyens a et a'
moyens (586). Si l'on fait
tion de l'angle γ défini par

sin

Comme le coefficient
fonction homogène du
peut écrire

$$\frac{dM}{M} = \lambda\frac{da}{a} + \ldots$$

$$R\frac{-d}{-a}$$

dans l'équa-
boussole des
qui donne

$$\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\Delta} \cdot \frac{\operatorname{tang}\delta}{\tau\alpha}.$$

alors dans la formule
s nécessaire de mesurer
les corrections relatives
rès faibles.

la comparaison des deux
écurité, M. Rowland [1] et
sposition plus compliquée
rmé de deux bobines symé-
g. Un cadre indépendant,
le plan de symétrie, constitue
ussole des tangentes de cons-
pouvant être calculées par les

Δ et δ' produites par un même
sert à mesurer le courant induc-
on a

$$= 2\pi M\frac{g}{g} \cdot \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\Delta} \cdot \frac{\operatorname{tang}\delta}{\alpha}$$

(1) KIRCHHOFF, *Pogg. Ann.* 325 et 429 ; 1878.
127 et 189 ; 1877.

...ées par cette méthode,
...mètre pour mesurer les
...fig. 202) étaient placées
... l'une contenant la pile E,
...ance à mesurer R formait
...ence consistait à mesurer
...quand on faisait passer la
... où elle est parallèle à A' et

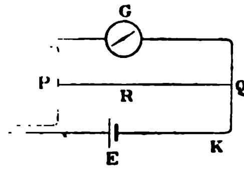


Fig. 202.

...t d'induction mutuelle est maximum,
...laire où ce coefficient est nul.
...s résistances des circuits A et A', les
...espondantes des courants permanents
...électromotrice E sont

$$\ldots (I' - I)R = I'(R + r') - IR,$$
$$\ldots (I' - I)R = I(R + r) - I'R.$$

...les coefficients de self-induction des deux
... $+ i'$ les courants relatifs à la période varia-
...en tenant compte des relations précédentes,

$$- iR + \frac{d}{dt}[M(I + i) + L'(I' + i')] = 0,$$
$$\ldots - i'R + \frac{d}{dt}[M(I' + i') + L(I + i)] = 0.$$

...ités q et q' d'électricité induites pendant toute la
...at variable, où le coefficient d'induction mutuelle
... à 0, satisfont aux équations

$$q'(R + r') - qR - MI = 0,$$
$$q(R + r) - q'R - MI' = 0;$$

il en résulte

$$q = M\frac{(R+r')I'+RI}{(R+r)(R+r')-R^2} = \frac{M}{R}\cdot\frac{(R+r)(R+r')+R^2}{(R+r)(R+r')-R^2}I,$$

$$Rq = MI\left[1+\frac{2R^2}{R(r+r')+rr'}\right].$$

Le courant I est déterminé par la déviation permanente δ du galvanomètre et la décharge q par l'angle supplémentaire d'impulsion α, ce qui donne finalement

$$R = \pi M\frac{\tang\delta}{\pi\alpha}\left[1+\frac{2R^2}{(R+r)(R+r')+rr'}\right].$$

Si la résistance R du pont est très petite par rapport à celles des circuits, le second terme de la parenthèse est presque nul; en tous cas, il est facile de l'évaluer.

Lorsque la déviation δ est assez faible, on peut admettre que l'arc d'impulsion à partir de la position d'équilibre est le même qu'à partir du zéro.

Au lieu d'observer un seul arc d'impulsion, M. Roïti mesure la déviation permanente produite par une succession de décharges correspondant à la rupture ou à la fermeture du circuit; un commutateur interrompt le courant inducteur n fois par seconde et ne ferme le circuit induit sur le galvanomètre que pendant la durée d'une seule des phases variables du courant inducteur, établissement ou suppression. La déviation α relative aux décharges et la déviation δ obtenue dans le même galvanomètre par le courant inducteur I donnent alors

$$nq = \frac{H}{G}\tang\alpha, \qquad I = \frac{H}{G}\tang\delta;$$

$$R = \frac{MI}{q} = nM\frac{\tang\delta}{\tang\alpha}.$$

La méthode est ainsi ramenée au maximum de simplicité pour ce qui est du nombre des quantités à mesurer, mais elle comporte quelques incertitudes résultant de la rapidité avec laquelle se succèdent les interruptions. On peut craindre que, par suite des effets de polarisation et des extra-courants, l'intensité du courant inducteur au moment de la rupture ne dif-

fère de l'intensité relative au régime permanent; enfin, il est possible encore que l'interruption fasse perdre une partie du courant induit. Cette dernière cause d'erreur, en particulier, aurait pour effet d'augmenter le nombre trouvé pour la résistance R et, par suite, de diminuer la valeur de l'unité.

704. Amortissement des systèmes. — Les oscillations d'un aimant dans un cadre à circuit ouvert ou fermé (621) donneront la résistance R du circuit par l'une des expressions

$$(4)\qquad R = \frac{G^2 M}{2H}\,\frac{\omega^2+\lambda^2}{\lambda'-\lambda} + 2L\lambda' = \frac{G^2 M}{2H}\,\frac{\omega'^2+\lambda'^2}{\lambda'-\lambda} + 2L\lambda.$$

La valeur de L se déterminera par les dimensions du cadre ou, comme on le verra plus loin, par comparaison avec un coefficient d'induction mutuelle.

Pour le terme principal, il faut connaître la constante G du cadre, qui entre au carré, et le rapport du moment magnétique M de l'aimant à la composante H du champ terrestre. Ce rapport peut d'ailleurs s'écrire

$$\frac{M}{H} = \frac{K}{H^2}(\omega^2+\lambda^2) = \frac{M^2}{K(\omega^2+\lambda^2)};$$

il suffirait donc de déterminer le moment d'inertie K du système et l'une des constantes M ou H.

M. Weber négligeait le terme relatif à l'induction propre du circuit et calculait la constante G par les éléments de construction de la bobine, mais alors il faut lui donner des dimensions qui ne comportent pas un amortissement rapide, et on conçoit qu'il y ait intérêt à augmenter autant que possible l'effet qu'on veut mesurer, c'est-à-dire la différence des deux amortissements à circuit ouvert ou à circuit fermé.

Il est donc préférable de déterminer la constante G par comparaison avec un autre galvanomètre G′ de dimensions connues, en employant un shunt au besoin. Les déviations équivalentes δ et δ' dues à un même courant donnent

$$\frac{H}{G}\operatorname{tang}\delta = \frac{H'}{G'}\operatorname{tang}\delta',$$

$$\frac{G^2 M}{H} = G'^2\,\frac{K}{H'^2}(\omega^2+\lambda^2)\,\frac{\operatorname{tang}^2\delta}{\operatorname{tang}^2\delta'} = G'^2\,\frac{H}{H'}\cdot\frac{M}{H'}\,\frac{\operatorname{tang}^2\delta}{\operatorname{tang}^2\delta'}.$$

La première de ces expressions, emplo
ıe fait pas intervenir le moment magnétiq
la composante H' du champ terrestre en
formule, ce qui double l'erreur relative d

Avec la seconde, on déterminera le r
et H' par les oscillations d'une aiguille e
comme on le verra plus loin, par la dé
barreau sur une boussole quand on le
normale au méridien. Toutefois, il est
quer alors que le barreau ne se trou
état que pendant les expériences d'os
à tenir compte de l'influence du cham
du moment magnétique.

Pour échapper à cette difficulté,
du cadre à peu près perpendicular
et ramène l'aimant dans la même
suspension bifilaire.

Soit C le coefficient du bifilair
le méridien dans la position de r
de réglage, et θ la torsion cor
condition d'équilibre est

$$C \sin\theta - MH$$

Pour des oscillations de fail
subissent des variations égale
cas $d\alpha + d\theta = 0$, de sorte que l

$$(C \cos\theta + MH \cos\alpha)\, d\theta$$

Comme l'angle α est trè
se réduit sensiblement à M

Il faut ainsi, dans l'équat
le couple MH par MH cot θ
ser l'expression de R trou
leur de θ déterminée par l
avec l'angle α, c'est-à-dir

(1) DORN, *Wied. Ann.*, t. XV
(2) H. WILD, *Mém. de l'Ac.*

la valeur de H, ce qui oblige à suivre d'une manière continue les variations des éléments magnétiques terrestres.

Il est digne d'attention que la méthode d'amortissement a presque toujours donné, sauf dans les dernières expériences de M. Dorn, des nombres trop élevés pour les résistances et, par suite, des valeurs trop petites pour l'unité.

On peut remarquer d'abord que le calcul suppose les déviations très petites, tandis qu'on est amené par l'expérience à observer des déviations notables pour rendre plus facile la mesure de l'amortissement qui doit être rapide ; dans ces conditions, il n'est plus permis de supposer que la constante G est indépendante de l'angle d'écart. Toutefois, les approximations faites dans le calcul, par l'hypothèse de petites déviations, ne paraissent pas fournir une explication suffisante du désaccord signalé.

L'aimantation temporaire du barreau par les courants induits eux-mêmes joue un rôle qui ne paraît pas négligeable ([1]), car ces courants sont très intenses.

Lorsque le barreau oscille de part et d'autre du méridien, l'aimantation temporaire est normale à sa direction, proportionnelle au champ Gi du courant induit, et peut être représentée par fGi ; si V désigne le volume de l'aimant, le moment magnétique correspondant est $fGiV$. Cette aimantation ne modifie guère l'équation $(11)'$ du n° 621 relative à l'induction, puisque le travail du courant sur l'aimant transversal est à peu près nul, mais l'action de la terre introduit dans l'équation $(13)'$ un couple $HfGiV$ de signe contraire au couple MGi, de sorte que le second membre de cette équation doit être remplacé par

$$i(MG - fHGV) = MGi\left(1 - f\frac{HV}{M}\right).$$

Il en résulte finalement que, dans l'expression (4) de la résistance R, le moment magnétique M doit être multiplié par le facteur $1 - f\frac{HV}{M}$.

Or, si A désigne l'aimantation moyenne de l'aimant, B celle

([1]) Mascart, *C. R. de l'Acad. des sciences*, t. C, p. 318; 1885.

amplitude V
ités d'un
si θ est
le cadre

réduisent
se sur-
quantités
alors

des

manent
le I. et

dynamo-
nera la ré-
avec des
ner le coef-

donner un
au centre
au plan
GM sin ωt
ente le pro-

706. Champ moyen d'un cadre tournant. — Ces méthodes 'ont pas été appliquées pour la mesure des courants alter-atifs, mais elles conduisent à une expérience plus simple.

On peut remarquer, dans le cas du cadre tournant, que le ourant a toujours la même direction dans un azimut donné, ien qu'il change de sens par rapport au circuit à chaque emi-révolution; le champ magnétique du courant induit en haque point varie périodiquement, mais la résultante n'est as nulle. Comme le courant est maximum, sauf un retard dû des effets secondaires, quand le cadre est parallèle au champ xtérieur, la direction de cette résultante, au centre du cadre, st à peu près perpendiculaire à la composante H du champ xtérieur; une aiguille aimantée placée en ce point sera donc éviée de sa position primitive.

Soit α la déviation de l'aiguille et x l'azimut du cadre. Si n tient compte de la direction réelle du courant et du champ e l'aiguille, le flux de force qui traverse le circuit est

$$\mathrm{HS}\sin x + \mathrm{MG}\cos(x - \alpha),$$

t la force électromotrice d'induction

$$[\mathrm{HS}\cos x + \mathrm{MG}\cos(x - \alpha)]\frac{dx}{dt} = \mathrm{HS}\,\omega\left[\cos x + \frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{HS}}\cos(x-\alpha)\right].$$

On a d'ailleurs $\frac{di}{dt} = \omega\frac{di}{dx}$; en posant $\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{HS}} = k$, l'équation du ourant devient

$$L\omega\frac{di}{dx} + \mathrm{R}i = \mathrm{HS}\,\omega[\cos x + k\cos(x - \alpha)].$$

Si la rotation est uniforme et assez rapide, par rapport à la ériode d'oscillation de l'aiguille, pour que celle-ci prenne ne déviation permanente lorsque le régime est établi, les uantités ω et α sont des constantes; l'équation différentielle une solution de la forme $i = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$ et devient, près substitution,

$$(\mathrm{RA} + L\omega\mathrm{B} - \mathrm{HS}\,\omega)\cos x + (\mathrm{RB} - L\omega\mathrm{A})\sin x = \mathrm{HS}\,\omega k\cos(x - \alpha).$$

Cette équation doit être satisfaite à toute époque, c'est-à-dire quelle que soit la valeur de x; il en résulte

$$\mathrm{RA} + L\omega \mathrm{B} = \mathrm{HS}\omega(1 + k\cos\alpha),$$
$$\mathrm{RB} - L\omega \mathrm{A} = \mathrm{HS}\omega k \sin\alpha;$$
$$\mathrm{A}(\mathrm{R}^2 + L^2\omega^2) = \mathrm{HS}\omega[\mathrm{R}(1 + k\cos\alpha) - L\omega k \sin\alpha],$$
$$\mathrm{B}(\mathrm{R}^2 + L^2\omega^2) = \mathrm{HS}\omega[\mathrm{R}k\sin\alpha + L\omega(1 + k\sin\alpha)].$$

Le couple produit par le courant induit sur l'aiguille est la moyenne des valeurs de $\mathrm{MG}i\cos(x-\alpha)$ relatives aux positions du cadre pendant une demi-révolution, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{MG}}{\pi}\int_0^\pi (\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x)\cos(x-\alpha)\,dx = \frac{\mathrm{MG}}{2}(\mathrm{A}\cos\alpha + \mathrm{B}\sin\alpha).$$

Comme l'aiguille est soumise en même temps à l'action du champ, la condition d'équilibre est

$$\mathrm{G}(\mathrm{A}\cos\alpha + \mathrm{B}\sin\alpha) = 2\mathrm{H}\sin\alpha,$$

ou, en remplaçant A et B par leurs valeurs,

$$\mathrm{R}^2 + L^2\omega^2 = \frac{\mathrm{GS}\omega}{2}\left[\mathrm{R}\,\frac{k+\cos\alpha}{\sin\alpha} + L\omega\right],$$
$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{GS}\omega}{2}\left(\frac{k+\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{L\omega}{\mathrm{R}}\right) - \frac{L^2\omega^2}{\mathrm{R}}.$$

Les termes qui renferment le coefficient L sont très petits; on peut donc y substituer à la résistance R la valeur approchée $\mathrm{R}_0 = \frac{\mathrm{GS}\omega}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. Remplaçant k par $\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{HS}}$, il reste finalement

(5) $$\mathrm{R} = \mathrm{R}_0 + \frac{\mathrm{G}^2}{2}\,\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}}\,\frac{\omega}{\sin\alpha} + L\omega\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{L^2\omega^2}{\mathrm{R}_0}.$$

Dans cette expression, le terme principal R_0 comprend, outre la déviation observée et la vitesse angulaire, le produit GS qu'on déduit des dimensions du cadre. Le second terme exige que l'on connaisse le rapport du moment magnétique de l'aiguille au champ terrestre; ce rapport est petit et peut être évalué avec toute l'approximation désirable.

renferment le coefficient de self-
pourrait bien éliminer ce coefficient
rnis par deux expériences à vitesses
mais il vaut mieux le calculer directe-
par comparaison avec un coefficient
C'est par suite d'une erreur commise
que la valeur de l'ohm adoptée par
tion Britannique s'est trouvée un peu
rité.

urner le cadre dans le champ terrestre
on pourrait aussi mettre l'axe de rota-
la composante efficace H' est alors la pro-
sur un plan perpendiculaire à l'axe, ce qui
nt α l'angle que fait ce plan avec le méridien

$$Z^2 - H^2 \cos^2 \alpha = Z^2(1 + \cot^2 I \cos^2 \alpha).$$

ons les plus simples sont celles où l'axe de ro-
le méridien, auquel cas $H' = Z$. Abstraction
ction propre, le changement de sens du courant
plan horizontal; l'action électromagnétique sur
à chaque instant perpendiculaire au plan du
sultante dans une direction horizontale perpen-
l'axe. Tant que l'aiguille reste dans le méridien,
de variation dans le flux émané de l'aiguille rela-
cadre, et par suite pas d'induction de la part de
cet effet peut être considéré comme négligeable,
tion reste très petite.

is, l'induction propre du cadre amène une compli-
uvelle; le changement de sens du courant se fait en
rs du plan horizontal et la composante efficace doit
ipliée par un cosinus dont la détermination exacte
des difficultés. On perd ainsi le plus grand avantage
emière disposition.

omité de l'Association Britannique a utilisé cette mé-
en faisant tourner un cadre autour d'un axe vertical
champ terrestre. Les premières expériences ont été

F. Weber, *Der absol. Werth. der S. Q. U.*, Zurich; 1884.

réalisées en 1863 et 1864 ([1]); différentes causes d'erreur ayant paru mettre en doute l'exactitude des résultats, l'expérience a été reprise avec des soins particuliers par Lord Rayleigh et M. Schuster ([2]), puis par Lord Rayleigh ([3]).

Le cadre tournant est formé de deux bobines identiques laissant entre elles l'espace nécessaire pour y placer l'appareil de suspension de l'aiguille; le cadre est en cuivre, mais composé de deux parties séparées par de l'ébonite, de manière à mettre obstacle aux courants induits dans la masse.

Dans les premières expériences, on employait un régulateur de vitesse et un compteur de tours; dans les dernières, lord Rayleigh mesurait la vitesse par un procédé stroboscopique. L'axe porte un disque de carton sur lequel sont tracés cinq cercles concentriques divisés en dents alternativement blanches et noires, respectivement au nombre de 60, 32, 24, 20 et 16. On observe ce disque de loin, à l'aide d'une lunette, à travers un système de fentes parallèles portées par la branche d'un diapason qui oscille devant un écran fixe portant un système de fentes identiques. Le diapason faisant 127 oscillations simples par seconde, si les dents d'un des cercles paraissent immobiles, c'est qu'elles se substituent l'une à l'autre pendant l'intervalle exact d'une ou de plusieurs oscillations. L'observateur qui a l'œil à la lunette peut maintenir la vitesse absolument constante par le simple frottement de la main sur une des cordes qui servent à transmettre le mouvement.

L'aiguille, soutenue par un fil de cocon, était mise par un tube en verre à l'abri des courants d'air extérieurs. On avait donné à cette aiguille un moment magnétique extrêmement faible, parce qu'il intervient comme terme de correction. Dans les expériences du comité, elle était formée d'une petite sphère d'acier de $0^c,8$ de diamètre, pesant environ 2 grammes, et son aimantation n'était guère que le quarantième de celle que peut recevoir l'acier. Son moment était égal à celui que prendrait un fil de fer doux de 10 grammes dans le champ terrestre. Le poids de l'équipage formé par l'étrier et le miroir était relativement considérable et donnait une période d'os-

([1]) *Brit. Assoc. Reports;* Newscastle, 1863 et Bath, 1864.
([2]) Lord Rayleigh et A. Schuster, *Proc. of the R. S. L.*, t. XXXII, p. 124; 1881.
([3]) Lord Rayleigh, *ibid.*, t. XXXIII, p. 398; 1882.

ion d'environ 10^s, c'est-à-dire au moins 30 fois plus grande celle de l'aiguille libre.

and il s'agit de mesurer une déviation, la petitesse de ille et la faiblesse de son moment magnétique n'ont en ie aucune influence sur l'exactitude du résultat; mais on directrice est alors très faible et la torsion du fil peut venir pour une part notable. En outre, diverses causes, que les courants d'air produits par les variations de érature dans la cloche qui renferme le système mobile, ent à troubler l'équilibre.

importe surtout que l'axe magnétique reste absolument iable, et sous ce rapport la forme sphérique n'est pas la avantageuse. On l'avait choisie à cause de cette propriété ne sphère aimantée uniformément exerce la même action ieure qu'un aimant infiniment petit placé en son centre, on peut atteindre très sensiblement le même résultat avec ylindre dont le carré du rapport de la longueur au diae soit égal à 1,5.

rd Rayleigh a trouvé préférable de substituer à la sphère ystème de quatre petites aiguilles de $0^c,5$ de longueur, faisant à la condition précédente, montées parallèlement es quatre arêtes d'un petit cube de liège.

s expériences du comité présentent quelques anomalies la plus grave est que les différences des valeurs obtenues ent en moyenne à 3 pour cent, suivant que le cadre tourne un sens ou dans l'autre. Ce résultat ne peut s'expliquer ne torsion préalable du fil de suspension, car cette toraurait dû être telle que la position d'équilibre de l'aie eût fait un angle de 12°, et même de 26°, dans certains avec le méridien magnétique.

s anomalies analogues, quoique beaucoup plus faibles, se manifestées dans les expériences de 1881. M. Kohlrausch indiqué, comme une des causes possibles, les courants its dans le bâti métallique de l'appareil. Pour répondre te objection, les différentes pièces du bâti ont été cou, isolées les unes des autres, et on pouvait à volonté rér entre elles les communications; l'expérience a montré les courants induits n'ont qu'une influence négligeable, parait tendre à diminuer la déviation.

réalisées en 1863 et 1864 ([1]); [illegible]
paru mettre en doute l'exacti[illegible]
été reprise avec des soins p[illegible]
M. Schuster ([2]), puis par L[illegible]

Le cadre tournant est f[illegible]
laissant entre elles l'espac[illegible]
de suspension de l'aiguill[illegible]
posé de deux parties sép[illegible]
mettre obstacle aux cou[illegible]

Dans les premières e[illegible]
teur de vitesse et un [illegible]
lord Rayleigh mesura[illegible]
pique. L'axe porte un [illegible]
cinq cercles concent[illegible]
blanches et noires. [illegible]
20 et 16. On obse[illegible]
à travers un syst[illegible]
che d'un diapaso[illegible]
système de fent[illegible]
tions simples p[illegible]
raissent immobi[illegible]
pendant l'interv[illegible]
L'observateur [illegible]
absolument [illegible]
une des cord[illegible]

L'aiguille [illegible]
tube en ver[illegible]
donné à [illegible]
faible, par[illegible]
les expéri[illegible]
d'acier d[illegible]
aimantati[illegible]
peut rec[illegible]
drait un [illegible]
restre. [illegible]
était re[illegible]

([1]) *Bri*[illegible]

([2]) Lo[illegible]

([3]) Lo[illegible]

707. Forces électromotrices instant. reste ouvert, dans l'expérience du cad. établit une différence de potentiel ent. Comme la capacité de ce fil est très p. pas avec des condensateurs, le coura. et le terme relatif au coefficient de s. Dans ce cas, la différence de potenti. égale à chaque instant à la force produite par le champ, et elle prend le cadre passe dans le plan du m.

En comparant cette force élect. d'opposition avec la différence de parés par une résistance R sur un un courant constant I, on aura

$$RI = \omega I' \tag{6}$$

Il en est de même si on fait cadre maintenu immobile et différence de potentiel ωGM e. aussi être déterminée par une

Dans les deux cas, la force être opposée pendant un t. motrice variable d'inductio. de R. Il est important de intervenir la résistance du ment variable des points

M. Carey-Foster ([1]), à thode, l'appliqua seulement

On réglait par tâtonne. vanomètre quelconque, tion du cadre, pour qu sage dans le méridien boussole des tangente par le même courant I

$$R\frac{H}{G}\tan \ldots$$

[1] CAREY-FOSTER, *Brit.* ...

qui existe entre les deux extré-
ance R, traversée par un courant
manière que le courant soit nul dans
fait partie. L'équilibre est encore
nécessairement variable des con-

$$RI = \frac{MI'}{T}.$$

mesure d'intensité en faisant $I' = I$,
la résistance R sur le circuit même du
inductrice.

duit ainsi à la mesure d'une longueur et
alors de calculer le coefficient M et de
de T de la rotation qui établit l'équilibre.
génieuse est due à Lorenz (1).

de l'expérience tiennent, d'une part à la peti-
électromotrice induite et, d'autre part, à la
des forces thermoélectriques qui naissent
pièces glissantes. On atténue ces dernières en
sorts de contact avec le même métal que le
sont sensiblement constantes, on peut alors
effet d'une manière à peu près complète en pre-
nnes des résultats obtenus pour deux directions
champ inducteur.

part, la petitesse de la force électromotrice exige
stance R soit très faible. Pour éviter les erreurs
la comparaison toujours délicate de résistances
les, Lorenz opérait directement sur des colonnes
re renfermées dans des tubes de 2 à 3 centimètres
re soigneusement calibrés, de manière à pouvoir en
par un simple calcul la valeur de l'unité mercurielle.
istances employées ont varié de $0^{\omega},0002$ à 0,0015. Ces
de mercure doivent d'ailleurs être placées dans des
que l'on maintient à température constante.

Rayleigh et Mrs Sidgwick (2) tournent la difficulté par
orte de multiplication. Deux points A et B du circuit

(1) RENZ, *Pogg. Ann.*, t. CXLIX, p. 251; 1873. — *Wied. Ann.*, t. XXV, p. 1; 1885.
(2) RD RAYLEIGH et Mrs SIDGWICK, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1883, p. 245.

707. Forces électromotrices instantanées. — Si le circuit reste ouvert, dans l'expérience du cadre tournant, l'induction établit une différence de potentiel entre les extrémités du fil. Comme la capacité de ce fil est très petite s'il ne communique pas avec des condensateurs, le courant est toujours très faible et le terme relatif au coefficient de self-induction négligeable. Dans ce cas, la différence de potentiel des extrémités du fil est égale à chaque instant à la force électromotrice $\omega HS \cos x$ produite par le champ, et elle prend sa valeur maximum quand le cadre passe dans le plan du méridien.

En comparant cette force électromotrice par une méthode d'opposition avec la différence de potentiel de deux points séparés par une résistance R sur un circuit qui est parcouru par un courant constant I, on aura

$$RI = \omega HS \cos x. \tag{6}$$

Il en est de même si on fait tourner un aimant au centre du cadre maintenu immobile et dont le circuit reste ouvert; la différence de potentiel $\omega GM \cos x$ aux extrémités du fil pourra aussi être déterminée par une méthode d'opposition.

Dans les deux cas, la force électromotrice constante RI doit être opposée pendant un temps très court à la force électromotrice variable d'induction et la mesure de I donnera la valeur de R. Il est important de remarquer que l'on n'a pas à faire intervenir la résistance du circuit ni la résistance nécessairement variable des points de contact.

M. Carey-Foster [1], à qui l'on doit le principe de cette méthode, l'appliqua seulement à titre d'essai.

On réglait par tâtonnements le courant I, évalué par un galvanomètre quelconque, la résistance R ou la vitesse de rotation du cadre, pour qu'il y eut équilibre au moment du passage dans le méridien. On utilisait ensuite le cadre comme boussole des tangentes, en mesurant la déviation δ produite par le même courant I; l'équation (6) donne alors

$$R\frac{H}{G}\operatorname{tang}\delta = \omega HS, \qquad R = \omega\frac{GS}{\operatorname{tang}\delta}.$$

[1] CAREY-FOSTER, *Brit. Ass. Rep.*; 1881, p. 2.

L'expérience paraît ainsi très simple. Il est vrai que la capacité du fil n'est pas négligeable, en toute rigueur, surtout si la bobine comprend un grand nombre de spires. Dans ce cas (**393**), la différence de potentiel maximum V des extrémités ne correspond pas au passage dans le méridien et n'est pas égale à l'amplitude ωHS de la force électromotrice, mais une discussion plus complète des données du problème montre que cette cause d'erreur n'a pas d'influence appréciable [1].

Si le champ dans lequel tourne le cadre est produit par le courant même I sur le trajet duquel on prélève la résistance R, l'équation (6) devient, pour $x = 0$, en appelant M le coefficient d'induction mutuelle des deux circuits,

$$\mathrm{RI} = \omega M\mathrm{I}, \qquad \mathrm{R} = \omega M.$$

M. Wuilleumier [2] a employé cette disposition, indiquée par M. Lippmann, en plaçant le cadre au centre d'une bobine cylindrique. La rotation était produite par un moteur Gramme muni d'un frein que l'observateur tient à la main et la vitesse réglée, par un procédé stroboscopique, sur un diapason entretenu électriquement ; l'équilibre était constaté par un électromètre capillaire.

Si l'axe de la bobine est parallèle au méridien magnétique, le champ terrestre s'ajoute à celui du courant. Deux expériences avec des courants de sens contraires donneront ainsi des résistances R_1 et R_2 telles que

$$\mathrm{R}_1\mathrm{I} = \omega(M\mathrm{I} + \mathrm{HS}), \qquad \mathrm{R}_2\mathrm{I} = \omega(M\mathrm{I} - \mathrm{HS});$$

$$\frac{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}{2} = \omega M.$$

Le champ terrestre n'a plus d'influence si l'axe de la bobine est perpendiculaire au méridien.

Au lieu de calculer la valeur de M par les dimensions de la bobine, on remarquera que si elle était indéfinie avec n tours par unité de longueur, on aurait $M = 4\pi n\mathrm{S}$ (**571**).

Pour éliminer la correction relative aux faces terminales,

[1] G. Lippmann, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCIII, p. 813 et 955; 1881 et t. XCVI, p. 1348; 1883. — M. Brillouin, *ibid.*, t. XCIII, p. 845 et 1069.
[2] H. Wuilleumier, *Journ. de phys.* [2], t. IX, p. 220; 1890.

principal étant séparés par une résistance R s
qui conviendrait pour l'équilibre, on les joi
vation de résistance notablement plus grand
ensuite sur la dérivation quelle est la résistan
point A, qu'on doit interposer entre les élect
quant aux ressorts du disque pour établir l'é

Le courant principal étant I et le courant
on a $(I - i) R = ir$ et la différence de potentie
à la résistance r' est

$$ir' = I \frac{R}{R+r} r',$$

ce qui donne, pour la condition d'équilibre

$$\frac{M}{T} = R \frac{r'}{R+r}.$$

Si la dernière fraction est égale à 0,01
tance R comprise entre les points A et
grande que si l'on avait établi un conta

L'erreur commise dans le calcul de
l'évaluation du rayon moyen a de la
disque peut être connu avec une ex
grande. Dans ses premières expérien
à a' une valeur trop peu différente de
champ croît très rapidement au v
moindre erreur commise sur le rayo
sidérable sur le coefficient M. Dans
il plaçait le disque dans le champ se
bobine longue. Celle-ci était formé
comprenant 472 spires enroulées s
100^c de longueur et 33^c de diamèt
une formule analogue à celle du n

Lord Rayleigh employait deu
tiques placées soit au contact,
Avec cette dernière disposition
peu près indépendante de cell
luation du rayon moyen et d
avec laquelle on évalue la di

ne
ffet
et
pro-
force

teur ten-
à ce point
l'unité de

Conférence de
de la colonne
de section, dont
unités C.G.S.,
30 et plus voisine
périences ultérieures
nes de confiance sont
0,32 et 106,27.
iences en elle-même, on
initif de $106^{c},30$ par la
(421) pour définir l'*ohm*
tifié. L'étalon B.A.U. vau-

$$017 = \frac{1}{1,014}.$$

$4,17.10^7$ à $4,23.10^7$; il est très probable que l'
la calorie diffère extrêmement peu de 4,191.
voisine de celle (4,189) qui a été obtenue par

L'emploi d'une force électromotrice d'in
lieu à beaucoup d'expériences, dont une pa
dans la discussion qui précède ; il n'est pa
rapidement en revue les différentes méth
celles qui paraissent mériter le plus de c
vue expérimental.

La rotation d'un cadre de 180° prése
ciales. L'opération doit être faite en u
rapport à la période des oscillations
tique ; le départ et l'arrêt brusque
mettre en mouvement exigent des
particulières et causent un ébranle
les positions de repère doivent êtr
dien et l'axe de rotation vertical.

L'expérience n'est plus sujette
quand l'induction est produite p

L'amortissement des aimants
bres manifestement trop faibl
rieures, faites avec plus de soi
de ceux que fournissaient les

Enfin la force électromotri
nant, suivant qu'on en déte
leur instantanée, et la mét
raissent pas donner lieu à
actuel de la science.

Une circonstance don
d'une manière suffisant
appelé l'attention, est le
bines. Cette cause d'err
la force électromotrice
que l'isolement laisse
serait suffisant pour d

Dans le cas plus si
ou plusieurs spires c

(1) Lord Rayleigh, *Phil.*

...e a pour densité 1,04; la
... température augmente,
... concentrées, et varie en
... plus étendues.
...ence encore plus grande
... Pellat (1) a reconnu que le
... une de cuivre et qu'elle est
...rangibles; elle peut abaisser

...elvin à sulfates concentrés et
...trice est très sensiblement égale
...re de 15°.
...ouple en circuit ouvert, il est pré-
... étalon la différence de potentiel
...ux-ci sont réunis par une résistance
...fférence augmente d'abord pendant
... la fermeture du circuit, mais elle de-
...istance remarquable.
...Clark est presque entièrement formé de
...qui en rend le transport et la conserva-
...éléments qui le constituent sont les sui-
...e zinc, sulfate de mercure et mercure.
...dissolution concentrée de sulfate de zinc
...: on ajoute dans la dissolution refroidie
...xyde de mercure jusqu'à formation d'une
...maintient ensuite ce mélange pendant quel-
...mpérature de 100°. La pâte est versée à la
...e pur préalablement chauffé et un bâton de
...astré. Les électrodes extérieures sont for-
...atine reliés au zinc et au mercure. A cause
... physique, le couple se polarise facilement,
...pas à reprendre sa force électromotrice pri-
...atières employées sont bien pures, les mo-
...ruits ne diffèrent pas entre eux d'un millième.
...e, on n'a plus à craindre la diffusion des dis-
...ouple, une fois monté et scellé dans le verre,
...t à servir. A la température de 15°, la force
...st de $1^{\text{volt}},434$.

...*de l'Ac. des Sc.*, t. LXXXIX, p. 222; 1879.

CHAPITRE QUATRIÈM

FORCES ÉLECTROMOT

710. Couples étalons. — On n'est p
réaliser un étalon défini et invariable d
comme pour les résistances; on est
mieux, de recourir aux couples éle
des éléments liquides.

Le *couple Daniell* à sulfates est tr
il faut prendre diverses précautions
des deux dissolutions ou pour évi
l'étalon de Lord Kelvin, où les li
perposés en raison de leurs den
est nécessaire de renouveler les
céder à une nouvelle série de m

La force électromotrice dép
tions. Avec du sulfate de cuiv
de richesse croissante, M. Ca
électromotrice varie de 1^{volt},
de 1,137 pour du sulfate de
ment jusqu'à 1,111 pour un
reste ensuite constante.

Toutefois, pour une mé
nifeste encore des différ
doute à l'inégale pureté

Les variations de tem
von Helmholtz (³), qua

(¹) H. S. Carhart, *Amer.*
de Phys. [2], t. IV, p. 98;
(²) L. Rayleigh, *Ph. Tra*
(³) Helmholtz, *Sitz. de*

. *t* par la formule

o,0002*t*).

est constitué par une
verre recourbé rempli
dans une dissolution de
plonge une tige de zinc
varie avec la richesse de
elle est sensiblement égale
mplée. La polarisation est
Daniell, mais la force électro-
valeur normale.
lectromotrice d'un couple, il
s grande résistance, afin que la
entre deux points qui compren-
ésistance, la différence de poten-
e la force électromotrice totale.
s (657) permet de réaliser cette ex-
rès simple. Les chevilles ordinaires
de chaque cadran, on réunit l'étalon
n y joignant l'unité supplémentaire,
sistance de 10 000 ohms. Si on place
couronnes deux chevilles auxiliaires sé-
ance de *n* ohms, la différence de potentiel
une fraction égale à *n* dix-millièmes de
rêmes ou, sensiblement, de la force élec-

es ne permettent pas la prise de résistances
t bout à bout deux boîtes différentes dont
nes sont réunies à l'étalon. Avec *n* unités
boîte et *n'* unités sur la seconde, la résistance
$+ n'$ et la différence de potentiel des bornes
est une fraction égale à $\frac{n}{n+n'} = \frac{n}{N}$ de celle des
es. On change en même temps les deux nom-
le manière que la somme $n + n' = N$ reste cons-
mple de 10 000 ohms.

(¹) ...ry, *Journ. de Phys.* (2), t. IX, p. 234; 1890.

La force électromotrice du couple L. Clark dim[illegible]
la température s'élève. Les valeurs du coefficient d[illegible]
d'après différents physiciens, oscillent de 0,00041
ces différences peuvent tenir au mode de constru[illegible]
aussi à une évaluation inexacte de la température t[illegible]
à connaître à cause de l'état physique du couple.
minant la température avec les plus grandes p[illegible]
M. Pellat trouve que ce coefficient est constant ent[illegible]
et égal à 0,000781 ; on aurait donc

$$E_0 = \frac{1^{\text{volt}},434}{1 - 0,000781 \cdot 15} = 1^{\text{volt}},451.$$

Il semble résulter encore des expériences de [illegible]
et Cooper [1], que la force électromotrice n'a [illegible]
valeur, à une température déterminée, suivant q[illegible]
s'échauffe ou se refroidit. Ces modifications ser[illegible]
diquer une sorte de retard ou d'hystérésis, cor[illegible]
mantation ; en outre, on ne retrouve pas exact[illegible]
électromotrice primitive en revenant à la temp[illegible]
Toutefois, les changements sont assez faibles
ait pas à en tenir compte quand l'exactitude [illegible]
est de l'ordre du millième.

M. Gouy [2] a proposé un couple formé de
solution de sulfate de zinc au dixième cont[illegible]
de mercure précipité, et mercure. Le tout es[illegible]
flacon en verre clos où des électrodes de pl[illegible]
lampe, communiquent au zinc et au mercu[illegible]

Ce couple a une très grande résistance, d[illegible]
Quand on le ferme sur lui-même, il se
ment, mais il reprend par simple agitatio[illegible]
à moins de 0,001. Une centaine de couple[illegible]
manière n'ont présenté avec la moyenne
rieurs à 0,0005 et les différences individ[illegible]
accidents, n'atteignent pas 0,001.

La force électromotrice diminue enc[illegible]
ture s'élève, mais beaucoup moins que p[illegible]

(1) W. E. Ayrton et W. R. Cooper, *Proced. L.*
(2) Gouy, *Journ. de Phys.* [2], t. VII, p. 532; 18[illegible]

·l

· le
em-
uple
it su-
de, en
e com-
érer. Le
ues pré-
couples
nces dues
souvent le
nt la force
e du couple
faisants.
que le couple
électriques; le
es de o" et de
Daniell au zinc

tromotrice de dif-
opposant une force

5; 1896.

711. Mesures électrostatiques. — Les forces électromotrices peuvent être déterminées, en valeurs absolues ou relatives, par les différentes méthodes indiquées pour la mesure des différences de potentiel. Quand il s'agit des piles et des courants permanents, ces méthodes sont, en général, plus simples que dans les expériences d'électrostatique, parce que les appareils sont alors des sources d'électricité et que les pertes dues aux communications sont aussitôt réparées, de sorte qu'il n'y a pas, en général, à tenir compte de la capacité des corps qui interviennent.

Remarquons encore que, pour les mesures absolues, les méthodes électrostatiques donnent des résultats évalués dans le même système et que, si l'on veut passer d'un système à l'autre, il est nécessaire de connaître le rapport des unités. Lord Kelvin (1), par exemple, a trouvé qu'un couple Daniell employé dans certaines expériences valait 0,00374 en unités électrostatiques. Si on admet 3.10^{10} pour le rapport des unités, ce résultat correspond à $0,00374 \times 3.10^{10} = 1,12.10^{8}$ en unités électromagnétiques, ou 1,12 volts.

712. Piles ouvertes. — Méthode d'opposition. — Pour les piles à liquides, on doit considérer la force électromotrice à deux points de vue, suivant que le circuit reste ouvert ou fermé, ou encore qu'il vient d'être fermé pendant quelque temps. Dans le premier cas, la force électromotrice est la somme des différences de potentiel aux surfaces de contact des élements successifs. Dans le second cas, la polarisation des électrodes intervient et la force électromotrice réellement en jeu peut avoir une valeur toute différente; c'est cette dernière qui présente surtout un intérêt pratique et qui règle l'intensité du courant. Il est donc très important de spécifier les conditions des expériences.

Le courant est nul dans un circuit lorsque la somme algébrique des forces électromotrices est nulle. Pour appliquer cette méthode d'opposition directe, il faut avoir à sa disposition une série de couples très faibles par rapport à celui qu'on veut étudier. M. J. Regnauld (2) prenait, comme unité principale, un couple thermoélectrique *bismuth-cuivre* dont les

(1) Sir W. Thomson, *Reprint of papers on Electr. and Magn.*, p. 245.
(2) J. Regnauld, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. XLIV, p. 453; 1855.

Un aimant permanent de moment magnétique M, centre d'une longue bobine cylindrique ayant n sı unité de longueur, est animé d'un mouvement de uniforme avec la vitesse angulaire ω. La force électr induite serait rigoureusement sinusoïdale pour un indéfinie, avec l'amplitude $\omega M 4\pi n$. Le couple est pla même circuit, la communication établie par un conta ment du maximum et on mesure la vitesse ω pour la courant est nul; cet équilibre était constaté par un él tre capillaire dont la sensibilité avait été portée jusq et même $\frac{1}{30\,000}$ de volt. La force électromotrice dı étudié est alors

$$E = \omega M 4\pi n(1 - \varepsilon),$$

le terme de correction ε pouvant être facilement cal les dimensions de la bobine.

L'aimant était formé par 65 barreaux en acier d' de 6 à 8c de longueur, et des précautions ont été pr maintenir son moment magnétique constant.

La valeur M était déterminée par la méthode de ' laquelle on reviendra plus loin; c'est là le seul p de l'expérience.

Pour la température de o°, M. Limb a obtenu :

	volt
Couple Latimer Clark......	1,453
Couple Gouy............	1,39·
Couple Daniell...........	1,09

713. Méthodes de compensation. — On peut ce nom les méthodes dans lesquelles la force est compensée par la différence de potentiel d'un circuit traversé par un courant permanen

Le circuit d'une pile constante E ([1]) renfer tats R et r (fig. 203), le dernier compris entre A et B. Le couple e à mesurer est relié aux p l'intermédiaire d'un galvanomètre G (ou d quelconque, tel que l'électromètre capillaiı

([1]) POGGENDORFF, *Pogg. Ann.*, t. LIV, p. 161; 1841.



produits par les forces électromotrices E et e étant tous deux dirigés vers le point A. On règle les deux rhéostats de façon que le courant soit nul dans le galvanomètre; si R et r représentent les résistances de la portion AEB du circuit et du pont AB, le courant principal est

$$(1) \qquad I = \frac{E}{R+r} = \frac{e}{r}.$$

Pour éliminer la résistance de la pile E, qui est comprise

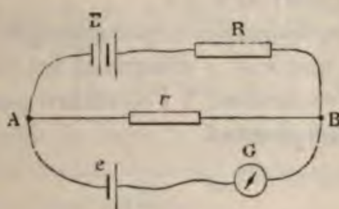


Fig. 203.

dans R, on ajoute aux rhéostats des résistances R′ et r' telles que l'équilibre soit encore établi; il en résulte

$$\frac{e}{E} = \frac{r}{R+r} = \frac{r+r'}{R+R'+r+r'} = \frac{r'}{R'+r'}.$$

L'expérience prend une forme extrêmement simple lorsque le rhéostat r est formé par un fil homogène AB (fig. 204), sur

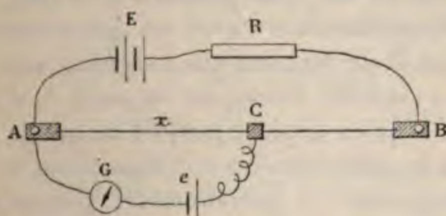


Fig. 204.

lequel on cherchera le point de contact C qui convient pour l'équilibre. Appelant l la résistance totale du fil AB, x et x' les résistances des longueurs AC qui ramènent le galvanomètre au zéro quand on donne à la résistance totale du cir-

cuit AEB successivement les valeurs R et $R+R'$, on a

$$\frac{e}{E} = \frac{x}{R+l} = \frac{x'}{R+R'+l} = \frac{x'-x}{R'}.$$

Il est préférable d'éliminer la force électromotrice E de la pile principale, qui est mal définie, et d'opérer par substitution en introduisant successivement dans le circuit du galvanomètre les deux forces électromotrices e et e' que l'on compare. Les expériences donnant les rapports de e et e' à E, on en déduit le rapport de e à e'.

Dans la seconde disposition, par exemple, si la valeur de R reste constante et que x et x' désignent les valeurs de la résistance AC qui correspondent à l'équilibre pour les deux couples e et e', on a simplement

$$\frac{e}{e'} = \frac{x}{x'}.$$

Avec un fil homogène, les résistances x et x' sont proportionnelles aux valeurs correspondantes de la distance AC. On règle alors la résistance R de manière que ces distances soient comprises dans la longueur du fil AB.

Si les deux expériences sont faites en même temps, il n'est plus nécessaire de supposer que la force électromotrice principale E reste constante ; c'est la disposition connue sous le nom de *potentiomètre* de Clark (1).

On intercale entre les deux points A et B (fig. 205), la plus grande force électromotrice e' avec un galvanomètre G', et on règle le rhéostat R de manière que l'aiguille reste au zéro. Le second couple e est relié, d'une part au point A, d'autre part au contact mobile C qu'on déplace jusqu'à ce que le courant soit aussi nul dans le galvanomètre correspondant G. Au besoin, on pourrait supprimer ce galvanomètre, puisqu'après le premier réglage l'aiguille du galvanomètre G' ne peut rester au zéro que s'il ne passe aucun courant dans le fil ajouté, mais la sensibilité serait alors beaucoup moindre.

Comme le couple étudié se trouve traversé par des courants, pendant les tâtonnements nécessaires pour atteindre

(1) L. Clark, *Journ. of tel. eng.*, t. II, p. 20 ; 1873.

la position d'équilibre, il finit par être plus ou moins polarisé. On atténue cet inconvénient en interposant sur le circuit une clef qu'on abaisse seulement pendant un temps très court. Néanmoins, lorsque les couples sont facilement polarisables,

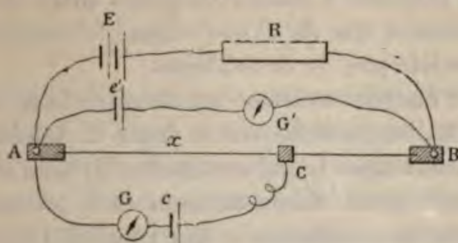


Fig. 205.

il est prudent, avant de faire la lecture définitive, ou de les remonter ou de les laisser reposer un temps assez long pour que la polarisation disparaisse.

714. **Mesures électromagnétiques.** — L'équation (1) donne la force électromotrice e en valeur absolue, si l'on connaît la résistance r interposée entre les points de dérivation et l'intensité I du courant principal. C'est ainsi que M. L. Clark [1] a déterminé la force électromotrice de son étalon.

Lord Rayleigh et Mrs Sidgwick [2] ont répété l'expérience

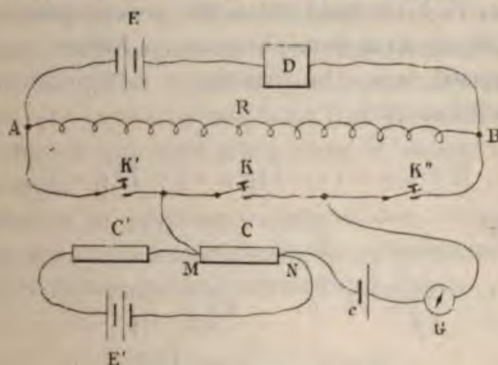


Fig. 206.

à l'aide d'une disposition un peu plus compliquée (fig. 206), Le circuit de la pile principale E renferme un électrodynamo-

[1] L. Clark, *Ph. Tr. L. R. S.*; 1873. — *J. of teleg. eng.*, t. VII, p. 85.
[2] Lord Rayleigh et Mrs Sidgwick, *Ph. Tr. L. R. S.*; 1884, p. 411.

mètre-balance D, qui mesure le courant principal I, et sistance R, aux extrémités A et B de laquelle sera pri dérivation. C et C′ sont deux boîtes de résistances qui f le circuit d'une pile auxiliaire E′ et dont les chevilles s(nœuvrées de manière à laisser toujours entre les pôle pile une résistance fixe de 10 000 ohms; le courant I′ es riable s'il n'existe pas de dérivations.

On laisse d'abord ouvertes les deux clefs K′ et K″ (mant la clef K, on cherche sur la boîte C la résistanc annule le courant dans le galvanomètre G, d'où résulte Ouvrant ensuite la clef K, on ferme K′ et K″, et on cherc la même boîte la résistance r' qui rétablit l'équilibre alors $e = I'r' + IR$ et, par suite,

$$\frac{e}{r} = \frac{e - IR}{r'} = \frac{IR}{r - r'}.$$

715. Piles fermées. — Lorsqu'une pile polarisabl(sistance ρ_0 et de force électromotrice E_0 en circuit ou fermée par une résistance r, elle prend une force él(trice plus petite E, et sa résistance elle-même a gén(une valeur différente ρ.

La différence $E_0 - E$ représente la force électro(polarisation. Si l'intensité est assez grande pour q risation atteigne dans tous les cas sa valeur ma aura, en faisant varier la résistance interpolaire. d'équations telles que

$$E = I(\rho + r) = I'(\rho + r') = I''(\rho + r''),$$

qui donnent

$$E\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I'}\right) = r - r', \qquad E\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I''}\right) = r -$$

$$\rho = \frac{Ir - I'r'}{I' - I} = \frac{Ir - I''r''}{I'' - I} = \ldots..$$

L'identité des différentes valeurs ainsi obt(vérifier que la polarisation et la résistance rest(Deux expériences analogues détermineront le

forces électromotrices E et E_1. Si on règle les résistances de manière que les intensités I et I′, I_1 et I'_1, soient les mêmes de part et d'autre, on a simplement

$$\frac{E_1}{E} = \frac{r_1 - r'_1}{r - r'}.$$

Dans ce cas, le second membre est un rapport de résistances et le galvanomètre n'a pas besoin d'être gradué [1].

La méthode suivante, indiquée par Poggendorff [2], conduit au même résultat d'une manière plus immédiate. Les deux couples E et E′ (fig. 207) sont placés dans un même circuit de

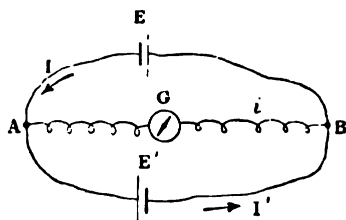


Fig. 207.

telle façon que leurs forces électromotrices s'ajoutent, et on introduit une dérivation AB contenant un galvanomètre. Le point A étant quelconque, on déplace le point B ou on modifie les résistances de manière que le courant soit nul dans la dérivation; les résistances totales R et R′ des deux segments AEB, AE′B du circuit sont alors dans le rapport des forces électromotrices.

Pour éliminer la résistance propre des couples, il suffit encore d'ajouter aux deux segments des résistances r et r' telles que le galvanomètre reste au zéro ce qui donne

$$\frac{E}{E'} = \frac{R}{R'} = \frac{R+r}{R'+r'} = \frac{r}{r'}.$$

716. Galvanomètres à grande résistance. — Lorsque la résisance r du circuit est très grande par rapport à la résistance

[1] WHEATSTONE, *Ph. Tr. L. R. S.*, t. CXXXIII, p. 313; 1843.
[2] *Voir* BOSSCHA, *Pogg. ann.*, t. XCVII, p. 172; 1851.

On a ainsi le rapport de la force électromotrice E de la pile polarisée à sa valeur primitive E_0.

Si l'on veut éliminer la résistance ρ de la pile, il suffit de remplacer R par une autre résistance R' et de déterminer la valeur correspondante m'. Il en résulte

$$\frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} \cdot \frac{\rho + R}{R} = \frac{m'}{m_0} \frac{\rho + R'}{R'} = \frac{R' - R}{m_0\left(\frac{R'}{m'} - \frac{R}{m}\right)}.$$

Le rapport des différences de potentiel V et E_0 se déterminerait d'ailleurs directement par un électromètre ou par un galvanomètre à grande résistance.

718. Etude d'une pile en action. — Il est souvent très utile d'étudier les propriétés d'une pile en fonction, en évitant autant que possible d'interrompre le circuit.

Quand la pile est fermée, la différence de potentiel V aux deux pôles est donnée par l'équation (2). Si on l'ouvre pendant un temps assez court pour que la polarisation n'ait pas diminué, la différence de potentiel V_0 entre les mêmes points est égale à E. Les valeurs de V et V_0 étant comparées au moyen d'un électromètre ou d'un galvanomètre à grande résistance, on en déduit la résistance ρ de la pile par la relation

$$\frac{R + \rho}{V_0} = \frac{R}{V} = \frac{\rho}{V_0 - V}.$$

Supposons que la pile soit formée de n couples disposés en série, dont les forces électromotrices sont $e_1, e_2, \ldots, e_n$ et les résistances $r_1, r_2, \ldots, r_n$. On a d'abord, par l'expérience précédente,

$$E = \Sigma e = V_0,$$

$$\rho = \Sigma r = R\,\frac{V_0 - V}{V}.$$

On répétera ensuite la même épreuve pour chacun des couples en particulier. Les différences de potentiel v et v_0, avant et après l'ouverture de la pile, donnent aussi

$$v = e - Ir = v_0 - Ir,$$

$$r = \frac{v_0 - v}{I} = R\,\frac{v_0 - v}{V}.$$

Comme vérification expérimentale, il est clair que la force électromotrice et la résistance totales de la pile doivent être respectivement égales à la somme des valeurs obtenues pour les différents couples, ce qui exige que l'on ait

$$V_0 = \Sigma v_0, \qquad V_0 - V = \Sigma(v_0 - v);$$
$$V_0 = \Sigma v_0, \qquad V = \Sigma v.$$

Un couple n'a d'effet utile dans la série que si sa force électromotrice e est supérieure à la chute de potentiel Ir produite par la résistance qu'il apporte, c'est-à-dire que si la différence de potentiel v est positive. Le seul signe de v permet donc de reconnaître les couples qui sont en mauvais état, sans qu'il soit nécessaire d'ouvrir le circuit.

Si tous les couples sont de même espèce, ils ont la même force électromotrice et ne diffèrent que par la résistance. On peut donc poser $E = ne$, et la condition $e > Ir$ devient

$$e > \frac{ne}{R+\rho} r, \qquad \text{ou} \qquad r < \frac{R+\rho}{n}.$$

Il en résulte que, si la résistance propre d'un couple n'est pas inférieure à la n^e partie de la résistance totale, il y aurait avantage à retirer ce couple de la pile.

719. **Méthode des décharges.** — Dans un système électrique arrivé au régime permanent, un condensateur relié à deux points du circuit prend une charge proportionnelle à leur différence de potentiel V. En outre, ce condensateur ne modifie pas l'état primitif, si ses pertes sont négligeables et les forces électromotrices constantes.

Pour une capacité C, la charge q est égale à CV. La comparaison des décharges mesurées au galvanomètre balistique permettra donc de déterminer le rapport des différences de potentiel; la méthode équivaut encore à l'emploi d'un électromètre ou d'un galvanomètre à grande résistance.

Pour éviter les corrections compliquées, il est avantageux que les arcs d'impulsion à comparer soient ramenés au même ordre de grandeur. Au lieu des shunts, dont nous avons signalé les inconvénients, il est préférable d'employer des

teaux A et B (fig. 208) : 1° par un simple fil ; 2° par un fil dans lequel est intercalé un couple Daniell ; 3° par le même fil et le même couple, mais tourné en sens contraire. Il obtient ainsi trois déviations qui déterminent les rapports des différences de potentiel correspondantes V_1, V_2 et V_3. Si on dési-

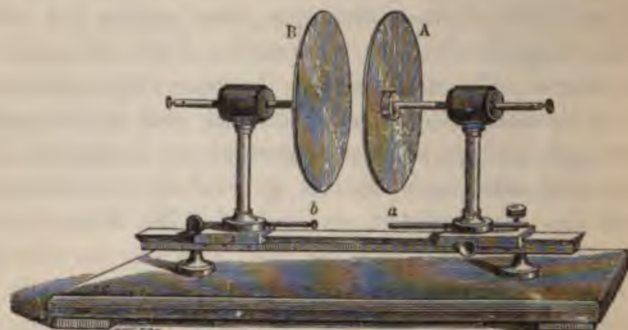


Fig. 208.

gne par V la force électromotrice de contact des deux métaux et par D celle du couple Daniell, on a

$$V_1 = V, \qquad V_2 = D + V, \qquad V_3 = D - V;$$

$$V = 2D \frac{V_1}{V_2 + V_3} = D \frac{V_1}{V_1 + V_3}.$$

La méthode exige que les plateaux soient exactement à la même distance dans les trois cas ; c'est ce que permettent les buttoirs *a* et *b*.

Différents physiciens ont opéré dans des conditions analogues. M. Pellat [1] a repris la méthode de Lord Kelvin en réunissant les deux plateaux par un fil conducteur qui renferme, non plus une force électromotrice fixe, mais une différence de potentiel variable obtenue au moyen de contacts mobiles sur un fil parcouru par un courant permanent. On règle la distance des points touchés de manière qu'après suppression des communications et écartement des plateaux, leur charge soit nulle ; la force électromotrice de contact est

[1] Pellat, *Ann. de Chim. et de Phys.* [5], t. XXIV, p. 5 ; 1881.

alors égale et de signe contraire à la différence de potentiel IR des points touchés. Une seule expérience suffit, sans qu'on ait à se préoccuper ni de la distance des plateaux ni de la graduation de l'électromètre.

Nous citerons encore une disposition ingénieuse employée par MM. Ayrton et Perry [1], quoiqu'elle paraisse plus compliquée et moins sûre.

Quatre plateaux A et B, A' et B' (fig. 209) forment deux sys-

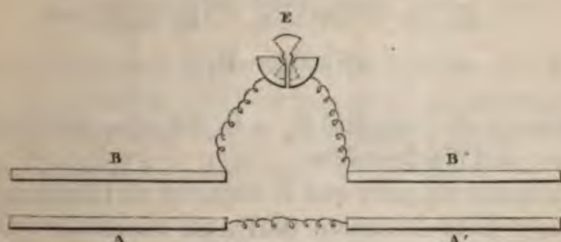


Fig. 209.

tèmes de condensateurs. Les plateaux inférieurs A et A' sont formés de métaux différents ; les plateaux supérieurs B et B', tous deux en laiton, sont isolés et communiquent respectivement avec les quadrants d'un électromètre dont l'aiguille est maintenue à un potentiel très élevé.

Une communication permanente étant établie entre A et A', on fait communiquer B et B' ; l'aiguille de l'électromètre vient au zéro. La communication entre B et B' étant rompue, on fait tourner le système des plateaux A et A' de 180°, de manière à permuter leurs positions ; la déviation de l'aiguille est proportionnelle à la différence V de potentiel entre les métaux A et A'.

Soient, en effet, c et c' la capacité des plateaux B et B', y compris les quadrants correspondants, q et q' les quantités d'électricité prises par chacun d'eux dans la première expérience, et désignons par les lettres A, A', B, B' les potentiels des conducteurs correspondants ; on a

$$q = c(B - A), \qquad q' = c'(B' - A').$$

[1] Ayrton et Perry, *Phil. Trans. R. S. L.*, for. 1880, p. 15.

Après rotation de 180°, les plateaux ont des potentiels différents A_1, B_1, A'_1, B'_1, mais les charges et les capacités des deux systèmes B et B′ sont restées invariables, ce qui donne

$$q = c(B_1 - A'_1), \qquad q' = c'(B'_1 - A_1).$$

Comme les potentiels B et B′ sont égaux dans le premier cas, et que $A' - A = A'_1 - A_1 = V$, on en déduit

$$1 = \frac{B - A}{B_1 - A'_1} = \frac{B' - A'}{B'_1 - A_1} = \frac{V}{B_1 - B'_1 - V},$$

$$2V = B_1 - B'_1.$$

La différence de potentiel $B_1 - B'_1$ est ainsi déterminée par la déviation de l'électromètre.

Cette méthode suppose que la capacité de l'électromètre est indépendante de la déviation (607), ou du moins que ses variations n'interviennent que pour une partie négligeable; en outre, la nécessité de ramener les plateaux rigoureusement à la même distance exige dans le jeu de l'appareil une perfection difficile à réaliser.

722. Métal et liquide. — Pour déterminer la force électro-

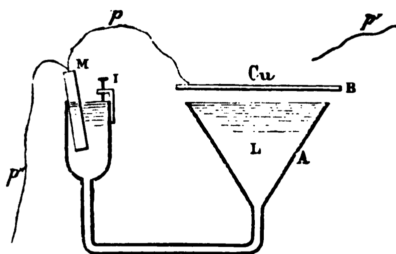


Fig. 210.

motrice de contact entre un métal et un liquide, Hankel [1] place le liquide dans un siphon (fig. 210) présentant d'un côté la forme d'un entonnoir, au bord duquel vient affleurer le liquide. Le condensateur est formé par la surface du liquide et par la lame de cuivre B; des fils de platine p et p' relient le

[1] HANKEL, *Abh. der K. S. Gess. math.-phys. kl.*; 1861 et 1865. — *Pogg. ann.*, t. CXV, p. 57; 1862, t. CXXVI, p. 286, 440; 1865 et t. CXXXI, p. 607; 1867.

ıteau B avec le métal à étudier M, qui plonge dans la se-
ıde branche du siphon, et ce dernier avec le sol.

Si on rompt les communications p et p'' et que, soulevant le ıteau B, on le mette en communication avec un électromètre r le fil p', la charge est proportionnelle à la différence de tentiel V_1 du cuivre et du liquide, c'est-à-dire à la somme s forces électromotrices de contact du cuivre avec le métal M de celui-ci avec le liquide L,

$$Cu|M + M|L = V_1.$$

On vide l'entonnoir et on substitue à la surface du liquide e lame du métal M, que l'on met en communication par un de platine avec B et avec le sol; pour la même distance, la arge correspond à la différence de potentiel $Cu|M = V_2$; il résulte

$$M|L = V_1 - V_2.$$

En prenant comme plateau inférieur A (fig. 209), la surface liquide considéré mise en communication par un siphon ec le métal du plateau A', MM. Ayrton et Perry obtiennent la rce électromotrice de contact du métal et du liquide.

Les vapeurs émanées du liquide et qui viennent se con- nser sur le plateau apportent dans ces expériences une use d'erreur qu'il est difficile d'écarter et dont il est impos- ɔle de tenir compte.

M. Gouré [1] fait écouler le liquide en gouttelettes d'un vase étallique A par un tube dont l'orifice est situé au milieu d'un lindre vertical A' de même métal, qui joue le rôle d'une veloppe fermée (**8**). Les gouttes qui tombent sont à l'état utre lorsque le liquide est au même potentiel que le lindre A', de sorte que la différence des potentiels A — A' des ux vases est égale à la force électromotrice de contact M|L ı métal avec le liquide. On la compense par la différence de ıtentiel IR prise sur le circuit d'un courant et l'équilibre t constaté par un électromètre.

Il importe que toutes les pièces métalliques de l'appareil ient identiques; on réalise cette condition au moyen de dé-

[1] Gouré de Villemontée, *Journ. de Phys.* [2], t. IX, p. 65; 1890.

pôts galvaniques. Les valeurs obtenues avec les dissolutions salines augmentent en général à mesure que la concentration diminue. Pour le cuivre en contact avec le sulfate de cuivre, ou le zinc avec le sulfate de zinc, la force électromotrice de contact passe par un maximum. L'expérience exige un ensemble de précautions délicates et les résultats obtenus ne comportent pas de relation générale.

723. Deux liquides. — La disposition de MM. Ayrton et Perry peut s'appliquer au cas de deux liquides ; on remplace les deux plateaux inférieurs A et A′ (fig. 209) par les surfaces des deux liquides en expérience qu'on réunit par un siphon. Pour permettre le retournement des vases, tout en ne laissant qu'une très petite distance entre les surfaces des liquides et les plateaux supérieurs, ces derniers sont suspendus par un châssis en forme de parallélogramme, qui permet de les soulever parallèlement à eux-mêmes, mais il y a là une nouvelle complication des appareils.

Les expériences de MM. Bichat et Blondlot [1] ne paraissent pas soulever les mêmes objections.

Deux vases X et Y, contenant l'un des liquides L, communiquent respectivement par un fil de platine avec les quadrants d'un électromètre. Le liquide L′ contenu dans le vase Z communique avec le vase X au moyen d'un siphon fermé par un diaphragme poreux. Les liquides des deux vases Y et Z étant ramenés au même potentiel par un artifice spécial, la différence de potentiel entre les vases X et Y est égale à la force électromotrice de contact L|L′. L'artifice en question consiste à faire écouler le liquide L′ du vase Z au milieu d'un cylindre sur les parois intérieures duquel le liquide L du vase Y coule d'une manière continue.

724. Discussion des expériences. — Maxwell [2] a le premier appelé l'attention sur la nature complexe du phénomène que l'on mesure par toutes les méthodes où les corps sont séparés par une couche diélectrique. Dans l'expérience relative à deux métaux M et M′ par exemple, il y a en réalité trois contacts à considérer : celui des deux métaux entre eux, et

(1) Bichat et Blondlot, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XC, p. 1202 et 1293 ; 1883. — *Journal de Phys.* [2], t. II, p. 533 ; 1883.

(2) Cl. Maxwell, *The Electrician*, 26 avril 1879.

celui de chacun des métaux avec le milieu A dans lequel il est plongé. La somme

$$M|M' + M'|A + A|M = \Delta,$$

que l'on mesure en réalité, ne serait égale à la force électromotrice vraie $M|M'$ des deux métaux que si les deux forces électromotrices $A|M$ et $A|M'$ étaient nulles, ce qui n'est rien moins que démontré, ou égales, ce qui n'est point probable. On peut appeler Δ la force électromotrice apparente, et cette remarque s'applique à toutes les méthodes. Ainsi, dans l'expérience de MM. Bichat et Blondlot, il est évident que l'effet observé représente la somme $L|L' + L'|A + A|L$.

Maxwell admet que le phénomène de Peltier donne la force électromotrice vraie entre deux métaux; comme les résultats obtenus par les méthodes calorimétriques et les méthodes électrométriques sont très différents (**179**), que les premiers nombres sont de beaucoup inférieurs aux seconds et parfois de signes contraires, il en résulterait que la force électromotrice de contact entre les corps considérés et l'air doit entrer pour la plus grande part dans le phénomène observé.

Cette manière de voir n'est pas en contradiction avec l'expérience de Lord Kelvin (**720**). Le liquide L, interposé entre les deux parties de l'anneau, intervient alors et l'expérience démontre qu'on a

$$A|M + M|L + L|M' + M'|A = 0,$$
$$M|L + L|M' = M|A + A|M'.$$

Ainsi interprétée, l'expérience prouverait simplement que les deux forces électromotrices de contact du métal avec l'air et avec un liquide oxygéné, tel que l'eau ou l'alcool, sont sensiblement égales.

L'idée la plus simple serait de répéter les mesures dans le vide absolu. M. Pellat, en réduisant la pression de l'air à 1 ou 2 centimètres de mercure, ou en remplaçant celui-ci par un gaz inerte vis-à-vis des métaux employés, tel que l'azote ou l'hydrogène, n'a observé que des variations très faibles de la force électromotrice. Pour le cuivre et le zinc, la différence

de potentiel augmente quand la pression diminue, et la variation est plus grande dans l'oxygène que dans l'hydrogène.

M. Brown ([1]), au contraire, a trouvé des différences très grandes en employant des gaz capables d'agir sur les métaux, comme l'acide chlorhydrique et l'hydrogène sulfuré. Un anneau divisé, comme celui de Lord Kelvin, est placé dans une cloche; quand on y introduit alternativement de l'air et de l'hydrogène sulfuré, l'aiguille dévie alternativement à droite et à gauche jusqu'à ce que le cuivre soit recouvert d'une couche bleue de sulfure de cuivre. Toutefois, cette altération permanente de la surface d'un des métaux laisse des doutes sur les conséquences qu'on est en droit de tirer des expériences.

Après avoir discuté les résultats fournis par les méthodes électrostatiques, Maxwell conclut ainsi :

« Ces expériences semblent montrer que l'accord que présentent les résultats obtenus par les méthodes ordinaires pour les forces électromotrices de contact, avec ceux qu'on obtient en plongeant les métaux dans l'eau ou dans tout autre électrolyte oxygéné, tient moins à l'extrême petitesse de la force électromotrice entre un métal et un gaz ou entre un métal et un électrolyte, qu'à ce fait que les propriétés de l'air concordent jusqu'à un certain point avec celles des électrolytes oxygénés. Et, en effet, si le composant actif de l'électrolyte est le soufre, les résultats changent du tout au tout, et les mêmes différences se reproduisent quand on remplace l'air par l'hydrogène sulfuré. »

La tension superficielle du mercure au contact d'un liquide ne dépend que de la différence de potentiel qui existe entre le liquide et le mercure (**196**), et cette différence est nulle lorsque la tension superficielle A est maximum, puisque la capacité X de l'unité de surface est alors nulle. La force électromotrice E, qu'il faut introduire entre les deux liquides pour atteindre le maximum de A est donc égale et de signe contraire à la différence de potentiel préexistante.

M. Garbe ([2]) en a déduit une méthode qui peut fournir des valeurs absolues, indépendantes du milieu extérieur.

Dans un électromètre capillaire, la force électromotrice

([1]) J. Brown, *Ph. mag.* [5], t. VI, p. 142; 1878 et t. VII, p. 109; 1879.
([2]) Garbe, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. IC, p. 123; 1884.

xtérieure E qui produit la tension maximum est égale à la ifférence de potentiel de contact M|L du mercure avec l'eau cidulée. Si on remplace l'eau par un liquide L', on détermiera de même la valeur de $M|L' = E'$.

Les liquides L et L' sont ensuite placés dans deux vases, au-dessus d'une couche de mercure, et communiquent par un siphon muni d'un diaphragme. La force électromotrice E_1 du couple ainsi constitué, avec des électrodes de mercure, est

$$E_1 = M|L + L|L' + L'|M = E + L|L' - E'.$$

La différence de potentiel L|L' des deux liquides sera donnée par les trois forces électromotrices E, E' et E_1.

Quand on fait varier l'étendue de la surface de contact du mercure avec l'eau acidulée (**196**), il se produit, en circuit fermé, un courant de même nature que si l'on modifiait la distance ou la surface des armatures d'un condensateur. Le changement de surface n'a plus d'influence, et le courant est nul, si l'on compense la différence de potentiel de contact des deux liquides. M. Pellat [1] fait écouler le liquide goutte à goutte dans un électrolyte; la différence de potentiel du mercure supérieur et du même métal en repos au fond du vase correspond au contact L|M de l'électrolyte et du mercure. On trouve ainsi $L|M = 0^v{,}97$ et $L|A = 0^v{,}02$ quand on remplace le mercure par l'amalgame de zinc liquide (A).

Un couple formé d'almalgame de zinc, eau acidulée et mercure a pour force électromotrice $1^v{,}44$; on a donc, en tenant compte des électrodes en platine (P),

$$1^v{,}44 = P|A + A|L + L|M + M|P.$$

L'expérience précédente donne $A|L + L|M = 0^v{,}95$; par suite

$$M|A = M|P + P|A = 1^v{,}44 - 0^v{,}95 = 0^v{,}49.$$

L'amalgame de zinc peut d'ailleurs remplacer le zinc des iles sans modification, de sorte que la valeur $0^v{,}49$ convient galement au contact du mercure avec le zinc.

(1) PELLAT, *Journ. de Phys.* [2], t. VI, p. 374; 1887 et t. IX, p. 401; 1890. — nn. de Ch. et de Phys. [6], t. XIX, p. 556; 1890.

potentiel augmente quand la pression diminue, et
on est plus grande dans l'oxygène que dans l'hyd
M. Brown (1), au contraire, a trouvé des différ
grandes en employant des gaz capables d'agir sur l
comme l'acide chlorhydrique et l'hydrogène sulf
neau divisé, comme celui de Lord Kelvin, est pla
cloche; quand on y introduit alternativement
l'hydrogène sulfuré, l'aiguille dévie alternative
et à gauche jusqu'à ce que le cuivre soit recou
che bleue de sulfure de cuivre. Toutefois, cett
manente de la surface d'un des métaux laiss
les conséquences qu'on est en droit de tirer d
Après avoir discuté les résultats fournis
électrostatiques, Maxwell conclut ainsi :

« Ces expériences semblent montrer qu
sentent les résultats obtenus par les métho
les forces électromotrices de contact, av
en plongeant les métaux dans l'eau ou
trolyte oxygéné, tient moins à l'extrême
électromotrice entre un métal et un ga
un électrolyte, qu'à ce fait que les pro
dent jusqu'à un certain point avec
oxygénés. Et, en effet, si le compos
est le soufre, les résultats changent
mêmes différences se reproduisent
par l'hydrogène sulfuré. »

La tension superficielle du merc
ne dépend que de la différence d
le liquide et le mercure (**196**),
lorsque la tension superficielle
capacité X de l'unité de surface
tromotrice E, qu'il faut intro
pour atteindre le maximum d
contraire à la différence de po
M. Garbe (2) en a déduit u
valeurs absolues, indépendan
Dans un électromètre ca

(1) J. Brown, *Ph. mag.* [5], t. VI, p
(2) Garbe, *C. R. de l'Acad. des Sc.*,

renferme des traces d'argent. L'expérience fournit ainsi une méthode très délicate d'analyse chimique.

Le nickel exposé à l'air ou mis en contact avec une dissolution de son sulfate paraît s'altérer à sa surface et se comporte dans un de ses sels comme un métal étranger ; il ne jouit des propriétés normales que si on l'a préparé par électrolyse au moment de s'en servir.

L'or et le platine sont peu sensibles à la présence de leurs propres sels, peut-être pour une cause analogue.

Cette propriété ne saurait être prévue par la considération du travail chimique, puisqu'une cathode de platine se polarise dans une dissolution de sulfate de cuivre, avec une anode en cuivre, alors que le courant n'a d'autre effet que de transporter le cuivre de l'anode sur la cathode. L'énergie nécessaire pour produire la polarisation est donc emmagasinée sous forme électrique, comme dans un condensateur.

Pour étudier le contact du mercure avec l'eau acidulée, M. Pellat dispose un électromètre capillaire en dérivation sur un courant et détermine la différence de potentiel compensatrice V qui donne à la tension capillaire sa valeur maximum. La cathode et le liquide sont alors au même potentiel; en d'autres termes, la couche électrique double est nulle (197). Dès qu'on dépasse cette valeur de V, qui est $0^v,95$ pour l'eau acidulée par $\frac{1}{6}$ d'acide sulfurique et $0^v,99$ quand on ajoute au liquide $\frac{1}{2000}$ de bichromate de soude, une bulle d'hydrogène se forme, dans des conditions plus ou moins régulières, sur la surface capillaire du mercure qui sert de cathode. L'électrolyse commence dès que le potentiel de la cathode est devenu inférieur à celui du liquide. Une autre disposition expérimentale permet de constater la même relation pour l'eau acidulée par l'acide chlorhydrique.

726. Phénomènes actinoélectriques. — Nous avons déjà signalé l'action de la lumière sur les couples électriques (710) et sur le sélénium (699). Le phénomène est plus général. Il suffit, par exemple, de placer dans l'eau salée [1] deux lames de cuivre réunies par un conducteur extérieur et d'éclairer vivement l'une des lames pour obtenir un courant appréciable.

(1) GOUY et RIGOLLOT, C. R. de l'*Acad. des Sc.* t. CVL, p. 1470 ; 1888.

trice nécessaire pour provoquer la première apparition des gaz correspond à l'excès de la chaleur de décomposition de l'eau en gaz sur la somme relative à la formation de l'hydrure et du composé oxygéné.

Les expériences de M. Bouty sont entièrement conformes à cette manière de voir. Entre les deux électrodes A et A′ était placé un fil de platine M ; on déterminait les résistances r et r' du liquide dans les intervalles AM et MA′, ainsi que les différences de potentiel correspondantes V et V′. En appelant i l'intensité du courant, p et p' les polarisations des électrodes, on avait ainsi

$$p = V - ir, \qquad p' = V' - ir'.$$

Le courant principal était produit par un couple à sulfate de zinc et de cadmium ($0^{v},365$) ou un couple Daniell, avec une densité de courant très faible rapportée à la surface des électrodes. La polarisation initiale est nulle, elle croît d'abord plus rapidement à la cathode, mais la valeur finale est notablement plus faible qu'à l'anode.

M. Lippmann [1] a constaté que le pouvoir dépolarisant d'une solution métallique est limité au métal même qu'elle renferme ; l'expérience a porté sur les cathodes.

On plonge dans une solution deux électrodes B et A, celle-ci devant servir de cathode au courant d'une pile, et un fil isolé A′ de même métal que A ; les conducteurs A et A′ sont réunis à un électromètre capillaire. Tant qu'on ne fait passer aucun courant entre B et A, l'électromètre reste au zéro. Si la dissolution ne renferme pas le métal A, le mercure de l'électromètre se déplace dès que le liquide est traversé par un courant ; la déviation persiste après l'ouverture du circuit et disparaît lentement à mesure que la polarisation se dissipe. Tel serait le cas d'électrodes en cuivre dans une solution de sulfate de zinc, de cobalt, etc. ; il suffit alors d'ajouter quelques gouttes de sulfate de cuivre, moins de $\frac{1}{1000}$, pour qu'aussitôt le mercure revienne au zéro.

L'argent se polarise de même dans les solutions de zinc, de cobalt, de nickel, de cuivre, et se dépolarise si le liquide

[1] G. LIPPMANN, *Journ. de Phys.* t. VIII, p. 48 ; 1879.

renferme des traces d'argent. L'expérience fou
méthode très délicate d'analyse chimique.

Le nickel exposé à l'air ou mis en contact av
lution de son sulfate paraît s'altérer à sa surfa
porte dans un de ses sels comme un métal ét
jouit des propriétés normales que si on l'a pré
trolyse au moment de s'en servir.

L'or et le platine sont peu sensibles à la prés
propres sels, peut-être pour une cause analogu

Cette propriété ne saurait être prévue par la
du travail chimique, puisqu'une cathode de plati
dans une dissolution de sulfate de cuivre, avec
cuivre, alors que le courant n'a d'autre effet que
le cuivre de l'anode sur la cathode. L'énergie
produire la polarisation est donc emmagasi
électrique, comme dans un condensateur.

Pour étudier le contact du mercure ave
M. Pellat dispose un électromètre capillaire
un courant et détermine la différence de p
trice V qui donne à la tension capillaire s
La cathode et le liquide sont alors au
d'autres termes, la couche électrique do
Dès qu'on dépasse cette valeur de V, q
acidulée par $\frac{1}{6}$ d'acide sulfurique et o
au liquide $\frac{1}{2000}$ de bichromate de soude.
se forme, dans des conditions plus o
la surface capillaire du mercure qui se
lyse commence dès que le potentiel d
inférieur à celui du liquide. Une aut
tale permet de constater la même re
par l'acide chlorhydrique.

726. Phénomènes actinoélectriq
signalé l'action de la lumière sur l
et sur le sélénium (699). Le ph
suffit, par exemple, de placer dan
cuivre réunies par un conducteu
ment l'une des lames pour obt

(1) Gouy et Rigollot, C. R. de l'*Acad.* d

727. Frottement des liquides ... des plaques de
une cloison poreuse, des élec... de porc, peau
portions du liquide situées de
sont à des potentiels différent ... solides ([1]). Si
courant électrique. Quincke ... en bas par des
ou de toute autre substance ... d'eau, le tube de
traverser par de l'eau pure ... cette argile tra-
relié aux électrodes indique
vement de l'eau ; ce courant ... vu déjà que la mé-
poraire, par suite de la polar... variations locales de
arrête le liquide. ... de Peltier.

La force électromotrice ... ou absorbée pen-
à la pression qui provoque ... intensité I, entre deux
pendante de l'épaisseur ... H, a pour expression

Avec de l'eau pure, la ... employée qu'à l'échauffe-
pression d'une atmosphère ... quantité correspondante
différents diaphragmes

Soufre. . . . .
Sable . . . . .
Résine. . . . .
Soie . . . . . .

... et la différence de

$$\frac{\cdot}{I} = 4{,}17\ Q_1\,;$$

L'addition d'une ... qui correspond au pas-
force électromotrice ... ou d'un coulomb.

Il en est de même ... du courant, sa détermi-
de verre ([2]). La for... calorimétrique : la seule
nelle à la pression ... chaleur qui se dégage entre
section du tube, po... Joule.
où la loi de Poiseu...

Le phénomène ... déterminations très soignées
du corps solide. M... H pour un assez grand
verre communique ... moyenne de 25°. Le
soudées latéralement ... renfermant 10 de bis-
sable est placée ... températures de 100° et de
la chute des pe... rapport est 1,29. Ce
... des températures ab-

([1]) QUINCKE, *Pogg*...
([2]) ZÖLLNER, *Pogg*...
([3]) DORN, *Wied.* ... 102 ; 1835.

...nsiblement proportionnelle
...couple doit avoir une marche
... l'expérience.
... contact II sont très faibles.
... onne le nombre le plus élevé,

... température de 13°,8 le débit
... calorie dans une soudure du
... respondante de II serait $0^v,00253$.
...motrice du couple est

$$0^v,91777.10^{-5}(t - 0,002123t^2).$$

...ntire II par la relation (209)

$$... 91777.10^{-5}(1 - 0,004246t),$$

...8 à 13°,8; les deux valeurs sont aussi
... peut le désirer.
... M. Le Roux relatives au transport élec-
... (211) ont été faites par une méthode ingé-
...s de même métal AB, A'B' (fig. 211) sont

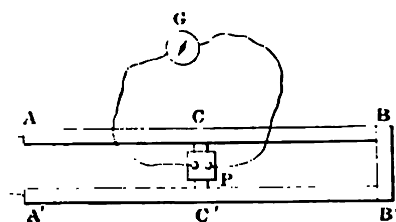


Fig. 211.

...allèlement entre elles. Les extrémités A et A'
...nes dans un bain à zéro et les extrémités B et B',
...ne lame de cuivre, dans un bain à 100°.
... fait passer par A et A' un courant énergique, la
... des points intermédiaires est modifiée en raison
... Joule et du transport électrique de la chaleur. La
...des températures des points C et C', également si-
...les deux barres, laquelle correspond au double de

...(1). *Atti del R. Inst. Veneto* [5], t. V, p. 573; 1879.

sont beaucoup plus faibles, de 41 à 8, avec
bois, des tranches de pomme de terre, vessi
de grenouille, etc.

L'endosmose peut même entraîner des c
on place les électrodes dans des tubes fer
tampons d'argile et situés dans un vase p
l'anode contenant un peu d'argile déla
verse peu à peu la paroi correspondante

728. Couples thermoélectriques. — O
thode la plus exacte pour mesurer de
potentiel consiste à observer le phén

D'une manière générale, l'énergie
dant l'unité de temps par un couran
points dont la différence de potenti
le produit IH. Si cette énergie n'es
ment du système et que Q désigne
de chaleur, on a

$$HI = JQ = \ldots$$

Lorsqu'on évalue le courant
potentiel H en volts, la form

$$HI = 4,17 Q,$$

la quantité Q_1 représente
sage d'un ampère pendant

Si la valeur de H est
nation se ramène ainsi
difficulté consiste à éli
les mêmes points en

On doit à M. Le Rou
de la force électrom
nombre de couples
couple formé par l
muth et 1 d'antim
25°, des quantit
nombre diffère tr

(1) A. Becquerel,

sont
n'est pas
nt, la diffé-
us les cas au
r l'expérience
pérature con-
s les deux cas

ure est uniforme
de la barre est
cité du métal re-
a vérifié d'abord
Il résulte aussi de
l'électricité est *nulle*
cuivre, l'*argent*, le
de *bismuth* avec un
l'*aluminium*, le
Dans les deux listes,
valeurs croissantes

jusqu'à la tempéra-
nnent une petite quan-
x soudures d'un
échauffe l'une
nt : la différence
est indiquée par

einte à double
ante par les va-
t par t_1 et t_2 les
u courant exté-
couple ther-
la forme

...ntes. Comme la moyenne
...lement égale à la tempéra-

... — t_1

...ment propre des conducteurs
...ard.

...eau des deux masses de mer-
...relative à l'effet Peltier, pendant
...t $Q = M(t_2 - t_1)$ et l'on a

$$H = \frac{JQ}{I\theta} = \frac{JM}{I\theta}(t_2 - t_1).$$

...électromotrice du couple, étudié direc-
...ntée par une formule parabolique

$$a(T - T_1)[T_n - \tfrac{1}{2}(T + T_1)],$$

...deux constantes a et T_n. La valeur de H à
...es différentes, déduite du phénomène de Pel-
...es mêmes constantes par la relation (209)

$$H = aT(T_n - T).$$

...ouple *cuivre-fer*, par exemple, les valeurs de la
... en unités C. G. S.), déduites de la force électro-
...de l'effet Peltier aux températures de 2°,85 et 275°,
...871 et 4,732; celles de T_n étaient 547,1 et 552,7. La
...ure du point neutre serait voisine de

$$550 - 273 = 277°.$$

...rie se vérifie encore au même degré d'approximation
...autres couples.

...la mesure des chaleurs spécifiques d'électricité, par
...port électrique de la chaleur, donne aussi

$$\frac{\sigma' - \sigma}{T} = -\frac{d}{dT}\left(\frac{H}{T}\right) = a.$$

Pour le couple *cadmium-plomb*, on a ainsi obtenu $a = 1{,}527$ au lieu de 1,452 calculé par la force électromotrice. Les valeurs sont plus différentes (1,66 au lieu de 2,261) avec un couple *plomb-bismuth*; on sait d'ailleurs que le bismuth présente des difficultés particulières à cause de sa cristallisation.

729. Couples thermoélectriques à liquides. — M. Bagard[1] a construit un couple qui peut servir d'étalon. Trois tubes A, B et C contiennent de l'almalgame de zinc, à 0,0005 de zinc, surmonté par une dissolution de sulfate de zinc saturée à 0°. Le tube intermédiaire B est porté à la température de l'eau bouillante, les deux autres entourés de glace à 0°. Des siphons relient les solutions des tubes A et B ainsi que les amalgames des tubes B et C; le sulfate que renferme ce dernier n'a d'autre but que d'empêcher l'altération de l'amalgame.

En prenant les électrodes sur les amalgames des tubes extrêmes A et C, le couple n'est pas polarisable; sa force électromotrice, mesurée par compensation, est $E_0^{100} = 0^v{,}1167$. Cette valeur ne varie que de $0^v{,}0001$ quand la proportion de zinc change de 0,02; il n'est donc pas nécessaire de faire les dosages du liquide avec une grande précision. Entre les températures de 0° et de $t°$, la force électromotrice est

$$E_0^t = E_0^{100}[0{,}009233t + 0{,}00000767t^2].$$

La même loi s'applique aux couples formés par un amalgame et un électrolyte, ou même par deux électrolytes; dans ce cas, le contact des liquides est établi par des diaphragmes en parchemin végétal.

Avec le sulfate de zinc et l'acide sulfurique, l'acide est positif et la force électromotrice est environ $E_0^{76{,}6} = 0{,}058$.

Pour le contact des sulfates de zinc et de cuivre, le sulfate de zinc est négatif aux températures modérées, puis devient positif; le maximum a lieu vers 40°.

Le passage d'un courant par la surface de séparation d'un corps solide et d'un liquide électrolysable y produit toujours une opération chimique correspondante. Si la chaleur de com-

(1) BAGARD, *Journ. de Phys.* [3], t. I, p. 128; 1892. — *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXIV, p. 980; 1892.

binaison des éléments de l'électrolyse est de Q_1 calories par équivalent évalué en grammes, la quantité de chaleur relative à un coulomb est $Q_1 . 1,036 . 10^{-5}$ calories (653) et la force électromotrice nécessaire, exprimée en volts,

$$Q_1 . 1,036 . 10^{-5} . 4,17 = Q_1 . 0,432 . 10^{-4}.$$

S'il existe un effet Peltier au contact des deux corps, on doit admettre que l'énergie totale fournie par le courant produit, en même temps que l'électrolyse, un dégagement ou une absorption de chaleur.

Pour éliminer les pertes de chaleur par conductibilité ou par convection dans le liquide, M. Bouty (¹) prend comme électrode le thermomètre lui-même, qui a été d'abord gradué en calories. A cet effet, le réservoir est entouré par un fil bien isolé et, en plongeant l'appareil dans le liquide, on détermine l'élévation de la colonne qui correspond au passage d'un courant I dans le fil pendant le temps θ, c'est-à-dire à l'accès d'une énergie calorifique $I^2 R \theta$.

Le fil enlevé, on argente la surface du verre et on y dépose par électrolyse une mince couche de cuivre. Deux thermomètres semblables peuvent alors être employés comme électrodes dans une solution de cuivre.

Dans une dissolution de sulfate de cuivre, par exemple, on constate un dégagement de chaleur sur l'électrode positive, ou anode, et un refroidissement sur la cathode. Comme les quantités de chaleur sont proportionnelles à l'intensité du courant, le phénomène présente bien le caractère qui correspond à un effet Peltier.

Avec les métaux tels que le cuivre, le zinc, le cadmium, l'effet observé est indépendant de la nature de l'acide et du degré de concentration des dissolutions, pourvu qu'elles ne soient pas trop étendues. Pour le cuivre, la quantité de chaleur par coulomb est $0^c,05078$, ce qui correspondrait à une différence de potentiel de $0^v,212$; le zinc donne $0^v,241$. Ces nombres surpassent beaucoup ceux qu'on trouve, par le même procédé, pour le contact des métaux entre eux.

L'anode est le siège du travail chimique positif. La forma-

(¹) BOUTY, *Journ. de Phys.* [1], t. IX, p. 229; 1880.

tion d'un équivalent d'oxyde de cuivre hydraté dégage 19000 calories et la combinaison de cet oxyde avec l'acide sulfurique étendu 9200, soit en tout 28200 calories. La quantité de chaleur produite par l'action chimique est donc de 0,292 calorie pour un coulomb, laquelle correspond à une différence de potentiel de $4,17.0,292 = 1^v,217$; il en résulte que l'excès de potentiel de la dissolution sur celui du métal, ou la force électromotrice de contact, est

$$H = 1^v,217 - 0^v,212 = 1^v,005.$$

Par un calcul analogue relatif au sulfate de zinc, en partant de 53500 calories pour la chaleur de formation du sulfate, on obtient encore

$$H = 2^v,309 - 0^v,241 = 2^v,068.$$

Si l'on suppose que dans un couple Daniell à sulfates, les deux dissolutions soient au même potentiel, la différence des excès de potentiel du liquide sur les deux métaux donnerait $1^v,06$ pour le contact du cuivre et du zinc, valeur très voisine de la force électromotrice du couple.

M. Jahn [1] arrive au même résultat par des considérations différentes. Il détermine la polarisation maximum d'électrodes de platine dans une solution métallique; la cathode est alors recouverte par une couche du métal déposé et le contact a lieu entre le métal et sa dissolution. Pour un couple formé par deux métaux plongés respectivement dans une dissolution de leurs sels, la force électromotrice est sensiblement égale à la différence des polarisations ainsi observées, d'où résulterait que les dissolutions sont en équilibre électrique. Cette relation se vérifie avec une grande exactitude pour différents sels des métaux suivants : cadmium, zinc, cuivre, plomb et argent. La même méthode permet encore d'étudier l'influence de la température sur la polarisation et, par suite, sur la force électromotrice des couples.

M. Haga [2] a constaté que la chaleur spécifique d'électricité pour le mercure est $-0,69.10^{-6}$ à la température de 7°

(1) H. Jahn, *Wied. Ann.* t. XXVIII, p. 491 et 498; 1887. — *Journal de Physique* [2] t. VI, p. 575.
(2) Haga, *Wied. Ann.*, t. XXVIII, p. 179; 1886.

et qu'entre les limites de 42° et 218° elle est proportionnelle à la température absolue.

Pour les couples thermoélectriques métal-liquide entre les températures t_1 et t_2, M. Bouty trouve que la force électromotrice est représentée par une expression du premier degré

$$E = a + b(t_2 - t_1),$$

dans laquelle le paramètre b ne dépend que de la nature du métal ; il en résulte que l'effet Peltier est proportionnel à la température absolue. Avec le cuivre, $b = 0^{v},00078$; on en déduit $0^{v},22$ pour l'effet Peltier à 12°, tandis que la mesure directe avait donné $0^{v},212$.

730. **Diagrammes thermoélectriques.** — Le pouvoir thermoélectrique $\varphi(T) = \frac{dE}{dT}$ de deux corps (**209**) présente une grande analogie avec l'*entropie* de Clausius appliquée aux cycles réversibles (**75**), puisque la quantité H est égale à $T\varphi(T)$. En raison de cette propriété, Maxwell [1] proposait de désigner la fonction $\varphi(T)$ sous le nom d'*entropie électrique*.

Comme la chaleur spécifique d'électricité est nulle pour le plomb, si l'on rapporte toutes les mesures au plomb, les courbes qui figurent le pouvoir thermoélectrique en fonction de la température devraient être des droites dont le coefficient angulaire serait le quotient k de cette chaleur spécifique d'électricité par la température absolue correspondante.

La plupart des expériences [2] relatives aux métaux et aux alliages montrent, en effet, que ces pouvoirs thermoélectriques sont sensiblement des fonctions linéaires de la température. Quelle que soit leur forme, d'ailleurs, les diagrammes fournissent une représentation très simple des quantités de chaleur dégagées ou absorbées dans le circuit à différents titres pendant le passage d'un courant.

Le pouvoir thermoélectrique $\varphi(T)$ d'un métal A étant figuré par la courbe A (fig. 212), il résulte d'abord de la relation $H = T\varphi(T)$ qu'à la température T la différence de potentiel de

[1] Cl. Maxwell, *Élément. Treatise on Elect.*, p. 137.

[2] Tait, *Proceed. Ed. R. S.*, 1870 et 1871. — Mac Gregor et Knott, *Phil. Trans. Ed. R. S.*, t. XXVIII, p. 321 ; 1879. — Bottomley et Tanakadaté, *Proceed. L. R. S.*, t. XLVI, p. 286 ; 1889.

contact avec le métal neutre est égale à l'aire du rectangle PQ. De même, la valeur H_1 relative à la température T_1 est donnée par le rectangle P_1Q_1. Enfin, la force électromotrice E du métal A avec le plomb entre les températures T_1 et T est l'inté-

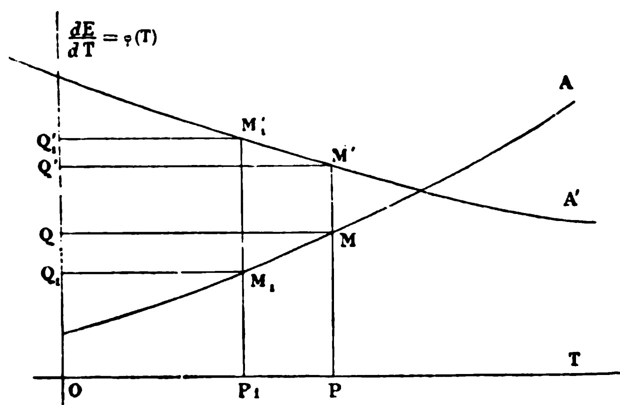


Fig. 212.

grale de $\varphi(T)\,dT$, c'est-à-dire l'aire du trapèze curviligne M_1P.

En faisant $\sigma' = 0$ pour le plomb, on a aussi (209)

$$\int_{T_1}^{T} \sigma\, dT = H - H_1 - E;$$

cette intégrale est l'aire du trapèze curviligue MQQ_1M_1.

Pour un circuit de deux métaux quelconques A' et A, les valeurs de H et H_1 sont les aires des rectangles MQ' et $M_1Q'_1$, la force électromotrice est représentée par l'aire du trapèze curviligne $MM'M'_1M_1$ et les effets relatifs au transport électrique de la chaleur sont figurés respectivement par les trapèzes curvilignes MQQ_1M_1 et $M'Q'Q'_1M'_1$.

Ces différentes surfaces représentent également les énergies calorifiques absorbées ou dégagées aux points correspondants du circuit pendant le passage de l'unité d'électricité.

Toutefois le phénomène n'est pas toujours régulier. Ainsi les courbes relatives au *fer* et au *nickel* ont plusieurs sinuosités et varient avec les échantillons. Des couples (¹) formés de

(¹) Abraham et Chassagny. — *Ann. de Chimie et de Physique* [6], t. XXVII, p. 355; 1892.



cuivre, *fer*, *argent* et *platine* donnent des résultats concordants quand on prend des fils sur la même bobine, mais la force électromotrice n'est pas exactement représentée par une formule parabolique en fonction des températures absolues rapportées au thermomètre à hydrogène.

MM. Dewar et Fleming [1] ont étudié un grand nombre de couples de métaux ou alliages avec le plomb. L'une des soudures du couple étant à zéro, l'autre est placée dans un bain dont la température, qui variait de $+100^\circ$ à -200°, est évaluée par un thermomètre à résistance de platine (**690**).

Les diagrammes des forces électromotrices ainsi obtenues sont presque toujours des lignes courbes, mais aucune ne peut être représentée exactement par une parabole dans toute son étendue et quelques-unes ont des points d'inflexion. Lorsque la tangente est horizontale, la température correspondante définit le point neutre du métal par rapport au plomb, mais il existe quelquefois plusieurs points neutres différents. L'*antimoine* aurait deux points neutres, vers -30° et -200°. Les courbes du *bismuth* ont une allure singulière : deux échantillons de métal pur ou commercial ont présenté un changement brusque de continuité au voisinage de -80°.

731. Énergies chimiques. — Dans toute pile hydroélectrique fermée, le travail électrique est emprunté à l'énergie chimique ; il est évidemment nécessaire que les réactions considérées dans leur ensemble dégagent de la chaleur.

En appelant Q_1 la somme des chaleurs de combinaison des éléments d'un couple par équivalent, la quantité JQ_1 d'énergie chimique dépensée dans le passage de l'unité d'électricité est égale à l'énergie électrique correspondante, ou à la force électromotrice E, si le courant ne produit pas de travail extérieur et qu'il n'existe aucune action secondaire ; la force électromotrice (**729**) serait donc $0^v,432.10^{-4}\,Q_1$.

Pour le couple Daniell à sulfates, l'action chimique se réduit à la substitution du zinc au cuivre dans le sulfate, c'est-à-dire au dégagement de 25 300 calories. La force électromotrice serait alors $25300.0^v,432.10^{-4} = 1^v,09$; c'est sensiblement la valeur que donne l'expérience directe.

[1] J. Dewar et J.-A. Fleming, *Ph. Mag.* [5] t. XL, p. 95 : 1895.

L'accord est aussi satisfaisant pour le couple à sulfates de zinc et de cadmium.

Cette conformité du calcul avec l'expérience avait conduit Lord Kelvin à considérer la force électromotrice des couples comme étant égale à l'énergie chimique des réactions par équivalent, mais cette loi n'est pas générale (**198**).

Il faut remarquer, en effet, que les couples en question présentent des conditions exceptionnelles; ils ne donnent lieu à aucun dégagement de gaz, ni action secondaire, et ne se polarisent pas d'une manière appréciable.

Diverses causes accessoires doivent aussi intervenir. Les couples de Volta formés de *zinc amalgamé*, par exemple, n'ont pas la même force électromotrice suivant que le second métal, supposé inaltérable, est le *cuivre*, l'*argent*, le *platine*, etc., bien que l'unité d'électricité dissolve dans tous la même quantité de zinc et dégage le même volume d'hydrogène.

Parmi les actions chimiques elles-mêmes, on doit distinguer celles qui sont liées au courant et celles qui proviennent d'effets secondaires. Dans l'électrolyse, l'effet direct du courant est de séparer les éléments. Les effets secondaires dépendent de la nature de ces éléments et de celle des électrodes; ils s'accomplissent en vertu des propriétés chimiques des corps en présence et d'une manière indépendante, au moins en apparence, du courant. On doit encore y joindre les changements d'état, le dégagement des gaz provenant de la décomposition de l'eau, la cristallisation d'un sel formé par l'électrolyse au milieu de la dissolution saturée, etc. Parmi ces actions si complexes, quelles sont celles dont on doit tenir compte finalement et celles qu'on doit négliger dans le calcul de la force électromotrice ?

Considérons l'électrolyse du sulfate de potasse [1]. Pour chaque unité d'électricité, il se dégage à l'anode un équivalent d'oxygène et un équivalent d'hydrogène à la cathode. En outre, la présence de l'acide sulfurique devient manifeste autour de la première électrode et celle de la potasse autour de la seconde. On explique habituellement ce résultat en admettant que la décomposition du sulfate de potasse se fait

[1] M. BERTHELOT, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCIII, p. 661; 1881. — *Ann. Chim. et de Phys.* (5), t. XXVII, p. 89; 1882.

de la même manière que celle du sulfate de cuivre, sauf que le potassium mis en liberté décompose l'eau par une action secondaire. L'acide sulfurique d'un côté et la potasse reformée, de l'autre, se diffusent ensuite dans le liquide et reproduisent le sulfate de potasse primitif.

La question est de savoir si le travail direct du courant correspond à la mise en liberté du potassium, les autres actions étant considérées comme purement chimiques et indépendantes ; ou à la décomposition simultanée du sulfate de potasse en acide et en base et de l'eau en hydrogène et en oxygène ; ou enfin, étant donné que l'acide et la base se recombinent incessamment et que le résultat final se réduit au dégagement de l'oxygène et de l'hydrogène, à la seule décomposition de l'eau. Les quantités de chaleur relatives à un équivalent seraient, suivant le cas, 98000, 50200 ou 345000 calories ; c'est le second qui semble se réaliser. En associant des couples constants et de forces électromotrices graduées, M. Berthelot cherche par expérience la force électromotrice minimum qui fait apparaître nettement la décomposition. L'électrolyse du sulfate de potasse exige une force électromotrice d'au moins $2^v,16$ équivalant à 50000 calories. Cette force électromotrice ne suffit plus quand on emploie le mercure comme cathode, le potassium s'amalgamant au lieu de décomposer l'eau ; la force électromotrice nécessaire se rapproche alors de $3^v,234$ (ou 98000 calories), tout en restant moindre, c'est-à-dire qu'il reste à tenir compte de la chaleur d'amalgamation du potassium.

Un cas intéressant est celui où l'électrolyse peut s'effectuer de plusieurs manières ; l'expérience montre que, si on fait croître progressivement la force électromotrice, la réaction qui absorbe la plus petite quantité de chaleur commence par se manifester ; chaque mode de décomposition apparaît à son tour, dès que la force électromotrice atteint la valeur voulue, sans toutefois que les précédents cessent de se produire.

La même chose a lieu pour un mélange de sels en dissolution, et on a pu fonder une méthode analytique de séparation de certains métaux sur l'action de forces électromotrices progressivement croissantes.

Il paraît résulter de ces expériences que la force électro-

motrice dans l'électrolyse correspond à la somme des énergies de toutes les réactions effectuées pendant le passage du courant, sans qu'il y ait lieu de distinguer entre les réactions dites primitives et les réactions réputées secondaires, à toutes celles du moins qui ont lieu immédiatement et au contact même de l'électrode, le cas du sulfate de potasse montrant qu'il n'y a pas lieu de tenir compte de la recomposition ultérieure du sulfate de potasse par suite des diffusions de l'acide et de la base.

Pour un grand nombre de couples du genre Daniell, où les sulfates sont remplacés par des chlorures, des bromures et des iodures, et le cuivre par le mercure et l'argent, la relation simple des forces électromotrices aux énergies chimiques est le plus souvent en défaut [1], en particulier quand le sel qui entoure l'anode est insoluble.

M. Braun admet qu'une portion seulement de la chaleur chimique peut être convertie en travail électrique et que, pour chaque composé, il y a un rapport constant, qu'il appelle le coefficient de rendement, entre ces deux quantités; la chaleur non convertie en travail électrique échauffe le couple et produit l'élévation de température qu'on attribue ordinairement aux actions secondaires. A ce point de vue un couple serait l'analogue d'une machine à gaz dans laquelle, en vertu du principe de Carnot, une fraction seulement de l'énergie chimique rendue disponible est convertie en travail mécanique. Poussant l'analogie plus loin, M. Chaperon [2] suppose que le coefficient de M. Braun est celui qui serait déterminé par le théorème de Carnot pour une machine thermique fonctionnant entre la température actuelle et la température de dissociation du composé; mais les données expérimentales nécessaires à la vérification de cette hypothèse sont actuellement insuffisantes.

732. Influence de la température et de la pression. — On a, d'après Von Helmholtz (**198** et **199**), la relation générale

$$JQ_1 = E - T\frac{\partial E}{\partial T}.$$

(1) Braun, *Wied. Ann.*, t. V, p. 182; 1878, t. XVI, p. 561; 1882 et t. XVII, p. 593; 1882.

(2) Chaperon, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCII, p. 786; 1881.

La correspondance de la force électromotrice avec l'énergie chimique ne doit donc se vérifier que si la première est indépendante de la température. Cette condition est sensiblement réalisée pour le couple Daniell, mais non pour tous les couples du même genre. Ainsi, quand on substitue l'argent au cuivre (1), on a $\frac{\partial E}{\partial T} = -0^v,0012$. A la température de 15°, la correction doit donc être de $0^v,35$ environ, ce qui est conforme à l'expérience. Le couple L. Clark (710) varie dans le même sens, mais beaucoup plus rapidement.

Lorsque la force électromotrice croît avec la température, elle surpasse la somme des énergies chimiques; le couple tend alors à se refroidir par le passage du courant. Tel est le cas du couple à calomel de Von Helmholtz, dont la force électromotrice croît légèrement avec la température, ou encore d'un couple analogue dans lequel le chlore est remplacé par le brome. La force électromotrice vaut environ 1,7 fois celle qu'on déduit de la chaleur chimique.

On a vu aussi que la loi de Kopp et Wœstyne doit s'appliquer à tous les éléments du couple pour que la force électromotrice soit indépendante de la température. Or, cette loi n'est satisfaite (2) dans une série de transformations qu'autant que celles-ci ne comportent pas de changements d'état. Dans le cas contraire, la chaleur de combinaison est, en outre, variable avec la température. Ce sont précisément les couples à dépolarisant solide, comme les couples à sulfate de mercure, à protochlorure de mercure, à chlorure d'argent, qui sont les plus sensibles aux variations de température et présentent les plus grands écarts avec les énergies chimiques; les deux ordres de phénomènes sont donc connexes.

De nombreuses expériences ont été faites par M. Crapski (3) et M. Gockel (4) pour vérifier la théorie de Von Helmholtz. Le terme de correction déduit des variations de la force électromotrice avec la température est toujours du signe prévu, mais il ne représente jamais qu'une fraction plus ou moins

(1) A. Potier, *Bulletin de la Société de Physique;* juillet 1884, p. 179.
(2) Berthelot, *Essai de mécanique chimique*, t. I, p. 110; 1879.
(3) Crapski, *Wied. Ann.*, t. XXI, p. 209; 1884.
(4) Gockel, *Wied. Ann.*, t. XXIV, p. 612; 1885.

grande de la différence qui existe entre l'énergie chimique et celle qui correspond à la force électromotrice.

Les résultats obtenus par M. Jahn, dans le travail déjà cité plus haut (729), paraissent beaucoup plus concordants. Les variations de la force électromotrice E avec la température ont été déterminées en comparant deux couples dont l'un est placé dans la glace fondante. Pour obtenir la valeur de Q_1, on plonge le couple dans un calorimètre et on ajoute à la chaleur dégagée celle qui correspond au courant dans le circuit extérieur. L'expérience faite sur une dizaine de couples, dont les variations avec la température étaient positives ou négatives, a montré que les quantités $T\frac{\partial E}{\partial T}$ et $E - JQ_1$ sont toujours de même signe, souvent très voisines, et que le maximum des écarts ne dépasse pas un dixième.

La théorie de Von Helmholtz conduit aussi à l'équation

$$\frac{\partial E}{\partial p} = -\delta v,$$

dans laquelle la quantité δv représente l'accroissement qu'éprouve le volume du couple, à pression constante, pendant le passage de l'unité d'électricité.

M. Gilbault ([1]) a mesuré cette influence de la pression sur divers couples. Quand il n'existe pas de dégagement gazeux, la variation de la force électromotrice est de la forme

$$E_0 - E = ap - bp^2.$$

Comme le coefficient b est très petit, le terme correspondant n'a d'importance qu'aux pressions très élevées, de sorte que la variation est sensiblement linéaire.

Pour les couples à dégagement gazeux, l'influence de la pression se traduit par la formule

$$E_0 - E = A \log . p + cp.$$

Le coefficient c est encore très petit et la variation peut être considérée comme logarithmique.

([1]) H. Gilbault, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXIII, p. 465; 1891.

es deux résultats sont conformes à la théorie ; l'expérience érifie également les valeurs numériques, comme on le voit s le tableau suivant où la variation δE de la force électro- rice est exprimée en dix-millièmes de volts par pression 100 atmosphères :

Couple.	δE Obs.	δE Cal.
Daniell	+ 5	+ 5,17
Warren de la Rue	+ 7	+ 6,62
Accumulateur Planté	— 12	— 12,7
Volta	—600	—586
Bunsen	—405	—383
Pile à gaz	+845	+865

33. Effets du magnétisme. — L'influence de l'aimantation les propriétés thermoélectriques du fer et de l'acier avait signalée par Lord Kelvin ([1]). La force électromotrice d'un ple *fer-cuivre* augmente ([2]) quand il est placé axialement s un champ de faible intensité (35 unités) et la variation t avec la différence de température des deux soudures. Chassagny ([3]) met en opposition deux couples *fer-cuivre* t les soudures sont respectivement à 0° et 100°, le fil de le l'un d'eux étant placé tout entier suivant l'axe d'une ine. A l'état ordinaire, le courant est nul et la force élec- iotrice de chacun des couples est de 1093,2 microvolts. que la bobine est alimentée par un courant de sens quel- que, le couple situé dans le champ magnétique prédomine. croissement de force électromotrice augmente d'abord le champ jusqu'à un maximum de 6,1 microvolts pour un mp de 55 unités et diminue ensuite plus lentement.

I. Houllevigue ([4]) a confirmé ces résultats. L'accroissement orce électromotrice produit par une aimantation longitudi- e sur le couple *fer-cuivre* présente un maximum et s'annule s un champ de 350 unités. Pour le couple *acier-cuivre*, au traire, il y a une diminution qui augmente avec le champ.

W. THOMSON, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1856, p. 722.
V. STROUHAL et C. BARUS, *Wied. Ann.*, t. XIV, p. 54; 1881.
CHASSAGNY, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. CXVI, p. 977; 1893.
L. HOULLEVIGUE, *Ann. de ch. et de phys.* (7), t. VII, p. 456; 1896.

Dans les deux cas, l'aimantation transversale produit un effet de même sens, mais beaucoup plus faible.

M. Remsen [1] a trouvé aussi que le magnétisme modifie les actions chimiques. Si l'on met, par exemple, une solution de sulfate de cuivre dans une coupe de fer située entre les pôles d'un électro-aimant, le dépôt de cuivre n'est plus uniforme et l'épaisseur de la couche est sensiblement plus faible aux points où le champ est maximum, particulièrement auprès des pièces polaires.

Cette expérience et d'autres analogues [2] ont donné lieu à des interprétations contradictoires. M. Janet déduit du principe de la conservation de l'énergie cette conséquence que la chaleur dégagée par la combinaison du fer avec un corps quelconque doit être plus faible lorsque le métal est placé dans un champ magnétique. M. Duhem était arrivé de son côté à la même conclusion.

Considérons un aimant permanent A et un morceau de fer doux, et supposons que l'on fasse subir au système le cycle d'opérations suivantes : 1° le fer étant d'abord très éloigné, on l'approche de l'aimant, ce qui correspond à un travail $\mathfrak{T}$ des actions magnétiques, abstraction faite de l'échauffement du métal par l'aimantation ; 2° on attaque le fer par un acide, d'où résulte un dégagement de chaleur Q ; 3° en éloignant le sel formé, le travail magnétique dépensé est négligeable devant $\mathfrak{T}$, puisque le coefficient d'aimantation du sel est très petit ; 4° on décompose le sel de manière à reconstituer le fer primitif, opération qui absorbe une quantité de chaleur Q'. Le cycle étant fermé, il en résulte

$$\mathfrak{T} + J(Q - Q') = 0 \qquad \text{et, par suite,} \qquad Q' > Q.$$

La force électromotrice d'un couple renfermant du fer doit donc diminuer quand on le soumet à l'influence d'un champ magnétique ; en d'autres termes, le fer aimanté serait positif par rapport au fer moins aimanté.

(1) I. Remsen, *La lum. électr.*, t. IV, p. 126 ; 1881.

(2) Voir Colardeau, *Journ. de Ph.* [2], t. VI, p. 129 ; 1887. — P. Janet. *Ibid.*, p. 286 et t. VIII, p. 312, 1889. — Hurmuzescu, *Ibid*, [3] t. IV, p. 118 ; 1895. — E. L. Nichols et W. Franklin, *Am. Journ.*, t. XXV. — H. A. Rowland et Bell, *Ibid.*, t. XXVI ; 1888. — *Journ. de Phys.* [2], t. VIII, p. 142 ; 1889.

MM. Nichols et Franklin ont trouvé, au contraire, que si l'on forme un couple à liquide avec des électrodes en fer et en platine, l'action du champ magnétique augmente la force électromotrice; l'accroissement serait de $0^v,068$ dans un champ de 3800 unités. MM. Rowland et Bell attribuent ce désaccord à l'existence du liquide magnétique produit par la réaction chimique. Si on observe la première impulsion galvanométrique, avec deux électrodes en fer dont une seule est soumise au champ, on trouve alors que le fer aimanté devient positif.

M. Hurmuzescu emploie des électrodes formées de fils de fer à la Wollaston, c'est-à-dire noyées dans un tube de verre de façon que la section terminale soit seule dénudée. Deux électrodes semblables plongent dans un tube en U renfermant une dissolution très étendue d'acide acétique ou d'acide oxalique, l'une des branches du tube étant placée entre les pôles d'un électro-aimant ; la force électromotrice est compensée dans chaque expérience et l'équilibre vérifié par un électromètre capillaire sensible au dix-millième de volt.

On doit distinguer deux cas, suivant que le fil de fer est parallèle ou perpendiculaire au champ, c'est-à-dire que la surface libre possède ou non du magnétisme.

Dans le second cas, abstraction faite de l'effet initial dû au défaut de symétrie du couple, le fer situé dans le champ devient positif par rapport à l'autre. La force électromotrice correspondante croît avec l'aimantation et atteint $0^v,0229$ dans un champ de 7000 unités; elle est indépendante de la nature de l'acide et du degré de concentration. L'aimantation se calculerait par la relation connue pour un cylindre perpendiculaire au champ (**276**).

Le phénomène paraît très irrégulier et dépend de diverses circonstances lorsque la surface de contact du fer avec le liquide est l'un des pôles d'aimantation induite.

CHAPITRE CINQUIÈME

CAPACITÉS ET DIÉLECTRIQUES.

734. Des condensateurs. — Les capacités à mesurer sont presque toujours celles de condensateurs, dont le type est la bouteille de Leyde, composés de deux armatures séparées par un diélectrique. Les câbles sous-marins ou souterrains, dont les fils conducteurs sont noyés dans une couche isolante, ont le même caractère et présentent parfois des capacités considérables. Les fils conducteurs, ou l'âme du câble, constituent l'armature intérieure ; l'armature extérieure est formée, soit par une enveloppe métallique qui protège le câble, soit par l'eau ou la terre dans laquelle il est plongé.

La bouteille de Leyde est de toutes les formes celles qui se prête le mieux à la conservation des charges. Certaines qualités de verre paraissent absolument isolantes aux températures ordinaires. Franklin a conservé de l'électricité pendant plusieurs mois dans une bouteille dont le col avait été fermé à la lampe. Lord Kelvin a répété cette expérience avec une bouteille scellée dont l'armature intérieure était formée par une couche d'acide sulfurique : la perte était insensible même au bout de plusieurs années.

Les condensateurs *feuilletés* permettent d'obtenir des appareils moins fragiles et de capacités beaucoup plus grandes. On superpose par couches alternatives des feuilles d'étain et des lames minces de mica ou des feuillets de papier paraffinés. On réunit séparément toutes les feuilles d'étain d'ordre pair et les feuilles d'ordre impair pour former les armatures. Ce mode de construction donne, sous un petit volume, des surfaces très étendues et très rapprochées.

)ans les condensateurs à feuilles de mica, M. Bouty remce l'étain par une argenture sur les deux faces en regard; volume total est encore moindre et l'épaisseur du diélec[ue mieux définie, puisqu'il n'existe plus aucune couche ir entre les armatures et le mica.

.es diélectriques solides et liquides possèdent plus ou ins la propriété, encore mal connue, d'*absorber* l'élec:ité et de donner lieu à des décharges *résiduelles* (**172**) qui)endent, non seulement de la charge primitive et de sa ·ée, mais encore des charges antérieures.

.ne bouteille de Leyde, par exemple, qui a reçu d'abord : charge positive pendant plusieurs semaines, puis une rge négative pendant vingt-quatre heures et une nouvelle rge positive pendant cinq minutes, peut donner un résidu que le potentiel de l'armature intérieure, maintenue isolée dant que l'autre est au sol, présente avec le temps des :llations alternativement positives et négatives ([1]). Tout se se donc comme si l'électricité pénétrait peu à peu dans le ectrique pour se dissiper ensuite, par un déplacement en s contraire, lorsque les armatures sont finalement rames au même potentiel.

ans insister ici sur ce phénomène de charges résiduelles, exige une étude spéciale, il suffira pour le moment d'y ır égard dans les expériences et de préciser les conditions lurée de la charge.

ans les condensateurs à air ou à gaz quelconque, la dé·ge est toujours complète, sans effet résiduel; ce sont seuls appareils qui offrent une sécurité complète, pour les ures exactes, à la condition d'empêcher les poussières ;'introduire entre les deux plaques. Malheureusement ils ıt jamais qu'une capacité très faible.

15. Étalons de capacité. — Dans le système électrostati-, la capacité d'un conducteur est une quantité linéaire, que peut déterminer par les dimensions de l'appareil.

a solution du problème est quelquefois très simple: tels ; les cas d'une sphère infiniment éloignée de tout autre ducteur ou d'un système formé par les surfaces de deux ères concentriques (**50**).

([1]) Sir W. Thomson, *Congrès international des électriciens;* Paris, 1881, p. 217.

Lord Kelvin a employé ainsi un condensateur à surfaces sphériques : les rayons R et R_1 avaient été déduits du poids de l'eau contenue dans la sphère extérieure seule, et dans l'intervalle des deux sphères, quand elles étaient placées concentriquement. Il faut, en outre, tenir compte du pouvoir inducteur spécifique des cales isolantes qui supportent la sphère intérieure, ainsi que de l'orifice ménagé dans l'armature extérieure pour laisser passer une tige qui communique avec l'autre armature, enfin évaluer l'influence de cette tige; ces corrections ne peuvent se faire que d'une manière approchée. Dans l'appareil en question, on avait $R_1 = 5^c,857$, $R = 4^c,511$. La formule simple donne $C = 63^c,264$; les corrections montaient à $0^c,255$ et portaient la capacité à $63^c,519$.

Les condensateurs à cylindres concentriques (**57**) sont plus faciles à construire, mais on doit corriger l'action des extrémités ou l'éliminer par l'expérience.

Dans les condensateurs formés de deux plans parallèles (**58**), séparés par la distance *e*, il y aurait à tenir compte des variations de densité sur les bords des plateaux et des couches électriques qui peuvent exister sur la surface extérieure. On a vu (**605**) comment Lord Kelvin échappe à ces difficultés par l'emploi de l'*anneau de garde*, en protégeant la surface utile par un couvercle métallique au même potentiel. Si la largeur du sillon qui sépare l'anneau de garde et la surface utile est assez petite, la valeur de S qui entre dans l'expression de la capacité est sensiblement égale à la surface augmentée de la moitié de l'aire correspondant au sillon.

M. Curie (¹) constitue ces étalons de capacité avec deux plaques de verre P et P′ argentées sur les deux faces et séparées par des lames de quartz parallèles à l'axe, la conductibilité du cristal étant très faible dans une direction perpendiculaire. Sur l'argenture intérieure de l'une des plaques P on isole une surface *a* par une coupure, de façon que le contour constitue un anneau de garde A.

On peut utiliser l'appareil à la manière ordinaire. L'anneau A étant au sol, on porte la plaque P à un certain potentiel V; par un trou creusé dans la plaque P′ on joint la surface *a* à

(¹) P. Curie, *Journ. de Phys.* [3], t. II, p. 265; 1893.

:ctromètre et on cherche, à l'aide d'un quartz piezoélec-ue (**614**), la quantité q d'électricité nécessaire pour annuler otentiel. On a alors

$$q = V\frac{a}{4\pi e}.$$

outefois, l'appareil est mal isolé parce que le sillon de-ıt conducteur par la surface même du verre, surtout à se de l'humidité atmosphérique.

est préférable d'opérer autrement. L'anneau de garde A ıt toujours au sol, on porte la surface a au potentiel V; joint à l'électromètre la plaque P, qui est bien isolée, et nesure la charge $-q'$ qui annule la déviation. La distribu- des lignes de force est très différente dans les deux cas, s les quantités d'électricité q et q' sont égales.

n a surtout besoin, dans la pratique, de connaître les ıcités en unités électromagnétiques. La mesure déduite dimensions se trouvant exprimée en unités électrosta-es, on doit la diviser par le carré $\mathbf{v}^2$ du rapport des és (**419**), ou par $3^2 . 10^{20}$, pour avoir sa valeur dans le sys-e électromagnétique. La capacité des sphères concentri-s employées par Lord Kelvin serait ainsi

$$\frac{63,519}{9} \cdot 10^{-20} = 7,058 . 10^{-20} = 7,058 . 10^{-5} \text{ microfarads.}$$

ı mesure directe des capacités en unités électromagné-es peut être faite par différentes méthodes.

omme on a $Q = CV$, on obtiendra la valeur de C par celles e charge et d'une force électromotrice.

:marquons encore que la capacité, dont les dimensions $L^{-1}T^2$, est le quotient d'un temps par une résistance ou arré d'un temps par un coefficient d'induction. La mesure e capacité pourra donc aussi se ramener à celle d'une ıtance ou d'un coefficient d'induction.

ı construit, avec des condensateurs feuilletés ne présen- qu'une absorption très faible, des boîtes de capacités uées, que l'on peut réunir par des chevilles ; ces capa- sont évaluées en *microfarads*.

association des capacités en *surface* (**60**) fournit une capa-

cité totale égale à leur somme, comme pour les boîtes de résistances; si on les réunit en *série* ou en *cascade* (**61**), l'inverse de la capacité est égal à la somme des inverses de chacune d'elles, résultat analogue à celui que donnent les boîtes de conductances (**658**).

Il est intéressant de rappeler que Cavendish avait employé une disposition analogue aux boîtes actuelles ([1]). Il se servait de carreaux de Franklin, c'est-à-dire de condensateurs formés d'une lame de verre, garnie de feuilles d'étain, et présentant entre eux des rapports déterminés. Il avait remarqué aussi que les capacités ne sont pas proportionnelles aux surfaces, à cause de l'influence des bords, et reconnu que, pour tenir compte de cet effet, il suffisait d'ajouter à la surface réelle de la feuille d'étain une bande circulaire dont la largeur était de $1^{mm},5$ pour un verre de 5 millimètres d'épaisseur, et de $2^{mm},25$ pour un verre de $1^{mm},7$.

736. Condensateurs glissants. — Il est souvent utile de pouvoir modifier les capacités d'une manière continue; c'est ce qu'on obtiendrait en faisant varier la distance des surfaces d'un condensateur à plateaux. On arrive au même résultat d'une manière plus commode avec des condensateurs dans lesquels une des armatures glisse parallèlement à elle-même, de manière à modifier l'étendue des surfaces en présence, sans altérer leur distance.

Considérons, en particulier, le système déjà examiné (**71**) de trois conducteurs cylindriques A, B et C (fig. 213) centrés

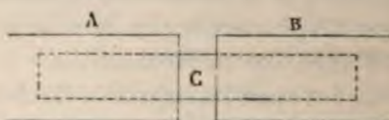


Fig. 213.

sur le même axe ([2]). L'enveloppe B communiquant au sol, les cylindres A et C sont réunis entre eux et isolés. Soit C_0 la capacité du système formé par la réunion de A et de C.

([1]) CAVENDISH, *Electr. Researches*, publiées par Maxwell, p. 157; 1879.

([2]) L'idée de ce condensateur est due à Lord Kelvin. *Voir* GIBSON et BARCLAY, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1871, p. 573.

mier cas que dans le second pour un même déplacement. Le premier mouvement donnera un équilibre approché dans une expérience de comparaison, et on achève le réglage en faisant mouvoir le cylindre C dans un sens ou dans l'autre.

737. Comparaison des capacités. Méthode d'opposition. — Une méthode d'opposition directe a été déjà employée au siècle dernier par Volta et par Cavendish. On charge deux condensateurs à des potentiels égaux et de signes contraires, puis on les décharge l'un sur l'autre ; si leurs capacités sont égales, ils seront tous deux ramenés à l'état neutre.

Considérons, par exemple, deux bouteilles de Leyde dont les armatures intérieures sont A et A′ et les armatures extérieures B et B′. On les réunit en cascade en faisant communiquer respectivement A avec B′, B avec A′; joignant au sol l'un des systèmes, on électrise l'autre par une source à potentiel élevé. On supprime ensuite les communications avec la source et avec la terre, ainsi que les conducteurs intermédiaires, et on réunit respectivement les armatures intérieures et les armatures extérieures; les deux capacités sont égales si les bouteilles se trouvent alors entièrement déchargées. Sous cette forme, la méthode n'est rigoureuse que si la capacité des condensateurs est indépendante du choix des armatures, c'est-à-dire s'ils peuvent être considérés comme entièrement fermés.

Un procédé simple pour charger deux surfaces à des potentiels égaux et de signes contraires consiste à les mettre respectivement en communication avec les deux pôles d'une pile dont le milieu est relié au sol. Après avoir supprimé les communications avec la pile, on réunit les deux capacités : la charge est réduite à zéro si elles sont égales.

738. Platymètre. — Lord Kelvin ([1]) désigne sous ce nom un condensateur double formé de deux anneaux cylindriques A et A′ (fig. 215), d'égale longueur et de même rayon, parfaitement isolés, placés autour d'un cylindre BB′ de même axe. Maintenant d'abord le cylindre B en relation avec le sol, on charge l'un des anneaux A à un potentiel V; on supprime ensuite les communications à la source et au sol. Si alors

([1]) Sir W. Thomson, *Br. Ass. Rep.*; 1855 (Glasgow). *Voir* Gibson et Barclay, *Trans. Ph. R. S. L.*; 1871, p. 570.

on joint les deux anneaux, le potentiel commun devient moitié moindre, par le partage des charges, et on constate par un électroscope que le potentiel du cylindre BB′ reste nul. La même chose aurait lieu d'ailleurs, sauf l'influence des bords, si les anneaux A et A′, toujours de même rayon, avaient des longueurs différentes, leurs capacités a et a' étant proportionnelles à leurs longueurs. Il faut admettre cependant que ces anneaux sont assez éloignés l'un de l'autre pour que leur induction réciproque soit négligeable par rapport à celle qu'ils exercent sur le cylindre intérieur.

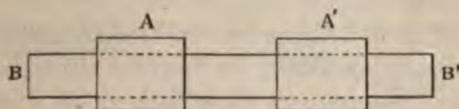


Fig. 215.

Pour comparer deux capacités C et C′, on les réunit séparément aux deux anneaux A et A′ du platymètre. Si l'expérience, répétée dans les mêmes conditions, montre que le potentiel du cylindre BB′ reste nul, après la communication des deux anneaux, les capacités totales des deux systèmes sont dans le rapport des capacités des anneaux, ce qui donne

$$\frac{a}{a'} = \frac{C+a}{C'+a'} = \frac{C}{C'}.$$

On peut alors vérifier l'égalité des capacités a et a' : il suffit de permuter les capacités C et C′ relativement aux anneaux. Si l'équilibre existe encore, on a aussi

$$\frac{C'}{C} = \frac{a}{a'}, \qquad \text{ou} \qquad a' = a.$$

Lorsque cette condition n'est pas réalisée et que l'équilibre, ayant été établi dans une première expérience avec des capacités C et C′, persiste dans une seconde où les capacités sont C″ et C, il en résulte

$$\frac{C}{C'} = \frac{a}{a'}, \qquad \frac{C''}{C} = \frac{a}{a'}, \qquad C = \sqrt{C'C''}.$$

L'expérience est analogue à l'emploi d'une balance à bras inégaux, quand on place le corps à peser alternativement dans les deux plateaux.

739. Balances de capacités. — On peut donner ce nom à plusieurs dispositions expérimentales qui rappellent celle du pont de Wheatstone.

Dans la méthode employée par De Sauty ([1]), deux condensateurs C et C′ (fig. 216) tiennent la place des deux branches b

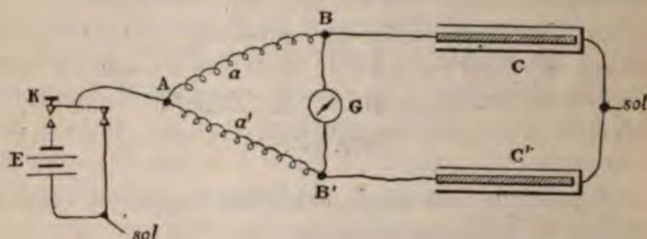


Fig. 216.

et b' du pont de Wheatstone, leurs armatures extérieures étant en communication avec le sol. On ajuste les deux résistances a et a' de manière qu'en ouvrant ou fermant la clef K qui établit la communication avec la pile, aucun courant ne passe dans le galvanomètre.

La condition d'équilibre exige évidemment que les extrémités B et B′ du pont soient au même potentiel, c'est-à-dire qu'à un instant quelconque, les charges Q et Q′ soient proportionnelles aux capacités correspondantes C et C′ ; comme ces charges sont proportionnelles aux courants qui les amènent et ceux-ci en raison inverse des résistances correspondantes a et a', il en résulte

$$\frac{C}{C'} = \frac{a'}{a}.$$

Il est clair qu'on pourrait remplacer le galvanomètre par un électromètre ou un téléphone.

Cette méthode ne convient que pour les capacités de valeur

([1]) L. Clark and R. Sabine, *Electrical tables and formulæ*, p. 62; 1871.

moyenne et dans lesquelles l'absorption électrique a peu d'influence; elle exige, en effet, que le temps de charge soit le même pour les deux condensateurs. Aussi n'est-elle pas applicable aux grandes capacités, comme celles des câbles sous-marins ; on en est averti par cette circonstance que l'ajustement des résistances qui convient pour la charge ne convient pas pour la décharge.

Lord Kelvin [1] a indiqué deux méthodes où l'équilibre ne dépend pas du temps de charge, mais seulement de l'état final, et qui sont applicables aux capacités de toute nature.

La première exige l'emploi de trois condensateurs de comparaison, dont l'un au moins ait une capacité variable.

Soient C, C', C_1, et C'_1 (fig. 217) quatre capacités formées de

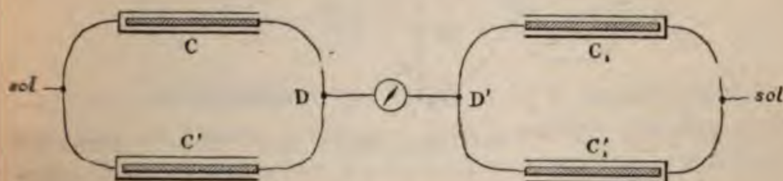


Fig. 217.

condensateurs dont l'une des armatures est au sol. On charge deux d'entre elles C et C_1 à un même potentiel V_0, puis on réunit respectivement C avec C', et C_1 avec C'_1; les potentiels V et V_1 de part et d'autre deviennent

$$(C+C')V = CV_0, \qquad (C_1+C'_1)V_1 = C_1V_0.$$

Si les valeurs de V et V_1 sont égales, un galvanomètre ou un électromètre intercalé entre deux points D et D' des deux systèmes reste au zéro, ce qui donne

$$\frac{C}{C_1} = \frac{C+C'}{C_1+C'_1} = \frac{C'}{C'_1}.$$

L'emploi de l'électromètre est préférable, car chaque système conserve sa charge et on a toute facilité pour ajuster la

[1] SIR W. THOMSON, *Journ. of Teleg. Eng.*, t. I, 5, 394; 1873.

capacité du condensateur variable de manière que la condition d'équilibre soit satisfaite.

Quand on fait usage du galvanomètre, il faut attendre, avant d'établir la jonction entre D et D′, que l'équilibre de charge ait le temps de s'établir. Ce temps peut s'élever à plusieurs secondes si on opère sur de grandes capacités et de grandes résistances.

La seconde méthode n'exige pour la comparaison qu'une capacité invariable. Les armatures extérieures des deux capacités C et C′ (fig. 218) sont isolées et communiquent entre

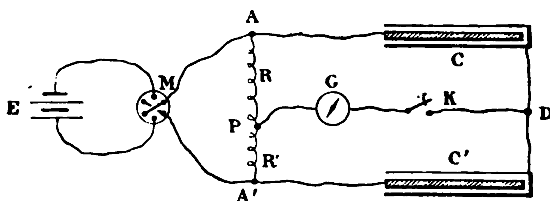


Fig. 218.

elles par un conducteur D; les armatures intérieures sont en relation avec les extrémités d'une résistance considérable AA′ traversée par un courant permanent. On cherche le point P de la résistance AA′ auquel il faut attacher le fil d'un galvanomètre G, ou mieux un électromètre, pour qu'en établissant la communication entre P et D, l'appareil reste au zéro. La position du point P ne change pas quand on renverse le courant par le commutateur M situé sur le circuit de la pile E.

Comme la charge des deux condensateurs est la même, par suite de leur liaison, on a alors, en appelant V et V′ les potentiels en A et A′ et V_1 celui des armatures extérieures,

$$C(V - V_1) = C'(V_1 - V').$$

D'autre part, si on désigne par x le potentiel au point P, par R et R′ les résistances AP et PA′, on a aussi

$$\frac{V - x}{R} = \frac{x - V'}{R'}.$$

L'égalité des potentiels x et V_1 exige la condition

$$CR = C'R',$$

c'est-à-dire que les capacités C et C' sont dans le rapport inverse des résistances correspondantes R' et R.

Cette méthode est susceptible d'une grande précision et se prête très bien à la vérification des boîtes de capacités.

740. Mesure des potentiels. — On détermine d'abord la différence de potentiel V entre les armatures d'un condensateur électrisé; cette capacité C étant réunie à un autre C', sans que la charge totale Q soit modifiée, la différence de potentiel V' diminue et l'on a

$$Q = CV = (C + C')V',$$

$$\frac{C'}{C} = \frac{V - V'}{V'} = \frac{V}{V'} - 1.$$

Si l'une des armatures est au sol, V et V' représentent les potentiels de l'autre armature. Ces quantités jouent ici le même rôle que les variations de température dans la *méthode des mélanges* en calorimétrie; on donne quelquefois le même nom à l'expérience électrique.

On peut aussi réunir d'abord les condensateurs en surface, puis supprimer les communications et les joindre en cascade. L'armature restée en communication avec l'électromètre conserve la même charge Q et les potentiels sont V_0 et V_1 dans les deux expériences; il en résulte

$$V_0 = \frac{Q}{C}, \qquad V_1 = Q\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right), \qquad \frac{V_1}{V_0} = 1 + \frac{C}{C'}.$$

C'est là une des méthodes employées par Faraday [1] pour la détermination des pouvoirs inducteurs spécifiques (**83**). Deux condensateurs sphériques ayant les mêmes dimensions, l'intervalle des armatures de l'un d'eux avait été rempli de soufre par fusion jusqu'à mi-hauteur. On charge le premier condensateur à couche d'air complète et on mesure, par la balance de torsion (**603**), la quantité d'électricité prise par

[1] FARADAY, *Exper. Researches*, série XI, § 1187; 1837.

une boule isolée sur un point de l'armature intérieure ; on répète ensuite l'expérience en touchant le même point, après avoir établi une communication avec le second condensateur. Le rapport des charges mesurées est le même que celui des potentiels V et V'. Désignant par K le pouvoir inducteur spécifique du soufre, on a

$$\frac{C'}{C} = \frac{1+K}{2} = \frac{V}{V'} - 1, \qquad K = 2\frac{V}{V'} - 3.$$

Si les potentiels V et V' sont mesurés pas un électromètre dont la capacité γ n'est pas négligeable, on l'élimine par une expérience spéciale en chargeant d'abord l'instrument seul au potentiel U et déterminant la valeur U' après qu'on l'a réuni à la capacité C. On a alors

$$(C+\gamma)V = (C'+C+\gamma)V',$$
$$\gamma U = (C+\gamma)U';$$
$$\frac{C'}{C}\left(1 - \frac{U'}{U}\right) = \frac{V}{V'} - 1.$$

Nous avons supposé encore que la capacité de l'électromètre est indépendante de la déviation, ce qui n'est pas tout à fait rigoureux. Enfin il faut avoir soin que les capacités que l'on compare n'aient pas d'induction réciproque et que la capacité des fils de communication soit négligeable.

La méthode devient très exacte, surtout pour des capacités peu différentes, quand on opère par opposition. Les condensateurs étant réunis en croix et l'un des systèmes d'armatures au sol, on porte l'autre système au potentiel V_0; les charges respectives sont

$$Q = CV_0 \qquad \text{et} \qquad Q' = C'V_0.$$

Quand on joint ensuite les armatures de signes contraires, le potentiel final est V_1, ce qui donne

$$Q - Q' = (C + C')V_1 = (C - C')V_0,$$
$$\frac{C'}{C} = \frac{V_0 - V_1}{V_0 + V_1}.$$

Si la décharge est observée au galvanomètre balistique (643), l'angle d'impulsion α de l'aiguille, toutes corrections faites relatives à l'amortissement et à la graduation, donne

$$q = CV = \frac{H}{G}\frac{\tau}{\pi}\alpha.$$

Pour un même potentiel dans des expériences successives, la capacité est proportionnelle à l'angle d'impulsion.

Lorsque les capacités sont très inégales, il est utile de prendre des forces électromotrices V et V' qui soient dans un rapport connu, par exemple avec des nombres n et n' de couples de même nature. On aura alors

$$\frac{C}{C'} = \frac{\alpha}{\alpha'}\frac{V'}{V} = \frac{n'\alpha}{n\alpha'}.$$

L'expérience comporte une grande précision quand les capacités sont très voisines et de même nature. Pour des capacités très différentes, la durée des décharges introduit une cause d'erreur qu'il est difficile d'éliminer.

Cette expérience permet de déterminer la capacité C en mesures absolues électromagnétiques. En effet, si l'on mesure, directement ou indirectement, la déviation réduite δ que produirait dans le même galvanomètre le courant I dû à la force électromotrice V dans une résistance R, on a

$$V = RI = R\frac{H}{G}\delta,$$

$$C = \frac{H}{GV}\frac{\tau}{\pi}\alpha = \frac{\tau}{R}\cdot\frac{\alpha}{\pi\delta}.$$

M. Fleming Jenkin (¹), a ainsi déterminé, pour le Comité de l'Association Britannique, la valeur absolue d'un condensateur feuilleté devant servir d'étalon, et dont la capacité était voisine de 10 microfarads (10^{-14} unités C.G.S).

Avec les condensateurs à diélectrique solide, l'expérience présente de grandes difficultés. A moins de rendre les oscil-

(¹) Fl. Jenkin, *Br. Ass. Rep.*; Dundee, 1867. — *Reprint*, p. 146.

lations de l'aiguille extrêmement lentes, ce qui est incommode dans la pratique et ce qui réduit les angles d'impulsion, on n'est jamais sûr que la durée de la décharge ne soit qu'une fraction très petite de la période d'oscillation. En outre, par suite des phénomènes d'absorption de l'électricité, la capacité est une fonction des temps de charge et décharge.

Ainsi, dans les expériences de M. Jenkin, avec un galvanomètre astatique (**624**) dont le moment d'inertie du système mobile avait été augmenté au point de porter la durée d'oscillation à 20^s environ, la charge était obtenue par une pile de 20 couples Daniell. On déchargeait le condensateur après une minute de charge. Suivant que la durée du contact de décharge était très courte ou variait de $1^s,7$ à $3^s,4$ et à 5 secondes, la déviation de l'aiguille était de 156, 161, 164 et 166 divisions, cette dernière étant la même que pour un contact permanent. Ici encore il est donc nécessaire de spécifier la durée de la décharge.

Lorsque deux capacités sont égales et qu'après les avoir chargées par une même pile on les décharge à la fois dans un *galvanomètre différentiel*, l'aiguille doit rester immobile. Si elles sont inégales, on peut rétablir l'équilibre, soit par une capacité variable, soit par un shunt convenable sur l'une des bobines du galvanomètre.

En appelant G et G' les constantes des deux bobines, m le pouvoir multiplicateur du shunt établi sur la première, C et C' les capacités correspondantes, on a

$$G\frac{C}{m} = G'C', \qquad \text{ou} \qquad \frac{C}{C'} = m\frac{G'}{G}.$$

L'emploi des shunts est alors légitime, à la condition toutefois que les décharges aient la même durée. C'est là le point faible de la méthode imaginée par Varley [1].

742. Courants intermittents. — Werner Siemens [2] mesure le courant moyen produit par une série de décharges qui se succèdent à des intervalles très courts par rapport à la période d'oscillation de l'aiguille du galvanomètre.

[1] L. CLARK AND R. SABINE, *Electrical tables and formulæ*, p. 63; 1871.
[2] WERNER SIEMENS, *Pogg. Ann.*, t. CII, p. 66; 1857.

Dans la figure 219, A et B représentent les armatures d'un condensateur, L une lame vibrante entre deux contacts C et D, et P une pile d'un nombre suffisant de couples. Lorsque la lame est en vibration, le galvanomètre est parcouru par le courant de charge; si la pile P est placée sur une autre bran-

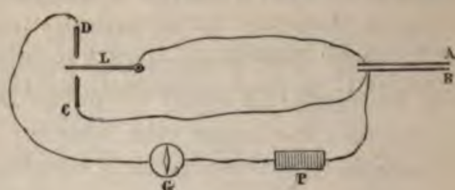


Fig. 219.

che (fig. 220), le galvanomètre reçoit le courant de décharge.

Appelant E la force électromotrice de la pile et n le nombre de vibrations complètes de la lame par seconde, le courant moyen est $I = nEC$, et la déviation correspondante est α,

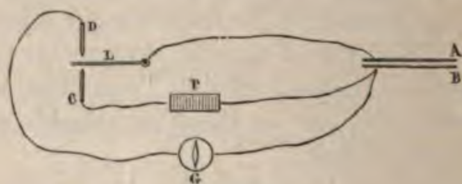


Fig. 220.

toutes réductions faites. Si le courant I_0 de la même pile dans une résistance R produit une déviation δ, on a encore

$$nEC = I, \qquad E = RI_0, \qquad nCR = \frac{I}{I_0} = \frac{\delta}{\delta_0}.$$

Lorsque la résistance R est choisie de manière que le courant soit le même dans les deux cas, il reste simplement $nCR = 1$, sans qu'on ait à se préoccuper de la graduation du galvanomètre [1].

[1] M. Lippmann fait remarquer (*C. R. l'Acad. des Sc.* t. CIV, p. 1070; 1887) qu'on aurait ainsi une mesure du temps par des procédés purement électriques. En effet, le produit d'une capacité par une résistance est un temps dans les deux systèmes (**418**); si on répète l'expérience avec une résistance et une capacité invariables, ou de dimensions géométriques déterminées, en modifiant la période de la lame vibrante de manière à égaler les deux courants, on en déduira la valeur de n correspondante et, par suite, l'unité de temps.

Un commutateur à bascule permet de diriger successive-ient, dans le même galvanomètre, les courants de charge ou e décharge. Le galvanomètre G (fig. 221) étant placé sur le ircuit de la pile qui aboutit aux bornes P et N du commu-ateur, les armatures du condensateur C sont reliées aux ornes A et B. Quant on fait osciller l'équipage du commu-ateur, la charge du condensateur est alternatiment $\pm$ EC; à haque mouvement, la quantité d'électricité qui traverse le ;alvanomètre est 2EC et, pour n oscillations simples par se-

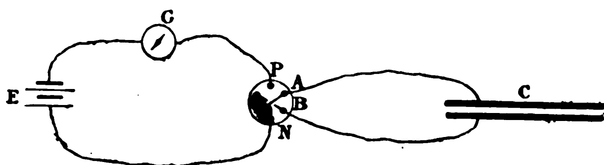


Fig. 221.

onde, le courant moyen est $2n$EC. En appelant R la résis-ance du circuit qui donnerait le même courant permanent, n a alors $2nCR = 1$.

Comme les oscillations du commutateur doivent être régu-ères, il sera plus commode, au point de vue mécanique, 'employer un appareil tournant.

Cette méthode suppose qu'à chaque opération les contacts ont maintenus assez longtemps pour que la charge ou la écharge du condensateur arrivent à l'état d'équilibre, condi-on qui n'est pas toujours réalisée.

Dans la dernière disposition, par exemple, appelons r la ésistance totale du circuit et q la charge du condensateur à époque t après le mouvement de bascule; le courant est $= -\frac{dq}{dt}$ et l'on a, en négligeant l'induction propre,

$$E = rI - \frac{q}{C} = -\left(r\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}\right).$$

Si Q est la charge initiale du condensateur, avant l'inver-on, il en résulte

$$EC + q = (EC + Q)e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Lorsque les deux espèces de contact ont la même durée θ, la charge variable q passe de $+Q$ à $-Q$, ce qui donne

$$Q\left(1+e^{-\frac{\theta}{rC}}\right)=EC\left(1-e^{-\frac{\theta}{rC}}\right).$$

Le courant moyen est alors $2nQ$ et la condition d'équilibre avec le courant permanent de même valeur devient

$$2nCR\left(1-e^{-\frac{\theta}{rC}}\right)=1+e^{-\frac{\theta}{rC}}.$$

743. Comparaison des capacités aux résistances. — Dans la mesure des courants moyens, les capacités ont été déterminées ou comparées par des résistances; nous pouvons considérer le problème d'une manière plus générale.

Entre deux points N et P d'un réseau de conducteurs renfermant des forces électromotrices constantes, on intercale une capacité C et, par l'une des dispositions précédentes, on la décharge n fois par seconde. Si E est la différence de potentiel des deux points dans le régime permanent, et qu'on suppose qu'après chaque interruption ce régime ait le temps de se rétablir, le courant moyen dans le fil de jonction est, avec le second mode d'interruption,

$$I=2nCE.$$

Les contacts ainsi établis modifient les courants de toutes les branches du réseau, mais la somme algébrique des courants induits reste nulle puisque le système reprend le même état après chaque interruption. Dès lors, l'intensité moyenne dans chacune des branches est indépendante de la manière dont se succèdent les décharges entre les points N et P; par suite, elle est la même que si on joignait ces deux points par un conducteur de résistance R_1 qui laisserait passer, sous forme de courant continu, le même débit I d'électricité, et réciproquement. Mais dans ce cas, en appelant R_2 la résistance qui séparait primitivement les deux points, on a, d'après le théorème de M. Thévenin (672),

$$I=\frac{E}{R_1+R_2}=2nCE.$$

Si la résistance R_1 est ajustée de manière que dans une branche quelconque l'intensité soit la même qu'avec les décharges du condensateur, il résulte

$$2nC(R_1+R_2)=1.$$

La capacité C se trouve ainsi déterminée en fonction de deux résistances connues et du nombre n des interruptions.

On peut se rendre compte plus complètement de la manière dont les courants de décharge se distribuent dans le réseau, en remontant aux équations générales. Soit i l'intensité à un instant donné dans une branche quelconque r qui renferme une force électromotrice e, L le coefficient de self-induction de cette branche et φ le flux des forces extérieures, dues à des aimants ou des courants. La différence de potentiel aux extrémités de la branche est $ri+\frac{d}{dt}(\varphi+Li)-e$.

Pour un circuit fermé dont elle fait partie, on a

$$\Sigma ri+\Sigma\frac{d}{dt}(\varphi+Li)-\Sigma e=0,$$

ou, en appelant $q'=\int idt$ la quantité d'électricité qui traverse la branche r pendant la durée θ d'une décharge

$$\Sigma rq'+[\Sigma(\varphi+Li)]_0^\theta-\Sigma e\theta=0.$$

Si les intensités sont les mêmes au début et à la fin de chacune des décharges, c'est-à-dire si le régime permanent a le temps de se rétablir et qu'aucun aimant ou courant extérieur n'ait été déplacé ni modifié, la quantité comprise entre parenthèses est nulle et il reste

$$\Sigma rq'-\Sigma e\theta=0.$$

Soit i_0 le courant relatif au régime permanent et $q=q'-i_0\theta$ l'excès de la décharge sur la quantité d'électricité qui correspondrait à ce régime ; l'équation précédente peut s'écrire

$$\Sigma rq+\theta(\Sigma ri_0-\Sigma e)=0.$$

Comme le second terme est nul, il en résulte

$$\Sigma rq = 0.$$

Ainsi, on peut dire que la décharge q se surperpose aux courants permanents et se partage entre les différentes branches en raison de leurs résistances respectives et indépendamment des forces électromotrices qu'elles renferment ([1]).

Ce théorème conduit à plusieurs méthodes particulières.

1° Si le réseau se compose d'un fil unique de résistance r et qu'on établisse le même courant dans les deux expériences, soit par les décharges du condensateur, soit par une résistance auxiliaire R_1 (fig. 221), on a

$$R = \frac{1}{2nC} = R_1 + r.$$

2° Si les points P et N sont réunis par deux résistances r

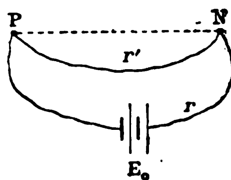


Fig. 222.

et r' (fig. 222), dont la première renferme une force électromotrice E_0, la résistance du réseau est

$$R_2 = \frac{rr'}{r + r'}.$$

Pour que le courant de la branche r' soit nul dans les deux expériences, il faut que la résistance compensatrice R_1 soit nulle; on a alors simplement

$$R = \frac{1}{2nC} = \frac{rr'}{r + r'}.$$

([1]) M. Brillouin, *Ann. de l'Éc. norm. sup.* [2], t. X, p. 9; 1881.

Au lieu de ramener les courants à la même valeur, on peut déterminer l'intensité I_0 du courant primitif et les intensités i et i' du courant dans les deux branches pendant le jeu du commutateur ; il en résulte

$$E_0 = I_0(r + r'), \qquad E = I_0 r' = E_0 \frac{r'}{r + r'},$$

$$I = 2nCE = \frac{E}{R} = I_0 \frac{r'}{R}.$$

Dans les conducteurs r' et r, les courants de décharge I' et $I - I'$ sont définis par la relation $r'I' = r(I - I')$, les courants moyens étant $i' = I_0 - I'$ et $i = I_0 + I - I'$, ce qui donne

$$I' = I \frac{r}{r + r'} = I_0 \frac{R_2}{R}, \qquad I - I' = I' \frac{r'}{r} = I_0 \frac{r'}{r} \frac{R_2}{R};$$

$$i' = I_0\left(1 - \frac{R_2}{R}\right), \qquad i = I_0\left(1 + \frac{r'}{r} \frac{R_2}{R}\right).$$

Le rapport des résistances R_2 et R peut ainsi être déterminé, soit par les courants successifs I_0 et i ou I_0 et i', soit par les courants simultanés i et i'.

Un galvanomètre à deux cadres rectangulaires (670), intercalé sur les branches r et r', donnerait directement le rapport des courants i et i' et, par suite,

$$\frac{R}{R_2}\left(1 - \frac{i'}{i}\right) = 1 + \frac{i'r'}{ir}.$$

La valeur de R serait encore déterminée par le rapport du courant I de décharge, soit au courant primitif I_0, soit à l'un des courants i et i'. Si on introduit, par exemple, un galvanomètre différentiel sur la branche r' et sur la communication d'un des points P ou N avec le condensateur, on peut choisir la résistance r' de façon que l'aiguille reste au zéro. Lorsque le galvanomètre est réglé, la condition $I = i'$ donne $R = r' + R_2$.

3° Supposons que la capacité à décharges soit intercalée entre deux points P et N sur l'une des branches b du parallélogramme de Wheatstone (fig. 223).

Les résistances a, a' et b' étant réglées de façon que le courant soit nul dans le pont pendant les décharges alternantes

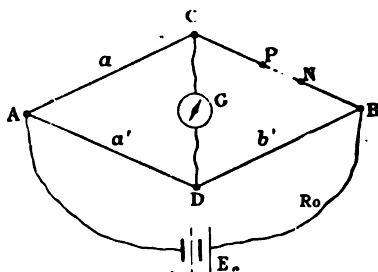


Fig. 223.

du condensateur, on remplace ensuite la capacité par une résistance R_1 qui satisfasse à la relation d'équilibre $R_1 a' = b'a$ des courants permanents et l'on aura $2nC(R_1 + R_2) = 1$.

Quant à la résistance R_2 du réseau entre les points B et C, elle a pour valeur (673), en désignant ici par R_0 celle du conducteur qui renferme la pile E_0,

$$R_2 = \frac{a'(a + R_0)(r + b') + aR_0(r + b') + rb'(a + R_0)}{a'(a + R_0 + r + b') + (R_0 + b')(a + r)}.$$

Cette méthode, indiquée par Maxwell [1], a été appliquée par M. J.-J. Thomson avec une modification qui permet l'emploi d'une lame vibrante [2].

Une des armatures du condensateur est reliée avec le sommet C du pont et l'autre avec une lame L qui oscille entre les contacts P et N (fig. 224). Le condensateur se décharge sur lui-même et sa charge seule intervient dans le courant général. Pour n oscillations complètes par seconde, l'intensité moyenne du courant de charge est nCE et, si l'équilibre du pont est réalisé dans les deux expériences, on a $nC(R_1 + R_2) = 1$.

La lame L était mise en mouvement par un trembleur électrique et les contacts établis sur des surfaces platinées; le nombre des vibrations était donné par la hauteur du son. Les valeurs obtenues pour la capacité sont restées très con-

(1) Cl. Maxwell, *Élect. and Magn.*, t. II, p. 375.
(2) J.-J. Thomson, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1883, p. 707.

cordantes à moins de 0,002 quand on a fait varier le nombre des oscillations de 16 à 128 par seconde et modifié dans de grandes limites la durée relative des contacts. Le phénomène

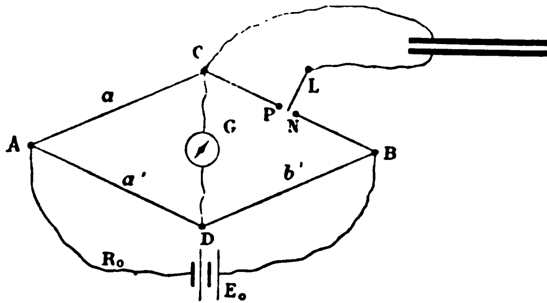


Fig. 224.

est donc bien défini et le condensateur avait le temps de prendre à chaque contact la charge dite instantanée.

L'expression de R_2 peut se simplifier si on choisit convenablement les différentes résistances [1]. En écrivant cette expression sous la forme

$$R_2 = \frac{ar(a'+R_0+b')+R_0 r(a'+b')+b'[a(a'+R_0)+a'R_0]}{(a+r)(a+R_0+b')+a'(R_0+b')},$$

on voit que, si les résistances R_0 et a' sont petites par rapport à b' et r, il reste sensiblement

$$R_2 = (a+R_0)\frac{r}{a+r}.$$

744. Comparaison avec les coefficients d'induction. — On obtient des effets de même nature par les décharges induites. La charge que prend une capacité C, mise en relation avec les extrémités d'une résistance R traversée par le courant permanent I, est $q = CRI$; lancée ensuite dans un galvanomètre balistique, elle donne

$$q = CRI = \frac{H}{G}\frac{\tau}{\pi}\alpha.$$

(1) R. T. Glazebrook, *Phil. Mag.* [5], t. XVIII, p. 98; 1884. Dans ces expériences, les résistances étant évaluées en ohms, on avait $a' = 10$, $R_0 = 5$ à 6, $a = 240$ à 1800, $b' = 1000$, $r = 11000$.

Soit M le coefficient d'induction mutuelle du circuit considéré et d'un circuit voisin de résistance R'. Lorsqu'on établit ou que l'on supprime le courant principal I, la décharge induite q' est définie par la relation

$$q'R' = MI.$$

Si on l'évalue par l'impulsion α' qu'elle produit dans le même galvanomètre, il en résulte

$$\frac{q}{q'} = \frac{CRR'}{M} = \frac{\alpha}{\alpha'}, \qquad C = \frac{M}{RR'}\,\frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Les deux systèmes de décharges peuvent encore être transformés en courants moyens par un jeu de commutateurs. La décharge du condensateur et la décharge induite étant répétées n fois et n' fois par seconde, les courants moyens correspondants i et i' dans un même galvanomètre donnent

$$\frac{nCRR'}{n'M} = \frac{i}{i'}, \qquad C = \frac{M}{RR'}\cdot\frac{n'i}{ni'}.$$

Une disposition mécanique convenable permettra d'envoyer alternativement les deux espèces de décharges, sous forme de courant moyen, dans le galvanomètre ou dans un galvanomètre différentiel : en réglant les résistances ou les valeurs de M et de C de manière que l'aiguille reste au zéro, on a $n = n'$, $i = i'$ et, par suite,

$$CRR' = M.$$

745. Influence du temps de charge. — Les recherches ingénieuses de Gaugain (741) sur les condensateurs à plateaux séparés par un diélectrique solide, par l'emploi de l'électroscope à décharges, ont montré que :

1° La charge d'un condensateur, pour une différence donnée de potentiel, augmente avec la durée de communication à la source dans un rapport qui peut aller de 1 à 5, par suite d'un phénomène auquel on donne quelquefois le nom de *viscosité électrique*. La charge n'est définie que pour un contact très court ; elle est dite alors instantanée.

2° La décharge instantanée, correspondant à une commu-
:ation de très courte durée entre les armatures, est égale
a charge instantanée.

Ce résultat est conforme à l'hypothèse de Maxwell sur le
faut d'homogénéité des diélectriques (**174**).

Il en résulterait aussi que l'absorption doit être nulle dans
milieu parfaitement homogène. Cette conséquence a été
ifiée par M. Rowland pour le spath d'Islande, qui paraît
e la substance naturelle la plus pure et la plus homogène.
s autres cristaux ont donné des résidus plus ou moins im-
rtants; l'absorption du quartz serait le neuvième de celle du
rre ordinaire ([1]).

Pour étudier la viscosité électrique, M. Wullner ([2]) met au
l l'une des armatures d'un condensateur et l'autre arma-
e en relation avec l'aiguille d'un électromètre. Aussitôt
rès la charge, le potentiel atteint d'abord un maximum et
isse ensuite très rapidement pendant les premières secon-
s, puis d'une manière beaucoup plus lente. La loi de dimi-
tion varie d'une substance à l'autre et ne reste pas identi-
e pour différents échantillons d'un même diélectrique.

MM. Porter et Morris ([3]) ont essayé de mettre en évidence
e sorte de retard, ou hystérésis, analogue à celui qu'on
serve dans les milieux magnétiques (**285**). Les deux dé-
arges d'un condensateur, porté à la même différence de
tentiel en montant ou en descendant, ont toujours donné la
me impulsion dans un galvanomètre balistique, alors qu'une
férence de 0,0001 eut été appréciable.

M. Bouty ([4]) a étudié avec beaucoup de soin ces phéno-
nes d'absorption dans les condensateurs à mica argenté.
and on intercale un condensateur dans le circuit d'une pile
grande résistance, la différence de potentiel des armatures
gmente d'abord, à partir de la fermeture du circuit, à cause
l'électricité accumulée dans le condensateur, et tend vers
e limite constante plus faible que si le circuit était inter-
mpu. Le courant continu qui subsiste dans ces conditions

([1]) ROWLAND et NICHOLS, *Phil. Mag.* [5], t. XI, p. 414; 1881.
([2]) A. WULLNER, *Wied. Ann.*, t. XXXII, p. 19; 1887.
([3]) PORTER et MORRIS, *Proceed. of the L. R. S.*, t. LVII, p. 469; 1895.
([4]) BOUTY, *Journ. de Phys.* [2], t. IX, p. 288; 1890 et [3], t. I, p. 5 et 445; 1892.

ne peut être attribué à la conductibilité du mica, car il ne varie pas d'une manière appréciable quand on augmente de 1 à 10 la surface des armatures.

Pour rendre compte des observations, la résistivité du mica doit être supérieure à $3,19.10^{10}$ ohms ou $3,19.10^{28}$, c'est-à-dire 2.10^{25} fois celle du cuivre, qui est égale à 1 600.

Il ne semble pas non plus que l'obstacle opposé par le mica au passage de l'électricité soit de nature électrolytique, car la polarisation devrait dépasser 20 volts et, en prenant pour capacité de polarisation celle du platine dans l'eau acidulée, la quantité d'électricité correspondante serait 10^5 fois plus grande que la charge normale du condensateur, tandis qu'elle est comprise entre 0,01 et 0,02 de cette charge.

On peut supposer enfin qu'il existe une sorte d'élasticité électrique résiduelle, mais cette explication serait en désaccord avec les expériences de MM. Porter et Morris.

Les résidus de charge et de décharge se déterminent de la manière suivante. Dans un circuit de faible résistance contenant une pile E non polarisable, on intercale en cascade deux condensateurs de capacité C et c, la première variable avec le temps, la seconde supposée sans perte ni résidu. Les armatures de c sont reliées à un électromètre capillaire et réunies d'abord par une dérivation s. On établit le courant; la capacité C se charge seule au potentiel E. Au bout du temps θ, on coupe la dérivation s; à l'époque $\theta+t$, la capacité c a pris une différence de potentiel très petite v, par l'accroissement de charge de C, dont la capacité est devenue $C+\delta C$ pendant que la différence de potentiel a varié de $\delta V=(E-v)-E=-v$. Il en résulte

$$cv=\delta(CV)=V\delta C+C\delta V=E\delta C-Cv,$$

$$q=E\delta C=(C+c)v.$$

Cette quantité q est l'accroissement normal qu'aurait pris la charge du condensateur C dans l'intervalle t.

Pour la décharge, après avoir laissé les deux condensateurs assez longtemps sur le circuit de la pile, on remplace la pile par un conducteur s'; le condensateur C se décharge en grande partie. Au bout du temps θ, on coupe la dérivation s; le cir

cuit est alors ouvert. A l'époque $\theta + t$, la charge résiduelle porte les deux condensateurs au même potentiel v' et la charge totale rendue libre est

$$q' = (C + c)v'.$$

M. Bouty a trouvé ainsi que : 1° les charges q et q' sont égales pour le même intervalle, compris entre les temps θ et $\theta + t$; 2° ces quantités sont proportionnelles à la force électromotrice E de la pile de charge; 3° on peut les représenter par la formule empirique

$$q = A[(t + \theta)^m - \theta^m].$$

Le phénomène conserve le même caractère jusqu'à la température de 200°. Au delà, l'égalité des résultats à la charge et à la décharge n'a plus lieu ; le mica paraît éprouver une altération superficielle qui le rend conducteur.

746. Pouvoir inducteur spécifique. — On a supposé jusqu'à présent, au moins d'une manière implicite, que les phénomènes électriques étaient mesurés dans l'air, mais l'influence des gaz est si faible (**99**) que l'on peut pratiquement considérer leur pouvoir inducteur spécifique par rapport au vide comme égal à l'unité. Le pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique sera donc déterminé par le rapport des capacités d'un condensateur quand le milieu interposé est alternativement le diélectrique considéré et l'air (**83**).

La théorie électromagnétique de la lumière conduit à cette conséquence (**451**) que le pouvoir inducteur spécifique d'un milieu diélectrique doit être égal au carré de son indice de réfraction pour la lumière, mais cette théorie ne s'applique qu'à des phénomènes oscillatoires dont la période est comparable à celle des vibrations lumineuses. On ne peut donc rien conclure, à ce point de vue, des résultats *pratiques* obtenus dans la plupart des cas. Nous avons vu, au contraire, que les expériences de M. Blondlot (**452**) sur le phénomène de Hertz confirment la théorie de Maxwell.

Cavendish [1] avait trouvé déjà que la capacité d'un carreau

[1] CAVENDISH, *Electrical Researches*, publiées par Maxwell, p. 183.

de Franklin, comparée à celle d'un système de deux sphères concentriques séparées par de l'air, est toujours plus grande que si le verre était remplacé par une couche d'air. Ces expériences conduisaient à des pouvoirs inducteurs spécifiques très élevés, de 3 à 10, à cause de l'influence du temps et des phénomènes d'absorption.

Dans une première série de recherches, par le partage des charges (**740**) entre deux condensateurs sphériques de mêmes dimensions, l'un à couche d'air et l'autre à diélectrique solide total ou partiel, Faraday [1] a trouvé les valeurs suivantes pour les pouvoirs inducteurs :

Spermaceti.	1,45	Gomme laque. . .	2,0
Verre	1,76	Soufre.	2,24

Par la comparaison des charges (**741**) de condensateurs à plateaux, Gaugain a démontré que la valeur apparente du pouvoir inducteur spécifique croît avec la durée de la charge. Les variations sont très inégales pour les différents corps, et l'ordre même des pouvoirs inducteurs peut être modifié ; nous citerons quelques exemples :

Charge d'une fraction de seconde.		Charge de deux secondes.	
Acide stéarique. . .	1,30	Soufre	1,71
Cire.	1,50	Acide stéarique . .	1,92
Soufre fondu. . . .	1,57	Cire.	2,21

Des traces de matières étrangères, telles qu'une couche de poussière ou d'humidité, rendent la surface des corps plus conductrice et ont pour effet d'augmenter la valeur apparente du pouvoir inducteur spécifique. L'altération spontanée de la surface produit le même résultat.

Afin d'éviter ces causes d'erreur, au moins en grande partie, M. Wullner (**745**) emploie des charges aussi faibles que possible, en observant la valeur initiale du potentiel sur l'armature isolée. Les nombres relatifs à une même lame restent à peu près constants, mais diffèrent pour des substances en apparence identiques.

(1) Faraday, *Exper. Researches*, série XI, § 1187; 1837.

est clair que si on rapproche B, l'influence sera augmentée de ce côté, la feuille b deviendra positive, la feuille a négative, et on constatera une attraction.

Remettant les plateaux en place, on intercale entre C et B une plaque diélectrique d'épaisseur e ; si la distance des plateaux est très petite par rapport à leurs dimensions, la lame introduite équivaut (91) à une couche d'air K fois moindre. Les feuilles d'or sont électrisées comme si on avait rapproché l'armature B, elles s'attirent et on détermine la quantité e'



Fig. 225.

dont il faut alors éloigner l'armature B pour rétablir l'équilibre primitif ; on a alors

$$e = e' + \frac{e}{K}, \qquad K = \frac{e}{e - e'}.$$

Cette disposition présente l'inconvénient que le défaut d'équilibre, de quelque côté qu'il ait lieu, produit toujours une attraction des feuilles d'or. Si on relie les plateaux A et B aux quadrants d'un électromètre dont l'aiguille communique avec le plateau C, il n'est plus nécessaire de relier d'abord ces plateaux avec le sol ; l'aiguille reste au zéro si l'influence est la même de part et d'autre et, quel que soit le signe de l'électrisation, le sens de la déviation indique le côté vers lequel a lieu le maximum d'influence.

Afin d'éliminer l'influence des corps extérieurs sur les plateaux A et B de Faraday et de réaliser, autant que pos-

sible, le cas de surfaces parallèles indéfinies, lord Kelvin et Maxwell ont donné l'idée générale d'une balance dont les indications sont plus correctes. Les plateaux A et B, qui communiquent avec les quadrants d'un électromètre E (fig. 226), sont placés dans les intervalles de trois plateaux C, A_1 et B_1 de dimensions plus grandes; les plateaux extérieurs A_1 et B_1 sont réunis entre eux et le plateau intermédiaire communique avec l'aiguille de l'électromètre [1].

Une fois l'équilibre établi, l'aiguille doit rester immobile, quelle que soit la différence de potentiel établie entre les conducteurs C et A_1B_1, si le système est entièrement symétrique.

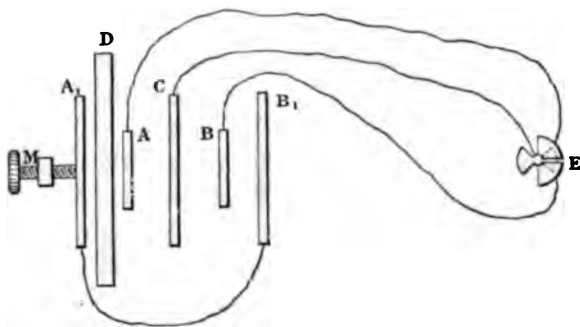


Fig. 226.

L'un des plateaux extrêmes A_1 est muni d'une vis de rappel M qui permet de le déplacer parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que la condition soit réalisée.

On introduit entre A_1 et A une plaque diélectrique D d'épaisseur e, et on mesure avec la vis micrométrique M le déplacement e' du plateau A_1 nécessaire pour rétablir l'équilibre, ce qui donne le pouvoir inducteur spécifique.

Comme ce pouvoir inducteur est une fonction du temps de charge, on met les conducteurs C et A_1B_1 en communication avec les pôles d'une bobine d'induction dont le courant inducteur est interrompu par une lame vibrante ou par un appareil électromagnétique à rotation qui peut donner jusqu'à 12000 interruptions par seconde.

(1) J. E. H. GORDON, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1879, p. 417. — *Traité exp. d'Élect. et de Magn.* Traduction française, t. I, p. 171.

M. Gordon a constaté que pour les verres, en particulier, la manière dont on nettoie les surfaces joue un rôle important et que leur altération spontanée se manifeste par un accroissement notable du pouvoir inducteur.

Pour le mica, M. Bouty place en cascade sur le circuit d'une pile E un condensateur de faible capacité C avec un microfarad F. Le courant étant fermé pendant un temps très court t, le microfarad prend une différence de potentiel v et le condensateur $E-v$, ce qui donne $C(E-v)=Fv$. On en déduit le pouvoir inducteur par surface et l'épaisseur du mica.

Ces expériences d'équilibre électrostatique conduisent presque toujours à des valeurs de beaucoup supérieures aux carrés des indices de réfraction.

M. Pellat ([1]) utilise le changement qu'éprouve l'attraction des plateaux par l'introduction du diélectrique.

Deux électromètres absolus sont disposés l'un au-dessus de l'autre, en sens inverse, les plaques mobiles a et a' étant portées par un fléau de balance; on équilibre le système de manière que ces plaques occupent chacune leur position normale dans le plan des anneaux de garde. Le plateau attractif B' de l'électromètre inférieur est fixe et à une distance constante d' de sa plaque mobile. Le plateau supérieur B peut être déplacé par une vis micrométrique.

Les plaques a et a', avec les anneaux de garde, sont reliées au sol; les plateaux attractifs B et B' sont aussi reliés entr'eux et peuvent être électrisés au même potentiel. L'action exercée sur chacune des plaques est proportionnelle à leur surface et au carré du champ.

Quand on électrise l'appareil, on ramène les plaques dans leur position primitive par l'ajustement de la distance d de l'électromètre supérieur. Si alors on introduit entre les armatures une lame diélectrique d'épaisseur e, l'équilibre n'existe plus; on le rétablit en éloignant le plateau B d'une quantité $e'=e-\frac{e}{K}$; c'est une variante de l'expérience qui précède.

On peut ici éliminer l'influence du temps et de l'électricité libre qui pourrait se trouver sur le diélectrique en donnant au

([1]) PELLAT, *Journ. de Phys.* [3], t. IV, p. 501; 1895.

entiel des valeurs égales et contraires ; il suffit, pour cela, relier les armatures au fil induit d'une bobine dont le fil naire est parcouru par un courant alternatif.

48. **Décharges oscillantes.** — M. Schiller [1] a recours aux harges oscillantes produites dans le fil secondaire d'une ine d'induction par la rupture du circuit primaire.

es armatures du condensateur communiquent, d'une part c les extrémités du fil, de l'autre avec les quadrants d'un trométre, l'un de ces quadrants étant au sol. Le mouvent d'un pendule (650) rompt d'abord le circuit primaire, s la communication de l'armature isolée avec le fil induit. lectromètre donne la différence de potentiel des armatures moment de cette seconde interruption. Une vis microméue permet de régler l'intervalle des opérations du pendule qu'à 10^{-6} seconde.

n dispose l'expérience de manière que l'électromètre reste zéro pour deux intervalles successifs, dont la différence la moitié de la période des oscillations.

n désignant par r et L les constantes du circuit et par C apacité totale, la période T est donnée par la relation

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2},$$

l est facile de choisir des conditions expérimentales telles le second terme soit négligeable.

n fait trois séries d'expériences : l'une avec le fil induit l, les deux autres avec un condensateur à plateaux comnant un diélectrique ou une couche d'air.

Désignant par t, T et T′ les trois périodes obtenues, par $+$ KC et $c + C$ les capacités correspondantes du système, en déduit

$$\frac{c}{t^2} = \frac{c + KC}{T^2} = \frac{c + C}{T'^2}, \qquad K = \frac{T^2 - t^2}{T'^2 - t^2}.$$

e pouvoir inducteur correspond à une durée très courte, périodes étant de l'ordre de $0^s{,}00005$.

[1] SCHILLER, *Pogg. Ann.*, t. CLII, p. 535; 1874.

749. Action sur une sphère diélectrique. — Si l'on considère une sphère diélectrique de volume v située dans un champ non uniforme (**129**), elle subit une action dont la composante parallèle à l'axe des x a pour expression

$$X = \frac{Hv}{2}\frac{\partial F^2}{\partial x} = \frac{v}{2}\frac{3}{4\pi}\frac{K-1}{K+2}\frac{\partial F^2}{\partial x}.$$

L'action X_0 qui s'exercerait sur une sphère conductrice d'égal volume s'obtiendra en faisant $K = \infty$; il en résulte

$$\frac{X}{X_0} = \frac{K-1}{K+2}, \qquad K = \frac{X_0 + 2X}{X_0 - X}.$$

M. Boltzmann [1] applique cette méthode par deux dispositions expérimentales différentes.

Dans l'une d'elles, le rapport des actions X et X_0 est déterminé par les déviations de la verticale. Deux balles sphériques de soufre, par exemple, l'une rendue conductrice par une feuille d'or, avaient $0^c,7$ de diamètre et étaient suspendues à la distance de 9 centimètres à deux fils de 2 mètres situés en face d'une échelle divisée. Quand on introduit entre elles une boule métallique électrisée de $2^c,6$ de diamètre, les balles sont attirées inégalement; si on règle l'expérience de façon que la boule active reste au milieu de l'intervalle des balles mobiles, le rapport des attractions est égal au rapport des déviations, qu'on observe au microscope, ou, plus généralement, au produit du rapport des déviations par le rapport des poids des balles. Il est difficile, dans ce cas, d'assurer l'égalité des distances et d'éviter l'action des courants d'air.

Dans d'autres expériences, la balle mobile B est attachée par deux fils à l'extrémité d'une tige métallique (fig. 227), portée elle-même par une suspension bifilaire F, de manière à constituer une petite balance de torsion; un miroir M sert à mesurer les déviations; l'aiguille de cette balance est protégée par une enveloppe contre les courants d'air. La boule active communique avec une bouteille de Leyde à laquelle on donne une charge déterminée au moyen d'un électromètre

(1) BOLTZMANN, *Wiener Sitz. berichte*, t. LXVIII, part. II, p. 81; 1873 et t. LXX, part. II, p. 342; 1874.

lécharges (**612**); on vérifie d'ailleurs par une balance de rsion conductrice et communiquant au sol, analogue à la emière, que le potentiel de la bouteille de Leyde reprend la ême valeur dans les expériences successives.

Si la balle mobile est formée alternativement d'un diélecique et d'un conducteur, le rapport des déviations est égal ı rapport des attractions correspondantes. Toutefois il reste faire de petites corrections qui tiennent, soit à la différence

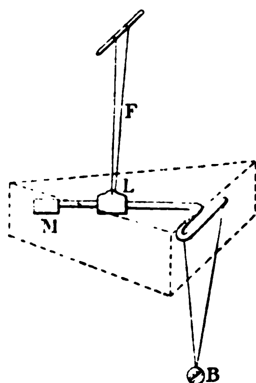


Fig. 227.

volume des balles, soit au changement de distance produit ır les attractions inégales.

Comme les actions qu'on observe sont toujours attractives, ıel que soit l'état électrique de la bouteille de Leyde, on ut répéter l'expérience en opérant à la main un certain ombre de charges et de décharges successives, ou même en ternant les signes par le jeu d'une lame qui vibre entre les matures de deux batteries électrisées en sens contraires. ı détermine ainsi l'influence de la durée de charge sur le uvoir inducteur spécifique.

Dans ces expériences d'attraction, le phénomène dépend la masse entière du corps électrisé par influence, et non s seulement de la surface, comme pour les conducteurs; M. Romich et Fajdiga (¹) l'ont vérifié sur des balles de soufre couvertes de paraffine ou de gomme laque.

(¹) Romich et Fajdiga, *Wiener Sitz. berichte*, t. LXX, part. II, p. 367; 1874.

749. Action sur une sphère diélectrique. ·
dère une sphère diélectrique de volume v situ
non uniforme (129), elle subit une action do
parallèle à l'axe des x a pour expression

$$X = \frac{Hv}{2}\frac{\partial F^2}{\partial x} = \frac{v}{2}\frac{3}{4\pi}\frac{K-1}{K+2}\frac{\partial}{\partial}$$

L'action X_0 qui s'exercerait sur une s
d'égal volume s'obtiendra en faisant K = ∞

$$\frac{X}{X_0} = \frac{K-1}{K+2}, \qquad K = \frac{X_0+}{X_0}$$

M. Boltzmann [1] applique cette mét
sitions expérimentales différentes.

Dans l'une d'elles, le rapport des act
miné par les déviations de la vertica
ques de soufre, par exemple, l'une re
feuille d'or, avaient $0^c,7$ de diamètr
la distance de 9 centimètres à deux
face d'une échelle divisée. Quand
boule métallique électrisée de $2^c,6$
attirées inégalement; si on règl
la boule active reste au milie
mobiles, le rapport des attracti
déviations, qu'on observe au m
ment, au produit du rapport d
poids des balles. Il est difficile,
des distances et d'éviter l'acti

Dans d'autres expériences,
par deux fils à l'extrémité d
portée elle-même par une s
à constituer une petite bal
à mesurer les déviations;
tégée par une enveloppe
active communique avec
on donne une charge dé

(1) BOLTZMANN, *Wiener Sitz.*
part. II, p. 342; 1874.

teur, c'est-à-dire finale-
...ducteur lorsque la diffé-

...omètre de forme parti-
...térieur d'un cylindre de
...ds qui jouent le rôle des
... par deux secteurs cylin-
...st en communication avec
...uadrants opposés avec les
...lieu est au sol. On mesure la
...plein d'air, puis quand il est
... de térébenthine par exemple;
...potentiel, la déviation est pro-
...ucteur spécifique; on évite la
...nt les communications des pôles
...rant la double déviation.
...eux électromètres à quadrants su-
...nts sont réduits à des secteurs plans
... boîte fermée. Les deux aiguilles sont
... même suspension, et l'on fait en sorte
...auxquels elles sont soumises soient de
...tance de l'aiguille inférieure à ses qua-
...ble, on équilibre les couples en modi-
...quadrants de l'électromètre supérieur à
...ante. Supposons que l'appareil soit équi-
...ce d à l'électromètre supérieur, quand les
...es paires de quadrants sont électrisés, les
...tant au sol. Si on plonge l'électromètre infé-
...ide, l'équilibre est troublé; on le rétablit en
...rants supérieurs à la distance d'.
...er le changement produit par le liquide, on
...t l'électromètre supérieur à un même poten-
...ure les déviations δ et δ' qui correspondent aux
...' . Comme ces déviations sont respectivement
...es aux couples électriques de l'électromètre et,
...eux qu'éprouvait l'électromètre inférieur, à dis-
...nte, avant et après l'introduction du liquide, il

...g. *Ann.*, t. CLVI, p. 389; 1875.
Journ. de Phys. (2), t. X, p. 149; 1891.

La méthode présente surtout l'avantage de n'exiger qu'un très petit volume du corps soumis à l'expérience et de pouvoir être appliquée aux cristaux (**497**).

En mesurant l'attraction exercée sur des sphères de soufre cristallisé, suivant des directions parallèles aux axes principaux, M. Boltzmann a obtenu trois valeurs très différentes du pouvoir inducteur spécifique, qui se rapprochent beaucoup des carrés des indices de réfraction correspondants, relatifs à la raie D :

$$K_1 = 3{,}811, \qquad K_2 = 3{,}970, \qquad K_3 = 4{,}773.$$
$$n_1^2 = 3{,}834, \qquad n_2^2 = 4{,}153, \qquad n_3^2 = 5{,}018.$$

En appliquant la même méthode à plusieurs corps isotropes ou cristallisés, MM. Romich et Nowak [1] ont fait varier la durée de la charge entre des limites très étendues. Les matières imparfaitement isolantes ne tardent pas à se comporter comme des conducteurs; même pour des durées très courtes, il devient alors difficile de constater une inégalité des pouvoirs inducteurs spécifiques suivant différentes directions.

Par une disposition analogue, M. Borel [2] a déterminé les constantes diélectriques principales de divers cristaux orthorhombiques ou clinorhombiques. Dans ce dernier cas, deux des axes principaux ne sont pas définis par la symétrie cristalline et ne peuvent avoir qu'une relation éloignée avec ceux des phénomènes optiques.

750. Liquides. — L'expérience présente ici des difficultés spéciales à cause des mouvements du liquide qui transportent l'électricité par convection d'une armature sur l'autre. On sait, par exemple, qu'il est impossible de maintenir chargé un condensateur à diélectrique liquide.

Sous cette réserve, les méthodes précédentes peuvent être appliquées aux liquides; il suffit de placer le liquide dans une cuve à faces parallèles et d'étudier séparément l'influence de la cuve vide ou pleine.

Si les appareils sont placés dans le liquide même, leur action réciproque est proportionnelle (**96**) au carré du champ

(1) Romich et Nowak, *Wiener Sitz. berichte*, t. LXX, part. II, p. 380; 1874.
(2) Ch. Borel, *Arch. de Genève*, [3], t. XXX, p. 131; 1893.

en résulte $K = \frac{\delta'}{\delta}$. Pour la benzine et l'essence de pétrole, les pouvoirs inducteurs ainsi déterminés ont été très voisins du carré des indices de réfraction relatifs à la raie D :

	K.	n^2.
Benzine.	2,235	2,25
Essence de pétrole.	2,170	2,11

La même disposition permet d'étudier la variation du pouvoir inducteur spécifique avec le temps.

L'appareil de M. Pellat (747), qui repose sur le même principe, convient également aux liquides. On noie d'abord l'électromètre inférieur dans le liquide et on l'équilibre quand tout est à l'état neutre. La différence de potentiel étant établie, l'attraction sur le disque a' est devenue K fois plus grande; on compense cet effet en diminuant de x la distance primitive d de l'électromètre supérieur. Il en résulte

$$\frac{a'}{d'^2}(K - 1) = \frac{a}{(d - x)^2} - \frac{a}{d^2}.$$

Si l'on fait $a' = a$ et $d' = d$, il reste simplement

$$K = \left(\frac{d}{d - x}\right)^2.$$

Il est nécessaire de dégager le rôle que joue la conductibilité propre du liquide. M. Bouty, par exemple, met sur le circuit d'une pile E un microfarad F et un condensateur à liquide de capacité C beaucoup plus faible, dont la résistance r est très grande par rapport à celle du circuit. Pendant un temps t très court, réglé par un interrupteur à pendule, le débit d'électricité est $Q = CE + \frac{E}{r}t$.

Si on remplace le liquide par de l'air, la charge totale est $q = \frac{C}{K}E$. Le rapport des charges Q et q étant déterminé par les différences de potentiel du microfarad, il en résulte

$$\frac{Q}{q} = K\left(1 + \frac{t}{Cr}\right) = K + \frac{Kt}{Cr}.$$

En appelant S la surface du condensateur, e son épaisseur et ρ la résistivité du liquide, on a

$$C = K \frac{S}{4\pi e}, \qquad r = \rho \frac{e}{S};$$

$$\frac{Q}{q} = K + \frac{4\pi}{\rho} t.$$

Pour que l'expérience soit capable de donner en même temps les valeurs de K et de ρ avec une exactitude suffisante, il faut que le rapport $\frac{K\rho}{4\pi}$ soit de l'ordre de l'intervalle de temps t, lequel était compris entre $0^s,0001$ et $0^s,03$.

On a ainsi obtenu, pour différents liquides, en évaluant la résistivité ρ en ohms,

	K.	ρ.
Sulfure de carbone......	2,715	$>1,5.10^{13}$
Essence de thérébentine. .	2,314	$=1,75.10^{12}$
Benzine (à 20°)........	2,21	$=1,56.10^{12}$

Avec les mélanges de liquides, la résistivité diminue beaucoup et le pouvoir inducteur augmente.

751. Gaz. — L'objection relative au transport de l'électricité par les molécules n'a plus ici la même importance, puisque la charge d'un condensateur à gaz se conserve longtemps. Faraday, malgré de nombreux essais, ne put constater aucune différence entre les pouvoirs inducteurs spécifiques des gaz; M. Boltzmann et, plus tard, MM. Ayrton et Perry [1] y ont réussi de la manière suivante.

Le condensateur de M. Boltzmann est formé de deux plateaux métalliques parallèles A et B, placés sous une cloche, et garantis par des plateaux plus larges contre toute influence extérieure. Le plateau A est relié d'une manière permanente au pôle positif d'une pile de 300 couples; le pôle négatif communique au sol et à une des paires de quadrants d'un électromètre dont l'aiguille est électrisée; le plateau B est relié à l'autre paire de quadrants.

L'aiguille est ramenée d'abord au zéro par la mise au sol du

[1] AYRTON et PERRY, *Mém. lu à Soc. As. du Japon*, Yokohama; 1877.

plateau B pendant un instant ; quand on fait ensuite le vide dans la cloche ou qu'on remplace l'air par un autre gaz, il se produit une déviation.

Si V est la force électromotrice de la pile, K et K' les pouvoirs inducteurs spécifiques des deux gaz, la différence de potentiel entre les plateaux, qui était d'abord égale à V dans la première expérience, devient dans le second cas $V\frac{K}{K'}$ (91), puisque la charge du plateau B reste sensiblement la même. En désignant par δV la variation de potentiel qui correspond à la déviation de l'aiguille, on peut écrire

$$\delta V = V\left(1 - \frac{K}{K'}\right), \quad \frac{K}{K'} = 1 - \frac{\delta V}{V}.$$

Comme l'électromètre doit être très sensible pour ce genre d'observations, on détermine le potentiel V par la déviation que produit un seul couple.

Par rapport au vide, tous les gaz ont un pouvoir inducteur spécifique plus grand que l'unité, moindre pour l'hydrogène que pour l'air. La variation de potentiel δV est donc négative quand on fait le vide sur un gaz ou qu'on remplace l'air par l'hydrogène.

MM. Ayrton et Perry comparent, au moyen de la balance des capacités (fig. 217), un étalon à air avec un condensateur lamellaire formé de douze plaques entre lesquelles on pouvait introduire un gaz quelconque ou faire le vide.

752. Capacité de polarisation. — La charge d'un condensateur et la polarisation des électrodes présentent une analogie très étroite (**182**). Toute quantité q d'électricité qui traverse un voltamètre, sans y provoquer aucun dégagement apparent de gaz, détermine entre les électrodes une différence de potentiel e; si on pose $q = ce$, le facteur c peut être défini la capacité de polarisation de l'électrode. Le procédé le plus simple pour mesurer cette grandeur serait de mettre le voltamètre en relation avec une pile de force électromotrice connue, inférieure au maximum de polarisation, puis de mesurer la décharge obtenue en fermant le voltamètre par un galvanomètre ([1]). Toutefois,

([1]) VARLEY, *Phil. Trans. R. S. L.*, t. CLXI, p. 129; 1871.

xpérience est complexe, parce que l'équilibre n'est pas instané, à la charge ou à la décharge, et il y a une perte ›table due à la dépolarisation par diffusion.

M. Blondlot [1] évite cette cause d'erreur en commençant ır étudier comment s'établit la polarisation en fonction de durée de la charge. Au moyen d'un interrupteur à pendule, met le voltamètre en communication avec une force électroıotrice donnée, pendant un temps très court, puis ferme le oltamètre sur lui-même par une résistance très faible, pour e dépolariser. La quantité d'électricité correspondant au couant de charge est mesurée par un galvanomètre balistique. In faisant varier la durée du contact, on peut construire la ourbe des charges en fonction du temps. Cette courbe s'élève rapidement et, sans la déperdition, deviendrait bientôt ıorizontale; en réalité elle tend à se confondre avec une droite nclinée AL (fig. 228) dont l'inclinaison sur l'axe des abscisses

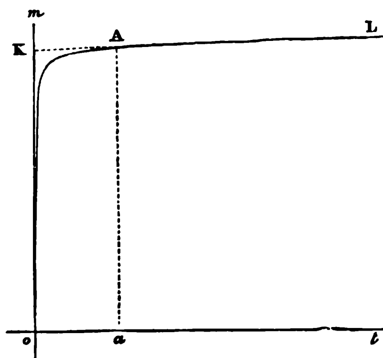


Fig. 228.

'eprésente la déperdition; l'ordonnée OK à l'origine mesure a charge vraie capable de donner aux électrodes une différence de potentiel égale à celle de la pile.

L'expérience étant répétée avec des forces électromotrices ariables, on peut construire la courbe représentative des harges en fonction de la force électromotrice. Si la capacité tait constante, cette courbe se réduirait à une droite passant ır l'origine; en réalité elle tourne sa convexité vers l'axe des

[1] BLONDLOT, *Journal de Physique*, t. X, p. 277, 333, 434; 1881.

- :arges croissent plus vite que
- . · coefficient angulaire de la tan-
. ·· oint la capacité vraie ; on peut
.e *initiale* la valeur limite de ce
- lectromotrice tend vers zéro.
:i des deux électrodes représente
... .. ·tablit entre les forces électromo-
:ginairement égales, des deux élec-
. -i la surface d'une des électrodes
..:e infinie par rapport à l'autre, on peut
. .. ·le la première et, par suite, sa force
·.tact n'est pas modifiée; la différence
.. · iors la variation de la force électromo-
· :a seconde. En prenant cette dernière
·.nme anode ou cathode, c'est-à-dire en la
. .ie ou d'hydrogène, l'expérience donne la
. . ·a capacité initiale; celle-ci est donc indé-
.. .. ie la polarisation. Si on compte les forces
.. . .es charges correspondantes comme posi-
.... suivant que l'électrode active est elle-même
.....ae. on obtient deux courbes qui se raccordent
...me on le voit dans la figure 229.
. ıontre que la capacité d'une électrode déter-

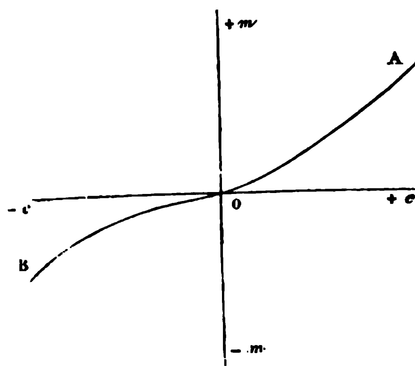


Fig. 229.

. .epend que de la différence de potentiel qui existe
..e électrode et le liquide en contact et non de la

ure du liquide : c'est l'extension à une surface solide en ıtact avec un liquide de la loi signalée plus haut (**196**) ır le mercure. La courbe de la figure 229, relative à l'eau dulée par l'acide sulfurique, convient donc pour tout élec-lyte donnant de l'hydrogène et de l'oxygène.

Pour démontrer cette loi, M. Blondlot place les deux élec-des dans des liquides différents, séparés par une cloison euse. Les forces électromotrices de contact étant inégales, système constitue un couple ; mais quand on ferme le cir-t jusqu'à ce que le courant devienne nul, la polarisation a cisément pour effet de ramener à l'égalité les chutes de entiel de part et d'autre. Si l'une des électrodes est très ınde et reste sans altération sensible, la capacité initiale la petite est alors la même que lorsqu'elle est plongée dans même liquide que la grande. Si les électrodes ont des sur-es égales, M. Blondlot démontre que leurs capacités sont ıles en s'appuyant sur la remarque suivante.

Soit e, à un instant donné, la différence de potentiel entre ectrode et le liquide en contact; pendant le temps dt, cette férence éprouve une variation totale

$$de = \frac{\partial e}{\partial t}\,dt + \frac{\partial e}{\partial q}\,dq = \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dt}\right)dt.$$

Le premier terme correspond à la dépolarisation spontanée diffusion, le second au passage d'une quantité dq d'élec-ité à travers l'électrode. Si on remarque que la dérivée tielle $\frac{\partial e}{\partial q}$ représente l'inverse de la capacité et $\frac{dq}{dt}$ le cou-t i qui traverse l'électrode, on peut écrire

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{i}{c}\right)dt.$$

Quand on ferme le couple sur lui-même, il se produit un ırant très faible et qui finit par devenir constant ; on a alors = o et on peut écrire, pour chaque électrode,

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{i}{c} = 0, \qquad \frac{\partial e'}{\partial t} - \frac{i}{c'} = 0$$

Si les capacités c et c' sont égales, comme le veut la loi, il résulte des équations précédentes

$$\frac{\partial(e+e')}{\partial t} = 0.$$

Quand on interrompt le circuit, la somme algébrique des deux forces électromotrices doit donc rester constante; en d'autres termes, ces forces électromotrices varient de quantités égales et de signes contraires.

On peut s'en assurer par une expérience directe, en reliant chacune des électrodes respectivement à l'armature intérieure de deux condensateurs identiques réunis par leurs armatures extérieures. La communication étant établie entre l'armature extérieure commune et le liquide qui entoure les électrodes, par l'intermédiaire d'un galvanomètre ou mieux d'un électromètre, on rompt le circuit dans lequel le couple était intercalé. Si les deux électrodes sont égales, l'aiguille reste immobile, d'où résulte que les armatures éprouvent des variations de potentiel égales et de signes contraires : l'aiguille est déviée dans un sens ou dans l'autre dès qu'il existe une différence sensible entre les surfaces des deux électrodes.

Remarquons, en passant, que l'équation (1) fournirait un procédé pour mesurer la capacité c de polarisation. Le voltamètre étant relié à une pile de force électromotrice inférieure au maximum, on mesurerait le courant i de dépolarisation et, après avoir rompu la communication, la déperdition $\frac{\partial e}{\partial t}$ de la force électromotrice par un électromètre.

Les expériences de M. Bouty (¹) ont été faites par une méthode différente. Un voltamètre de résistance r est intercalé dans un circuit renfermant une force électromotrice E très grande par rapport au maximum de polarisation et dont la résistance R est telle que le courant reste très faible et sensiblement uniforme. A la fermeture de ce circuit, le courant est I_0 et la différence de potentiel des électrodes du voltamètre a pour expression

$$V = I_0 r = E\frac{r}{R-r}.$$

(¹) E. Bouty, Ann. de Chim. et de Phys., 7e s., t. III, p. 145; 1894.

Au bout du temps t, la polarisation est devenue e et la dif-
rence de potentiel des électrodes V ; on a alors

$$V = e + \mathrm{I}r = e + r\frac{\mathrm{E} - e}{\mathrm{R} + r} = \mathrm{V}_0 + e\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} + r},$$

$$e = (\mathrm{V} - \mathrm{V}_0)\frac{\mathrm{R} + r}{\mathrm{R}}.$$

Par un mouvement de pendule, on ferme d'abord le cir-
iit principal; aussitôt après, le pendule relie les électrodes
ıx armatures d'un condensateur, pendant un temps de quel-
ıes centièmes de seconde suffisant pour établir l'équilibre, et
pète le même contact un certain nombre de fois, à des in-
rvalles τ, par chacune de ses oscillations. La capacité γ du
ındensateur peut être négligée par rapport à celle du volta-
ètre; on détermine la différence de potentiel initiale V_0 et
valeur V au bout de temps $t = n\tau$, soit par compensation,
it par un électromètre.

Le courant de décharge se mesure d'une manière analogue.
: voltamètre étant fermé par une résistance R, on détermine
s différences de potentiel décroissantes V_0, V_1, ..., V_n aux
oques o, τ, ..., $n\tau$, d'où l'on déduit les polarisations corres-
ındantes e_0, e_1, ..., e_n. Si c'_n désigne la capacité pendant un
s intervalles τ, où la polarisation moyenne est $\frac{e_{n-1} + e_n}{2}$,
q' la décharge qui en résulte, on a

$$q' = c'_n(e_n - e_{n-1}) = \frac{e_{n-1} + e_{n+1}}{2\mathrm{R}}\tau,$$

$$c'_n = \frac{\tau}{\mathrm{R}} \cdot \frac{e_{n-1} + e_{n+1}}{2(e_n - e_{n-1})} = \frac{1}{\mathrm{R}p_n}.$$

: rapport p_n représente la vitesse moyenne de dépolarisation
ative dans cet intervalle.

La décharge totale est

$$\mathrm{Q}' = \Sigma q' = \left(\frac{e_0}{2} + e_1 + e_2 + \ldots\right)\frac{\tau}{\mathrm{R}}.$$

Pour un certain nombre de dissolutions d'acides, de bases,
des sels en fusion, quelles que soient la distance et la forme

des électrodes, la polarisation varie avec le temps suivant une loi hyperbolique et on peut écrire

$$e = \frac{At}{1+Bt} = \frac{I_0 t}{c(1+Bt)} = \frac{Q}{c(1+Bt)}.$$

La quantité Q est le débit du courant initial pendant le temps t et le facteur c représente la capacité initiale du voltamètre. On voit ainsi que la capacité apparente $c(1+Bt)$ croît avec le temps; le facteur B est d'ailleurs une fonction linéaire du courant initial I_0.

Si l'on désigne par S_1 et S_2 les surfaces des électrodes, par K_1 et K_2 leurs capacités respectives par unité de surface, la capacité du système, considéré comme un condensateur en cascade, a pour expression

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{K_1 S_1} + \frac{1}{K_2 S_2}.$$

On peut déterminer séparément les valeurs de K_1 et de K_2 en faisant l'une des surfaces très grande par rapport à l'autre. Ces deux quantités sont d'ailleurs égales, comme l'avait observé M. Blondlot, et conservent la même valeur K quel que soit le rapport des surfaces S_1 et S_2.

Si les durées de charge et de décharge sont très petites, le débit est le même de part et d'autre; les capacités c et c' ont donc des valeurs égales. Si le temps de charge a une durée notable, la décharge devient plus lente et la capacité efficace des électrodes augmente avec le temps. Toutefois, pour des électrodes de platine, à moins que le liquide ne renferme des traces d'un sel de platine, la quantité totale Q′ d'électricité restituée reste sensiblement égale à la charge primitive Q: il n'en est plus de même dans le cas où les électrodes sont situées dans un liquide qui peut les altérer.

Pour le *mercure*, la capacité a été déterminée avec un électromètre capillaire, soit par le quartz piezoélectrique, soit par la variation de potentiel produite en reliant l'électromètre à un condensateur; on a ainsi étudié les lois de variation du phénomène (**613**). Dans l'eau acidulée au dixième, la capacité à surface constante serait d'environ 28 microfarads par

centimètre carré et la capacité initiale de 140 microfarads.

La polarisation des électrodes en platine varie beaucoup avec la richesse de la solution et les traces de matières étrangères qui existent dans le liquide ou à la surface du métal ; il est donc difficile d'obtenir des nombres bien définis.

La capacité croît généralement avec la température. Pour des solutions d'*azotate de soude* renfermant de 0,02 à 2 équivalents de sel par litre, la capacité initiale d'électrodes de platine, rappportée au centimètre carré, serait

$$K = 14^{mf},3(1 + 0,01\,t).$$

753. Accumulateurs. — Le courant secondaire produit par la réunion de deux électrodes polarisées est en général assez faible et diminue rapidement, à moins que la polarisation ne soit entretenue par une cause étrangère, comme dans le couple de Grove, où les lames de platine sont placées respectivement dans l'oxygène et dans l'hydrogène.

La capacité de polarisation peut devenir très grande avec certains métaux, quand les réactions chimiques, au lieu d'être limitées à une mince couche superficielle, pénètrent davantage et mettent en jeu des masses importantes.

Planté [1] a étudié la plupart des métaux, à ce point de vue, et construit une pile secondaire capable de produire un grand débit d'électricité. Ces travaux importants ont été l'origine des appareils aujourd'hui très répandus dans l'industrie sous le nom d'*accumulateurs électriques*.

La disposition qui convient le mieux consiste à employer deux lames de plomb parallèles et très rapprochées plongeant dans une dissolution d'acide sulfurique ; la force électromotrice maximum de polarisation est supérieure à 2 volts. Une propriété importante est que la capacité de polarisation augmente de plus en plus à mesure qu'on *forme* les accumulateurs, c'est-à-dire qu'on les charge et qu'on les décharge un plus grand nombre de fois, de manière à faire pénétrer plus profondément l'action oxydante du courant primaire, en raison de la porosité exceptionnelle des dépôts galvaniques.

On peut accélérer beaucoup la formation des couples en

[1] G. PLANTÉ, *C. R. de l'Acad. des Sciences*, t. LXXIV, p. 592 ; 1872 et t. XCV, p. 418 ; 1882. — *Recherches sur l'électricité ;* Paris, 1879.

couvrant les lames de plomb, ou remplissant des cavités ménagées dans le métal, par une couche de minium. Cette idée paraît due à M. Faure; on est arrivé par différentes dispositions à résoudre la difficulté d'établir l'adhérence entre les lames de plomb et le métal qui provient de l'oxyde réduit.

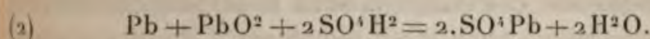
Planté a reconnu aussi qu'une élévation de température active la formation des couples, mais il obtient encore plus rapidement le même résultat en plongeant d'abord les lames de plomb pendant un ou deux jours dans l'acide azotique très étendu. Une perte de poids très faible suffit pour que le métal éprouve une sorte de décapage, qui doit augmenter sans doute sa porosité et facilite la pénétration ultérieure de l'oxydation produite par le courant primaire.

Dans d'autres cas, comme pour les accumulateurs Laurent-Cély, la lame de plomb forme une sorte de grillage dont les cavités sont remplies par des pastilles de chlorure de plomb. En réunissant ces plaques avec une lame de zinc dans une liqueur acide, le chlorure est réduit et laisse un plomb spongieux très propre à une oxydation ultérieure. On a trouvé aussi avantage à remplacer le plomb pur par un alliage renfermant d'autres métaux, tels que l'antimoine.

Quel que soit le mode primitif de construction, lorsqu'un accumulateur formé est polarisé à refus, l'électrode qui devient positive dans la décharge porte une certaine quantité de plomb peroxydé et l'électrode négative une couche équivalente de plomb poreux. Le couple étant fermé, l'électrode positive se réduit, l'autre s'oxyde; la force électromotrice du couple secondaire conserve une valeur constante pendant la plus grande partie de la décharge et diminue ensuite jusqu'à ce que la dépolarisation soit complète.

Il y a intérêt, dans la pratique, à n'utiliser que la première partie de l'opération, celle qui correspond à une force électromotrice constante; on procède alors à une nouvelle charge de l'accumulateur. La force électromotrice nécessaire à la charge est plus faible quand on groupe les accumulateurs en batterie, pour les réunir ensuite en série, mais la manœuvre des connexions est alors compliquée, sans aucun profit sur le travail dépensé; les électromoteurs mécaniques permettent de supprimer ces manipulations.

754. Réactions chimiques. — L'analyse des réactions qui ont lieu dans un accumulateur est assez délicate. Pour la décharge, l'idée la plus simple est d'admettre ce qu'on appelle la double sulfatation, c'est-à-dire que l'électrode positive renferme du bioxyde de plomb PbO^2 et qu'il se forme simplement du sulfate sur les deux électrodes, conformément à l'équation



$$(2) \qquad Pb + PbO^2 + 2SO^4H^2 = 2.SO^4Pb + 2H^2O.$$

La somme des quantités de chaleur dégagées par cette réaction correspond, en effet, à $1^v,93$ et représente sensiblement la force électromotrice de l'accumulateur ([1]). La petite différence peut tenir à ce que le couple se refroidit (**732**).

Le passage d'un coulomb (**653**) enlève $8^{gr}.1,036.10^{-5}$ d'oxygène au péroxyde et fait intervenir sur chaque électrode une masse de plomb égale à

$$103^{gr},5.1,036.10^{-5} = 1^{gr},0712.10^{-3}.$$

Il en résulte que la quantité d'électricité correspondant à 1 kilogramme de plomb total serait

$$\frac{1000}{2,1424.10^{-3}} = 467\,000 \text{ coulombs,} \quad \text{ou} \quad 129,2 \text{ ampères-heure.}$$

Si la force électromotrice est de 2,1 volts, l'énergie disponible par kilogramme de plomb engagé est de

$$467\,000.2,1 = 981\,000 \text{ joules.}$$

Le travail d'un watt-heure exige donc que la réaction ait lieu sur 3,67 kilogrammes de plomb.

Dans une pile qui consomme du zinc, la quantité d'électricité par kilogramme de métal est augmentée dans le rapport de 2.103,5 à 33. Si la force électromotrice est de 1,8 volts, comme celle du couple Bunsen, le rapport de l'énergie disponible à celle des accumulateurs, pour une même quantité de métal dans les deux cas, serait

$$\frac{207}{33} \cdot \frac{1,8}{2,1} = 5,38.$$

([1]) Tschelzow, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. C, p. 1458; 1885.

couvrant les lames de plomb, ou rempliss… …des vases qui
gées dans le métal, par une couche … …forme le pôle po-
paraît due à M. Faure; on est arrivé…
tions à résoudre la difficulté d'étab… …ène chimique soit
lames de plomb et le métal qui prov… …rentes ont été pro-
Planté a reconnu aussi qu'une… …mple, l'action de l'a-
active la formation des couples, … …sel puce de plomb :
rapidement le même résultat en…
de plomb pendant un ou deu… …$SO^4 + 2H^2O$.
très étendu. Une perte de po…
métal éprouve une sorte de… …donne avec le minium
sans doute sa porosité et fa…
l'oxydation produite par l…
Dans d'autres cas, comm… …$2SO^3 + 2H^2O$.
Cély, la lame de plomb…
cavités sont remplies pa… …ion (3), la décomposition
En réunissant ces plaq… …du péroxyde sur la plaque
liqueur acide, le chlor… …e négative :
gieux très propre à… $= 3PbO^2 + 2SO^4H^2$.
aussi avantage à ren… …$H^2 + 3H^2O + 3Pb$.
fermant d'autres m…
Quel que soit … …sur chacune des électrodes
accumulateur for… …s'expriment alors en re-
vient positive d… …de la première équation et 3H²
de plomb perox…
valente de plo… …aurait aussi, à la charge.
positive se re…
couple seco… …$= 3PbO^2 + 2SO^4H^2$,
plus grand… …$SO^4H^2 + H^2O + Pb\frac{3}{2}$.
ce que la
Il y a …
partie d… …ses en sens contraire, représentent
motrice… …décharge.
de l'ac… …principale correspond à une
charg… …effets assez complexes in-
batte…
des… …ments. — Les qualités d'un accumu-
tra… …quand le courant de décharge est
de…

… XLVI, p. 304; 1880.

rop intense, ou qu'on épuise trop loin la charge, ou encore qu'on abandonne les appareils pendant quelque temps sans les mettre en service.

A part cette question de durée, qui est la plus importante, il faut aussi que la capacité soit assez grande. Dans les expériences faites par la Commission (¹) de l'Exposition de 1881, 35 accumulateurs du système Faure disposés en série et pesant chacun $43^k,7$ ont donné 619600 coulombs, comme débit utile d'électricité, avec une force électromotrice de 2,1 volts par couple. Le débit par kilogramme du couple est donc

$$\frac{619600}{43,7} = 14\,179 \text{ coulombs} \quad \text{ou} \quad 3,94 \text{ ampères-heure},$$

et l'énergie disponible $14\,179 . 2,1 = 29776$ joules.

D'après l'équation (2), le poids de plomb engagé dans la réaction serait environ 0,03 du poids total.

Si on admet que le plomb entre pour les deux tiers dans le poids du couple, la capacité serait de 21 269 coulombs par kilogramme de plomb, ou de 5,91 ampères-heure, c'est-à-dire environ 0,045 de la valeur théorique.

Planté a obtenu dans certaines expériences jusqu'à 17,16 ampères-heure par kilogramme de plomb. Pour le même rapport entre le poids du métal et celui de l'appareil, ce dernier nombre correspondrait à 11,44 ampères-heure par kilogramme d'accumulateur. Un poids total de 41,6 kilogrammes serait alors capable de produire un kilowatt-heure. On arrive pratiquement à des résultats encore plus avantageux avec les accumulateurs industriels.

On n'a guère de renseignements sur le travail que les piles peuvent produire utilement. Duboscq, qui en avait une grande expérience, estimait qu'avec 100 couples Bunsen, on obtient un bel arc pendant 15 heures, à la condition d'employer 50 couples pendant le premier tiers du temps, 50 autres pendant le second tiers et les 100 couples par deux séries de 50 en batterie pendant le dernier tiers.

Comme le courant est d'environ 15 ampères, l'énergie totale fournie par la pile est

$$50 . 1^v,8 . 15^a . 15^h = 2,025 \text{ kilowatts-heure}.$$

(¹) ALLARD, JOUBERT, POTIER et TRESCA, *C. R. de l'Acad.*, t. XCIV, p. 603; 1882.

Chacun des couples pèse environ 6 kg., soit un poids total de 600 kilogrammes ; il faut donc 300 kilogrammes de pile par kilowatt-heure. A ce point de vue, les accumulateurs auraient une grande supériorité sur les piles.

Enfin l'accumulateur ne restitue qu'en partie, pendant la décharge en service régulier, l'électricité et l'énergie qu'il a reçues pendant la charge. Les accumulateurs étudiés par la Commission avaient absorbé 694 500 coulombs, pour en restituer seulement 619 600, de sorte que le rendement en électricité était 0,89.

Da'utre part, si E, I, R désignent la force électromotrice, le courant et la résistance d'une batterie pendant la charge Q, et E', I', R' les mêmes quantités relatives à la décharge Q', l'énergie dépensée dans le premier cas est $W = Q(E + IR)$ et l'énergie restituée $W' = Q'(E' - I'R')$. En faisant abstraction des pertes qui correspondent à l'échauffement des résistances très faibles R et R', le rendement en énergie est

$$\frac{W'}{W} = \frac{Q'}{Q} \cdot \frac{E'}{E}.$$

On doit remarquer encore que la différence de potentiel entre les électrodes est plus grande à la charge qu'à la décharge ; si l'on fait $E = 2^v,20$ et $E' = 1^v,85$, le rapport des forces électromotrices est 0,84. Dans le cas précédent, le rendement en énergie serait donc

$$0,89 . 0,84 = 0,75.$$

Dans la pratique industrielle, le rendement en électricité peut atteindre 0,97 et même 0,98. Le taux de ce rendement présente le plus grand intérêt ; toutes les pertes d'électricité correspondent, en effet, à des actions locales et à une destruction continue de l'accumulateur.

Quant au rapport des forces électromotrices, il varie avec les conditions de l'expérience. Si la charge est lente et le courant de décharge assez faible pour que la résistance de l'accumulateur lui-même ne joue pas de rôle important, ce rapport peut être de 0,90. Il en résulterait que la valeur maximum du rendement en énergie ne dépasse pas $0,98 . 0,90 = 0,88$.

MM. Cailletet et Collardeau [1] ont employé, pour former les électrodes polarisées, de la *mousse de platine* enfermée dans des pochettes de soie. Le courant secondaire est alors plus intense qu'avec des lames métalliques et la force électromotrice initiale est égale à $1^v,8$; toutefois la capacité n'est pas très grande et la décharge s'arrête assez rapidement.

Si le voltamètre est soumis à une pression croissante, la chute du courant est moins rapide, et le débit total augmente. A partir de 25 atmosphères, le courant présente même un ressaut après la première chute et se maintient uniforme pendant quelque temps. A la pression de 580 atmosphères, la force électromotrice de régime régulier est d'environ 1^v et la durée du courant uniforme peut atteindre une vingtaine de minutes. Dans ces conditions, la capacité du platine est de 56 ampères-heure par kilogramme et la décharge immédiate donne un rendement électrique de 95 à 98 pour 100. On pourrait ainsi réaliser des accumulateurs à *gaz condensés*, mais la charge se conserve mal à circuit ouvert.

Le *palladium* métallique n'a également qu'une capacité très faible, sans doute parce que l'anode n'absorbe pas d'oxygène. Quand on l'emploie à l'état de mousse, il présente le même caractère que le platine, à part le ressaut du courant; à la pression de 600 atmosphères, la capacité atteint 176 ampères-heure par kilogramme. La mousse d'*iridium* ainsi que l'*or* précipité jouissent de propriétés analogues, à un moindre degré; les phénomènes présentent la même marche.

Les autres métaux sont attaqués; il se produit alors des phénomènes chimiques, comme pour le plomb, et l'accumulation d'électricité n'est pas influencée par la pression.

Les propriétés du platine et du palladium correspondent d'ailleurs, comme l'a montré M. Berthelot, à de véritables combinaisons définies de ces métaux avec l'oxygène et surtout avec l'hydrogène.

[1] CAILLETET et COLLARDEAU, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXIX, p. 830; 1894.

— a vu, dans les chapi
mment les propriétés d
et circulaire, à part la
les seules données géomé
calculs supposent une rég
. En particulier, on
minutieuses pour que tout
le même rayon et garden

est que le noyau sur l
ndrique : on s'en assure
d'un comparateur de const
ordinairement en bois ou e
peuvent être le siège de courants
dans les expériences à courant
induction en interrompant l
par une section faite suiv
laquelle on intercale une la
Les cadres en bois ont l'i
avec le temps; mais si on
comme l'acajou imprégné de
a soin de tourner le cadre

Si le fil, avec son enveloppe isolante, a un diamètre bien istant, un enroulement fait avec soin donne facilement des res équidistantes. Les couches successives sont habituellent séparées par une lame isolante, telle qu'une ou plusieurs illes de papier paraffiné. L'emploi d'un compte-tours pert de connaître le nombre des spires pendant l'enroulement, il est bon de vérifier ce nombre avant que la couche ne soit ouverte. Comme les spires des couches successives ont s inclinaisons de sens contraires, on compense cette irrélarité par un nombre pair de couches.

On détermine la longueur du fil, soit directement, soit par mesure du diamètre de la bobine avant et après l'enroulent de la couche, soit par les deux circonférences corresponntes. Un ruban en métal, enroulé sur la bobine, permet aussi mesurer la circonférence avec une grande approximation; peut admettre, en effet, que la ligne moyenne du ruban conve la même longueur, malgré la courbure, de sorte que la gueur observée correspond au rayon du cylindre, augmenté la demi-épaisseur du ruban.

Toutefois, si la bobine renferme plusieurs couches séparées une matière isolante, les mesures faites avant et après iroulement d'une couche ne donnent pas une valeur exacte diamètre moyen, parce que la pression des fils produit un asement de la matière isolante.

D'un autre côté, on ne peut pas, sans précautions spéciales, luire la longueur du fil d'une mesure faite avant l'enroulent sur une base rectiligne, parce que le fil s'allonge d'une nière variable pendant l'enroulement, surtout à cause de la sion qu'on est obligé de lui faire subir pour obtenir des iches régulières. L'allongement des fils de cuivre un peu s peut aller jusqu'à 5 ou 6 p. 100; il est moindre pour les plus gros. Si on veut mesurer le fil avant l'enroulement, il donc nécessaire de lui donner la tension qu'il aura penit l'opération : le changement de longueur dû au fait même l'enroulement est négligeable si le rayon de courbure est s grand par rapport au diamètre du fil.

Toutes les formules relatives aux bobines supposent que courant est réparti d'une manière uniforme dans chaque tion des conducteurs ou, ce qui revient au même, que le

courant peut être considéré comme concentré sur l'axe même du fil. Cette hypothèse n'est pas toujours suffisante, surtout avec les courants variables (**462**); le calcul ne donnera donc qu'une première approximation et l'erreur n'est pas négligeable avec des fils un peu gros.

Enfin une condition évidente, mais que l'expérience montre souvent en défaut, est que les différentes spires soient parfaitement isolées les unes des autres. Pour vérifier l'isolation d'une bobine, lord Rayleigh (1) l'interpose avec ses deux bouts isolés entre les deux bobines d'une balance d'induction (**687**). Le silence est rompu dès qu'il existe quelque communication entre les spires.

757. Comparaison des champs. — Sans avoir recours aux méthodes générales sur lesquelles on reviendra plus loin, les expériences de comparaison exigent des procédés rapides, sans qu'il soit nécessaire d'employer des courants constants ni de connaître leurs intensités.

Certains phénomènes, comme la rotation du plan de polarisation dans un milieu, ne dépendent que de la différence des potentiels magnétiques aux extrémités du chemin suivi par le rayon. Dans le cas d'une bobine, cette différence se déterminera par les couches magnétiques des deux bases (**565**). Pour éviter les calculs de correction, M. Lippmann (2) propose d'employer trois bobines identiques A, B et C, disposées de la même manière suivant les côtés d'un triangle B'C'A'. Les bobines ayant N spires, l'intégrale des actions magnétiques de l'une d'elles sur un circuit fermé qui la traverse, en particulier sur le contour du triangle A'B'C', est $4\pi NI$; le total est $3.4\pi NI$ et l'intégrale relative à l'un des côtés, c'est-à-dire la différence des potentiels aux extrémités, est $4\pi NI$. Il n'est même pas nécessaire que l'enroulement soit régulier, pourvu qu'il soit le même sur les trois bobines. La propriété s'étend évidemment au cas d'un polygone régulier.

La direction du champ en un point P s'obtiendra en y plaçant une aiguille aimantée de dimensions très petites, soumise en même temps à l'action d'un champ extérieur tel que le champ terrestre, et en faisant tourner la bobine autour de ce

(1) Lord Rayleigh et Mrs Sidgwick, *Phil. Tr. R. S. L.*; 1884, p. 119.
(2) G. Lippmann, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. C, p. 553; 1885.

point P jusqu'à ce que le passage d'un courant dans la bobine ou son inversion ne produise aucun effet. L'axe magnétique de l'aiguille donne alors la direction cherchée.

Les spectres magnétiques fournissent souvent des indications précieuses; les éléments successifs de la limaille de fer dessinent les lignes de force et donnent une idée immédiate de la forme et de l'intensité du champ.

Le rapport des champs G et G′ par unité de courant, pour deux bobines B et B′, s'obtiendra comme dans la comparaison de deux galvanomètres (639). Les bobines sont placées de manière que les directions de G et G′, aux points correspondants P et P′, soient sensiblement perpendiculaires aux champs extérieurs, ou du moins que leurs projections X et X′ sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation des aiguilles soient perpendiculaires aux projections H et H′ des champs extérieurs, et on place en ces points des aiguilles de dimensions très petites.

Les déviations δ et δ', corrigées de la graduation, produites par un même courant qui traverse successivement les deux bobines, donnent

$$\frac{X}{X'} = \frac{H}{H'}\frac{\delta}{\delta'}.$$

Les valeurs de H et de H′ sont égales si la même aiguille est employée dans les deux cas.

Supposons, d'une manière plus générale, que l'on fasse agir en même temps sur une aiguille les deux bobines, parcourues respectivement par les courants I et I′. Si les déviations réduites sont δ et δ_1, suivant que les actions des courants sont de même sens ou de sens contraires, on en déduit

$$H\delta = XI + X'I', \qquad H\delta_1 = XI - X'I';$$

$$\frac{X'}{X} = \frac{I}{I'}\cdot\frac{\delta - \delta_1}{\delta + \delta_1}.$$

Il est clair que l'on peut utiliser le même courant $I = I'$ dans les deux circuits.

Si les bobines sont montées en dérivation, les courants I

courant peut être consid... et g des bran-
du fil. Cette hypothèse n...
avec les courants variabl...
qu'une première appr...
geable avec des fils n...

Enfin une condition ...
souvent en défaut, es... de manière que la
tement isolées les ... champs X et X sont pro-
d'une bobine, lord Ra...
isolés entre les deux ... une boussole des tan-
Le silence est romp... permette de calculer X.
entre les spires.

757. Comparaison ... ment petite par rapport à
méthodes généra... courant, les valeurs des
expériences de ... est déterminé par l'ex-
sans qu'il soit ... celles qui correspondent
ni de connaître ... leur faire subir une cor-

Certains phé...
sation dans un ... de n spires par unité de
potentiels ma... point P peut s'écrire
rayon. Dans ...
nera par les ...
éviter les ...
d'employer ... nul pour une bobine indé-
la même ... convenablement dirigées per-
bobines av... expérience (707).
l'une d'ell... produite par un courant I
sur le co... on amène ensuite la bobine
et l'intég... position et la déviation
des pote... est δ_1. La même opération est
cessaire ... deux côtés, jusqu'à ce que
même ... obtiendra ainsi une série de
au cas ... La somme des déviations est la

La d... longueur indéfinie, et le champ
çant ... $\delta - \delta_1 - \delta_2 + \ldots + \delta'_1 + \delta'_2 + \ldots$ Il
mise ... terme de correction relatif à la
le cha... expression

(1) ...
(2) ... $\dfrac{-\delta - \delta_2 + \ldots}{\delta}$.

'58. **Rapport des surfaces.** — La surface électrodynamique S :ne bobine de N spires, ou son moment magnétique pour uité de courant, a pour valeur, dans le cas d'une bobine ;orge rectangulaire de rayon moyen a (**558**),

$$S = N\pi a_1^2 = N\pi a^2\left(1 + \frac{c^2}{3a^2} - \frac{1}{12 n_2^2 a^2}\right) = N\pi a^2(1+\varepsilon).$$

D'autre part, la composante X du champ en un point P de ıxe, à une grande distance x par rapport au rayon moyen, :ut se mettre sous la forme (**571**, 2°)

$$X = \frac{2N\pi a^2}{x^3}(1+\xi) = \frac{2S}{x^3}\cdot\frac{1+\xi}{1+\varepsilon},$$

quantité ξ étant un terme de correction qui dépend de la stance x et des dimensions de la gorge.

Pour un cercle unique, de rayon a', parallèle au plan moyen : la bobine et dont le centre est au point P, on a

$$X' = \frac{2\pi}{a'}.$$

La comparaison des champs X et X' ([1]) donnera la sur- :e S par la relation

$$S = \frac{X}{X'}\cdot\frac{\pi x^3}{a'}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1+\xi}.$$

Cette méthode présente l'inconvénient d'exiger une mesure s exacte de la distance x, qui entre au cube dans le facteur ncipal. On pourrait éviter la difficulté par deux observa- ıs faites à des distances différentes x et x', anquel cas le ›lacement $x'-x$ de la bobine peut être déterminé avec une nde exactitude, mais les erreurs expérimentales prennent rs beaucoup plus d'importance.

Si on porte l'aiguille de l'autre côté du cadre, à peu près a même distance du milieu, la moyenne des résultats ob-

) F. Kohlrausch, *Nachr. von der K. G. der W. zu Göt.*, n° 20, p. 654; 1882.

tenus de part et d'autre correspond sensiblement à la demi-distance des deux positions de l'aiguille, mais l'expérience est alors très compliquée, parce qu'on doit aussi déplacer la lunette et l'échelle qui servent aux lectures.

Il vaut mieux éliminer toutes ces mesures de distance. Si les deux bobines dont on veut comparer les surfaces S et S' peuvent être disposées concentriquement, les axes en coïncidence, le rapport des champs X et X' déterminés par la même aiguille donne alors

$$\frac{X}{X'} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{1+\xi}{1+\xi'} \cdot \frac{1+\varepsilon'}{1+\varepsilon}.$$

La distance de l'aiguille au centre des bobines n'intervient alors que dans les termes de correction et peut être facilement déterminée avec une approximation suffisante. La méthode est particulièrement précise lorsque les surfaces à comparer sont voisines l'une de l'autre.

Pour éliminer le défaut de centrage des bobines, il suffit de les monter ensemble sur un châssis qui puisse tourner autour d'un axe vertical et de répéter plusieurs séries d'expériences en tournant le système de 180°.

Dans ce cas, il n'est même plus nécessaire que les bobines aient des rayons différents, de manière à être introduites l'une dans l'autre ; si la distance de l'aiguille est assez grande, on peut les placer de part et d'autre de l'axe : la moyenne des résultats obtenus pour les deux positions donne très sensiblement le rapport exact des surfaces.

Le rapport des surfaces de deux bobines s'obtiendra aussi par le rapport des décharges induites sous l'action d'un même champ extérieur.

Pour utiliser le champ terrestre, on monte les deux bobines sur un même axe, leurs surfaces étant parallèles, et on fait tourner brusquement le système d'un angle déterminé entre deux butoirs, par exemple de 180° autour d'un axe vertical à partir d'une position perpendiculaire au méridien, ou autour d'un axe horizontal à partir du plan horizontal.

Les variations φ et φ' des flux de force qui traversent les deux circuits sont, dans tous les cas, proportionnelles à leurs surfaces S et S'.

Au lieu de faire tourner le système des bobines, on peut le laisser immobile et changer la direction du champ. Il suffit, pour cela, que le champ soit produit par un courant extérieur dont on renverse le sens. Le rapport des flux de force est alors égal au rapport des surfaces multiplié par le rapport des champs moyens. Si les bobines ont des diamètres différents, les corrections relatives au calcul des champs moyens sont assez complexes, même dans le cas où les bobines induites seraient situées dans le plan du courant inducteur. Il vaut mieux alors employer comme circuit inducteur un système à plusieurs cadres de grandes dimensions (**576** à **578**), de manière à constituer un champ sensiblement uniforme.

Quel que soit le mode d'opérer, le problème se trouve ainsi ramené à la comparaison de deux flux de force φ et φ'.

Une première méthode consiste à réunir les deux bobines de manière que les surfaces s'ajoutent, puis agissent en sens contraires, en déterminant les impulsions réduites correspondantes α et α' d'un galvanomètre balistique. La résistance du circuit étant invariable, on a alors

$$\frac{\varphi+\varphi'}{\alpha}=\frac{\varphi-\varphi'}{\alpha'}=\frac{2\varphi}{\alpha+\alpha'}=\frac{2\varphi'}{\alpha-\alpha'};$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{\varphi}{\varphi'}=\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha-\alpha'}.$$

L'exactitude des mesures ne serait pas très grande, en général, surtout avec les cadres mobiles, à moins que la seconde impulsion α' ne soit très petite par rapport à la première ; ce serait le cas de surfaces presque égales.

On réalise cette condition par l'emploi de bobines auxiliaires à surfaces graduées. Les bobines B et B′ étant placées dans le même circuit, de façon que leurs flux de force soient de sens contraires, on ajoute à la bobine B, par exemple, des surfaces s_1 et s_2, telles que les impulsions correspondantes α_1 et α_2 du galvanomètre balistique aient les moindres valeurs en sens opposés ; il en résulte

$$\frac{S'-S-s_1}{S+s_2-S'}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \qquad S'=S+\frac{s_1\alpha_2+s_2\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}.$$

tenus de part et d'autre corresp...
distance des deux positions de l'...
est alors très compliquée, parce...
lunette et l'échelle qui servent ...

Il vaut mieux éliminer toutes...
les deux bobines dont on veut ...
peuvent être disposées concen...
cidence, le rapport des cham...
même aiguille donne alors

$$\frac{X}{X'} \quad \frac{S}{S}$$

La distance de l'aiguille...
alors que dans les ter...
ment déterminée avec...
thode est particulièrem...
comparer sont voisines...

Pour éliminer le d...
les monter ensemble ...
d'un axe vertical et ...
en tournant le systè...

Dans ce cas, il ...
aient des rayons ...
dans l'autre; si l...
peut les placer ...
résultats obtenus...
ment le rapport ...

Le rapport d...
par le rapport d...
champ extérieur...

Pour utilise...
sur un même...
tourner brus...
deux butoirs...
partir d'une...
tour d'un a...

Les vari...
deux circu...
surfaces ...

...e beaucoup plus
...es impulsions, en
... courants induits, et
...s trop faibles pour

...nerait, par la mesure
.... Les bobines B et B'
...s, on règle les résis-
...respondants de manière
...sition des effets dus aux
...vanomètre est réglé, ces

$$= \frac{R}{R}.$$

... nomètre est très faible, on
... en permutant la liaison
... ayant lieu pour des ré-
...ement

$$- \frac{R_1}{R_1}\Big).$$

...entiel n'est tout à fait satis-
...que identiques par leurs for-
... est plus de même si les
... nomètres diffèrent beaucoup.
... n'ayant pas la même durée.
... distinctes de natures diffé-
... contraires, et il est impos-
...: si elle reste finalement au
... pendant l'opération.

... mutuelle. — Considérons deux
... d'induction mutuelle est M.
... trajet d'un courant inducteur I.
... résistance r qui renferme le gal-
... établissement ou suppres-
... décharge induite q est

$$MI.$$

ıesures de I et q donneront la valeur de M en fonc-
la résistance r.

braham ([1]) équilibre au galvanomètre différentiel une
.on du courant primaire et le courant moyen obtenu
série de décharges induites.

leux pôles de la pile sont reliés, d'une part à la bobine
ice A et, d'autre part, à l'un des cadres B' du galvano-
Si R et R' sont les résistances totales des deux circuits,
ɜurs correspondantes I et I' des courants permanents
ıt à la relation

$$E = IR = I'R'.$$

ıobine induite a est reliée au second cadre B par un
de résistance r.

ɔommutateur tournant exécute une série d'opérations
ordre suivant : fermeture de l'induit, puis de l'induc-
ıverture de l'induit, puis de l'inducteur. De cette ma-
e cadre B ne reçoit que le courant induit de fermeture;
ɔn de mettre ce cadre en court circuit pendant le cou-
luit direct, pour éliminer l'influence des effets thermo-
ues presque inévitables.

ontacts se reproduisant n fois par seconde, le courant
d'induction est

$$i = nq = n\,\frac{MI}{r} = n\,\frac{M}{r}\cdot\frac{R'}{R}\,I'.$$

ɿue l'équilibre est établi, avec un galvanomètre réglé,
rants i et I' sont égaux; il en résulte

$$M = \frac{1}{n}\,\frac{Rr}{R'}.$$

eut craindre qu'à la fermeture du circuit, l'induction
ifie le courant I', mais il est facile d'éviter cette cause
: en donnant à la résistance R' une valeur considérable
port à celle de la pile; la dérivation de l'extra-courant
ˈs négligeable.

(1) ABRAHAM, *Journ. de Phys.* [3], t. III, p. 145; 1894.

Le commutateur était commandé par une machine Gramme et la période comparée par un procédé stroboscopique à celle d'un diapason. La méthode paraît fournir des résultats concordants à moins de $\frac{1}{2000}$ et l'expérience montre que les coefficients d'induction mutuelle ne changent pas, pour des bobines de mêmes dimensions, quand on remplace le fil de cuivre par un fil de fer.

760. Mesure par les capacités. — On a vu déjà (**744**) que les décharges induites simples ou répétées permettent d'évaluer un coefficient d'induction mutuelle par une combinaison de résistances et de capacités.

Supposons qu'on installe en dérivation, sur la résistance R d'un circuit parcouru par le courant I_1, un condensateur de capacité C dans le trajet duquel se trouve un galvanomètre balistique. La charge ou la décharge du condensateur est $q_1 = CRI_1$. En comparant cette quantité par le même galvanomètre avec celle que donne l'induction du courant I entre les bobines A et a_1 il en résulte

$$\frac{q_1}{q} = \frac{CRrI_1}{MI}, \qquad M = \frac{q}{q_1} \cdot \frac{I_1}{I} \cdot CRr.$$

Si la résistance R est réglée de manière que les impulsions soient égales dans les deux cas, avec le même courant primaire, il reste simplement $M = CRr$.

Les deux opérations pourraient être faites simultanément par un galvanomètre différentiel, où les décharges q_1 et q seraient équilibrées, mais les courants temporaires n'ont pas exactement la même forme et il serait difficile d'obtenir le repos absolu de l'aiguille.

M. Foster (¹) établit une compensation entre les décharges. Soient P et P′ les extrémités de la résistance R. Le point P est relié à l'une des armatures B du condensateur, l'autre armature B′ communiquant au point P′ par le galvanomètre; le fil secondaire de résistance r, qui comprend la bobine a, est en dérivation sur les points B′ et P′.

Quand le régime permanent est établi, la charge du con-

(¹) C. G. Foster, *Phil. Mag.* [5], t. XXIII, p. 121; 1887.

densateur est $q = \mathrm{CRI}$. Si le courant moyen du galvanomètre est nul pendant la période variable, le condensateur ne reçoit finalement que la décharge induite, pour laquelle l'induction propre du circuit n'intervient pas ; il en résulte

$$rq = M\mathrm{I}, \qquad M = \mathrm{CR}\,r.$$

Lorsque l'appareil n'est pas réglé, une partie q' de la charge du condensateur passe par le galvanomètre et une autre q par le fil secondaire :

$$q' + q = \mathrm{CRI}.$$

En appelant E la force électromotrice de la pile, $\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}$ la résistance du circuit primaire et g celle de la branche galvanométrique, l'induction totale dans le circuit formé par le galvanomètre et le fil secondaire donne

$$rq - gq' = M\mathrm{I} = M\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}},$$

$$(r+g)q' = (\mathrm{CR}\,r - M)\mathrm{I} = (\mathrm{CR}\,r - M)\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}}.$$

La méthode est d'autant plus sensible que, pour une valeur donnée de l'erreur de réglage $\mathrm{CR}\,r - M$, la décharge q' est plus grande, c'est-à-dire que la quantité $(r+g)(\mathrm{R}_0 + \mathrm{R})$ doit être minimum. Comme le produit $\mathrm{R}r$ est constant et que les résistances R_0 et g sont pratiquement déterminées par construction, il en résulte

$$\mathrm{R}\,dr + r\,d\mathrm{R} = 0, \qquad (\mathrm{R}_0 + \mathrm{R})\,dr + (r+g)\,d\mathrm{R} = 0;$$

$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}}{g + r} = \frac{\mathrm{R}_0}{g}.$$

L'erreur relative des mesures du coefficient M peut alors être inférieure à un millième.

On doit remarquer toutefois que, pour un appareil réglé, le courant i' du galvanomètre n'est pas nul à chaque instant, de sorte que l'aiguille ne reste pas absolument immobile.

Soient, pendant la période variable, I le courant inducteur,

I' et i ceux qui traversent la résistance R et le fil secondaire. Si l'équilibre a lieu à chaque instant, on a $i = I - I'$ et l'équation différentielle relative au circuit formé par le galvanomètre et le fil secondaire se réduit à

$$ri = M\frac{dI}{dt} - L\frac{di}{dt} = (M - L)\frac{dI}{dt} + L\frac{dI'}{dt}.$$

La charge du condensateur est égale, d'une part, à CRI', puisque les points B′ et P′ restent au même potentiel, et d'autre part à l'intégrale de idt; il en résulte

$$CRrI' = r\int i\,dt = (M - L)I + LI',$$

ou, en remplaçant CRr par sa valeur M,

$$(M - L)I' = (M - L)I.$$

Cette condition n'est satisfaite pour le régime variable que si $M = L$. Dans ce cas particulier, le courant i' serait toujours nul pour l'établissement ou la rupture du courant primaire; on peut alors faire les opérations par une lame vibrante et remplacer le galvanomètre par un téléphone.

761. Coefficients de self-induction. — Quand on représente par LI le flux d'induction du courant I dans son circuit, on suppose implicitement que le coefficient L est une constante; mais l'expérience donne en réalité le produit LI et la valeur de L peut être, comme dans le cas des électro-aimants, une fonction du courant I correspondant.

L'expérience de Faraday (386) relative aux extra-courants permet déjà d'obtenir des résultats très approchés. Le courant d'une pile est partagé par dérivation entre deux conducteurs, l'un de résistance r' sans induction propre, l'autre de résistance r et de coefficient L, qui renferme le galvanomètre. A la rupture du circuit principal, la décharge induite est

$$q(r + r') = Li.$$

Si le rapport des résistances r et r' est assez grand pour

...étant pas mesurés par le ...saire de comparer les deux ... encore être déterminée par ... la rotation d'un cadre

... du courant β_0 par celle du ... la relation

$$I_0 \frac{a'}{a+a'} ;.$$

...ompre le courant principal, il est ... par un commutateur à bascule. La ... : en outre, la pile restant fermée, ... très court de l'inversion, on est mieux ...ctromotrice E ne change pas. Les plus ... la méthode tiennent, en effet, aux varia... ...cipal.

...de l'expérience permet de faire toutes les ...vanomètre du pont (1). Si l'on ajoute à la ... tite quantité ε, le courant permanent dans ... devient (673)

$$i = E\frac{a'(b+\varepsilon)-ab'}{\Delta} = E\frac{a'\varepsilon}{\Delta}.$$

...pport des résistances n'est pas sensiblement ...ut remplacer Δ par sa valeur approchée $\frac{MN}{a}$ qui ... l'équilibre du pont et écrire cette équation sous ... simple

$$i = E\frac{aa'}{MN}\varepsilon = \frac{a}{M}\beta_0\varepsilon.$$

... impulsion produite par la décharge q et δ la dévia... ...u courant i, on a donc

$$L = \varepsilon\frac{q}{i} = \frac{\tau}{\pi}\frac{\alpha}{\delta}\varepsilon.$$

(1) RAYLEIGH, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1882, p. 677.

Puisque aucune partie du courant ne traverse la diagonale du galvanomètre, on a aussi

$$\alpha' = \beta' \qquad \text{et} \qquad C\frac{dV}{dt} = \alpha - \beta.$$

L'élimination des quantités α, β, β' et V entre ces équations donne, en tenant compte de l'équilibre des résistances,

$$\left(Cb' - \frac{L}{a}\right)\frac{d\alpha'}{dt} = \alpha'\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right) = 0,$$

$$L = Cb'a.$$

Le réglage ne peut se faire que par tâtonnements; il exige

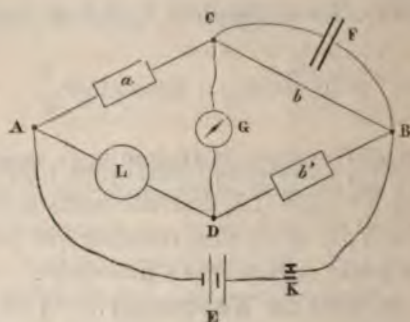


Fig. 230.

que l'on modifie trois résistances, dont deux a et b' seront à déterminer par des boîtes étalonnées.

Une autre méthode consiste à mesurer la décharge q induite dans le galvanomètre (674) par l'établissement du courant principal. Si la branche b est la seule qui renferme un coefficient L d'induction propre, on a

$$Mq = a\int \frac{d(L\beta)}{dt}\,dt = aL\beta_0,$$

$$M = b(a+a') + r(a+b) = a(b+b') + r(a+b),$$

$$L = \frac{Mq}{a\beta_0} = \frac{q}{\beta_0}\left[b + b' + r\left(\frac{b}{a}\right) + 1\right].$$

La décharge q et le courant β_0 n'étant pas mesurés par le même galvanomètre, il sera nécessaire de comparer les deux instruments ; la valeur de q peut encore être déterminée par comparaison avec celle que produit la rotation d'un cadre dans le champ terrestre.

On remplacerait aussi la mesure du courant β_0 par celle du courant principal I_0, en utilisant la relation

$$\beta_0 = E\,\frac{a'}{N} = I_0\,\frac{a'}{a+a'}.$$

Au lieu d'établir ou de rompre le courant principal, il est préférable de le renverser par un commutateur à bascule. La décharge est alors doublée ; en outre, la pile restant fermée, sauf pendant le temps très court de l'inversion, on est mieux assuré que la force électromotrice E ne change pas. Les plus grandes difficultés de la méthode tiennent, en effet, aux variations du courant principal.

Une modification de l'expérience permet de faire toutes les mesures par le galvanomètre du pont [1]. Si l'on ajoute à la résistance b une petite quantité ε, le courant permanent dans le galvanomètre devient (**673**)

$$i = E\,\frac{a'(b+\varepsilon) - ab'}{\Delta} = E\,\frac{a'\varepsilon}{\Delta}.$$

Comme le rapport des résistances n'est pas sensiblement modifié, on peut remplacer Δ par sa valeur approchée $\frac{MN}{a}$ qui correspond à l'équilibre du pont et écrire cette équation sous la forme plus simple

$$i = E\,\frac{aa'}{MN}\,\varepsilon = \frac{a}{M}\,\beta_0\varepsilon.$$

Si α est l'impulsion produite par la décharge q et δ la déviation due au courant i, on a donc

$$L = \varepsilon\,\frac{q}{i} = \frac{\tau}{\pi}\,\frac{\alpha}{\delta}\,\varepsilon.$$

[1] LORD RAYLEIGH, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1882, p. 677.

Dans ce cas, M. Abraham équilibre encore le courant moyen d'une série de décharges par le galvanomètre différentiel.

L'un des cadres est situé sur la diagonale r du pont; l'autre cadre est relié à la pile par une résistance R' et reçoit un courant I'. Le commutateur tournant fonctionne de la même manière que précédemment (759) sur le circuit principal et sur la diagonale r; on règle alors la résistance R' de manière que l'aiguille du galvanomètre reste immobile. Le commutateur est ensuite arrêté et on détermine la résistance x qu'il faut ajouter à la branche b pour reproduire à l'état permanent le même courant d'équilibre $i = I'$.

On a d'abord

$$i = nq = nL\frac{a}{M}\beta_0 = nLE\frac{a\alpha}{MN}.$$

D'autre part, le courant permanent produit par la variation de résistance x est $i' = E\frac{a'x}{\Delta}$, le dénominateur Δ étant une fonction de $b + x$; il en résulte

$$nL = \frac{MN}{a\Delta}x.$$

Lorsque le pont est symétrique, $a = a'$ et $b = b'$, les différents facteurs deviennent

$$M = 2ab + r(a+b), \qquad N = a(2R + a + b),$$

$$\Delta = \Delta_0 + x[2ab + r(a+b) + Rr + a(2R + a)];$$

$$\frac{a\Delta}{MN} = 1 + x\frac{2ab + r(a+b) + Rr + a(2R+a)}{[2ab + r(a+b)](2R + a + b)}.$$

Le dernier terme est très petit si les résistances R et a sont très grandes, de l'ordre de 1000 ohms par exemple, la résistance b de 50 à 200 ohms, et la valeur de x voisine d'un ohm. On a donc, d'une manière approchée, $nL = x$.

Il est nécessaire que les conditions d'équilibre soient réglées avec une grande précision et on doit se mettre en garde contre les effets thermoélectriques, ce qui oblige à opérer très

›idement. Avec un pont à corde sensible au dix-millième ›hm, on arrive à une approximation de même ordre que ur les coefficients d'induction mutuelle.

763. Comparaison des coefficients M. — Considérons deux ›upes de bobines A et a, A′ et a', dont les coefficients d'in-ction mutuelle sont M et M', ces groupes étant assez éloignés n de l'autre pour que leur influence mutuelle soit négligeable. s bobines A et A′ sont placées en dérivation sur deux points ınis aux pôles de la pile; les résistances des circuits res-ctifs étant R et R′, les courants permanents I et I′ satisfont a relation $IR = I'R'$. Les bobines a et a' sont situées sur le ıjet d'un circuit qui renferme un galvanomètre et les jonc-ıns établies de manière que les deux courants induits soient signes contraires.

Si les résistances sont réglées de manière que le galvano-ètre reste au zéro, quand on ouvre ou ferme la pile, il en sulte $MI = M'I'$ et, par suite,

$$\frac{M}{M'} = \frac{R}{R'}.$$

L'aiguille n'est encore absolument immobile que si les deux charges q et q', relatives aux bobines a et a', sont simulta-es et de même forme.

Un commutateur tournant permettrait aussi de répéter les charges induites d'ouverture ou de fermeture; dans ce cas, courant moyen ne serait nul que si la somme algébrique s décharges était rigoureusement nulle.

On peut enfin réunir séparément les bobines a et a', par des sistances totales r et r', aux deux cadres d'un galvanomètre fférentiel. Les décharges q et q' sont alors

$$qr = MI, \qquad q'r' = M'I'.$$

Si l'équilibre est établi, soit pour les ruptures et fermetures ı courant principal, soit pour les courants moyens produits ır un commutateur tournant, il en résulte $q = q'$ et

$$\frac{M}{M'} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{I'}{I} = \frac{Rr}{R'r'}.$$

Une autre disposition consiste à mettre les deux bobines A et A′ sur le trajet du courant principal ; les circuits a et a' sont réunis par un galvanomètre et les communications établies de manière que les décharges q et q' soient successivement de même sens ou de sens contraire. La résistance totale $r+r'$ du circuit secondaire étant invariable, les impulsions α et α' relatives aux deux modes de jonction donnent

$$\frac{M+M'}{\alpha}=\frac{M-M'}{\alpha'}, \qquad \frac{M}{M'}=\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha-\alpha'}.$$

En joignant les bobines a et a' aux deux cadres d'un galvanomètre différentiel et réglant les résistances r et r' de manière à annuler l'impulsion d'une décharge unique, ou l'action résultante due aux courants moyens réglés par un commutateur tournant, on aura aussi

$$\frac{M}{M'}=\frac{qr}{q'r'}=\frac{r}{r'}.$$

Il est toujours préférable d'avoir recours à des expériences de compensation. Dans la méthode indiquée par Maxwell [1], le circuit inducteur comprend les bobines A et A′ (fig. 231) :

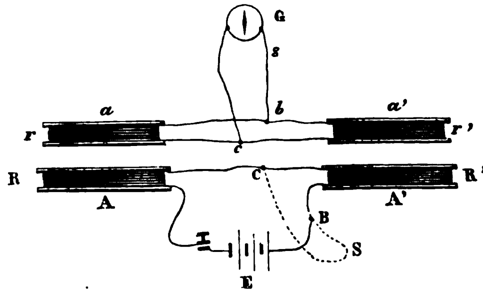


Fig. 231.

les bobines a et a' sont réunies de manière que les courants induits de part et d'autre s'ajoutent, et on intercale le galvanomètre entre deux points b et c du circuit induit, par une

[1] MAXWELL, *Electr. and Magn.*, t. II, p. 355.

dérivation de résistance s. Les décharges induites q et q' dans les deux bobines, par l'établissement ou la suppression du courant I, se partagent en dérivation comme les courants continus (385). La quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre est alors $q' - q$ et l'on a

$$M'\mathrm{I} = r'q' + s(q' - q), \qquad M\mathrm{I} = rq - s(q' - q).$$

Si on ajuste les résistances r et r' des bobines a et a', comptées jusqu'à la dérivation, de manière que l'aiguille reste immobile au moment de la fermeture ou de l'ouverture du circuit inducteur, il en résulte $q' = q$ et, par suite,

$$\frac{M}{M'} = \frac{r}{r'}.$$

M. Brillouin (¹) réunit les bobines a et a', de manière que les courants induits soient opposés, et place une dérivation de résistance s entre deux points b et c du circuit secondaire; le galvanomètre, de résistance g, est intercalé sur le circuit d'une des bobines induites, par exemple a'. Dans ce cas, les décharges sont déterminées par les équations

$$M\mathrm{I} = qr + (q + q')s, \qquad M'\mathrm{I} = q'(r' + g) + (q + q')s.$$

La résistance étant réglée de façon que la décharge q' dans le galvanomètre soit nulle, il reste

$$\frac{M}{M'} = \frac{r + s}{s}$$

Comme le cofficient M doit être plus grand que M', il faut que le galvanomètre soit dans le circuit de la bobine pour laquelle l'induction est plus faible.

Les bobines a et a' étant toujours réunies de manière que leurs courants soient opposés et le galvanomètre intercalé dans le circuit secondaire, on peut enfin placer une dérivation S entre deux points B et C du circuit inducteur (fig. 231), par

(¹) M. Brillouin, *Ann. de l'École. Norm. Sup.* [2], t. XI, p. 352; 1882.

exemple du côté de la bobine A'. On a alors, en appelant I et I' les courants dans les bobines A et A',

$$(r+r'+g)q=M'I'-MI.$$

On règle la résistance S de manière que la décharge q dans le galvanomètre soit nulle. En tenant compte de la relation $S(I-I')=R'I'$ des courants permanents, on en déduit

$$\frac{M}{M'}=\frac{I'}{I}=\frac{S}{R'+S}.$$

Dans ce cas, il faut que la dérivation soit placée du côté de la bobine dont l'induction est la plus grande.

Ces différentes méthodes ramènent la comparaison des coefficients d'induction à celle des résistances. On remédie aux défauts de sensibilité soit en multipliant les décharges réglées en concordance avec les oscillations de l'aiguille, soit par un commutateur tournant.

Quand on introduit dans le calcul les résistances du circuit inducteur, il est plus difficile de les connaître exactement, à cause de l'échauffement produit par le courant.

On peut encore remarquer, à propos de la dernière méthode, que, pendant tout le temps de l'établissement ou de la cessation du courant inducteur, le courant induit conserve le même sens ; les éléments de la décharge q sont tous de même signe. Si la décharge est nulle, il faut que chacun de ces éléments soit nul; les courants induits sont donc, à chaque instant, égaux et de signes contraires et on pourrait avec avantage se servir du téléphone pour constater l'équilibre.

764. Comparaison des coefficients L. — L'emploi du pont de Wheatstone permet encore d'opérer par compensation [1].

Lorsque les quatre branches n'ont pas d'induction mutuelle, l'équilibre relatif aux courants variables exige que l'on ait, outre la condition des courants permanents (674),

$$\frac{L_a}{a}-\frac{L_b}{b}=\frac{L_{a'}}{a'}-\frac{L_{b'}}{b'}.$$

[1] MAXWELL, *Electr. and Mag.*, t. II, p. 317 et 356.

Pour utiliser cette propriété, on place les deux bobines à ›mparer dans les branches a et a', par exemple, les autres ·anches étant supposées sans induction propre. L'équilibre ›mplet donne alors

$$\frac{L_a}{L_{a'}} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Deux boîtes de résistance sans induction sont nécessaires; une est placée sur les branches a ou a', l'autre sur b ou b'. 'expérience est longue, parce qu'on doit réaliser d'abord équilibre des courants permanents et chercher ensuite l'effet es interruptions du courant principal; comme les deux es-èces de conditions sont indépendantes, le résultat final ne eut être atteint qu'après une série de tâtonnements.

M. Abraham a montré aussi que le téléphone donne d'excel-ɔnts résultats dans le cas actuel, surtout si les coefficients nt des valeurs très faibles.

La condition qui définit le minimum de bruit par rapport à a branche b' se réduit alors à

$$a(ba' - ab') = \omega^2 L_a (b' L_a - b L_{a'}).$$

La résistance b' étant ainsi réglée, on détermine la valeur $+x$ qui correspond à l'équilibre des courants continus. En ppelant $b'+y$ celle qui annulerait le second membre de équation précédente, il en résulte

$$ba' - ab' = ba' - a(b' + x) + ax = ax,$$
$$b' L_a - b L_{a'} = (b' + y) L_a - b L_{a'} - y L_a = - y L_a,$$
$$a^2 x = - \omega^2 L_a^2 y.$$

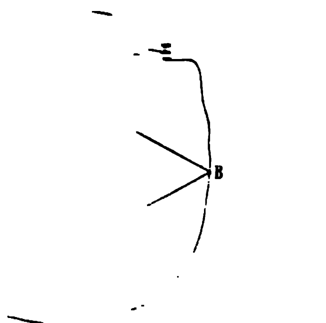
Le terme de correction y est d'autant plus petit que la fré-uence des courants alternatifs utilisés est plus grande. Con-aissant cette fréquence ou la hauteur du son et une valeur pprochée de L_a, on en déduit y avec une exactitude suffisante our déterminer le rapport des coefficients de self-induction ar l'équation

$$\frac{L'_a}{L_a} = \frac{b' + y}{b} = \frac{b'}{b} - \frac{a^2}{\omega^2 L_a^2} \cdot \frac{x}{b}.$$

exemple du côté de la bobine A'. On a a... interc...
les courants dans les bobines A et A'. ... bobin...
... bobine ...
$$(r+r'+g)q = M ...$$
... ient d ...
... x force ...

On règle la résistance S de man... ... gales e...
le galvanomètre soit nulle. En l... état p...
S(I — I') = R'I' des courants per...

$$\frac{M}{M'} ... \frac{I}{I} ...$$



Dans ce cas, il faut que...
de la bobine dont l'induct...
Ces différentes méthode...
ficients d'induction à c...
défauts de sensibilité so...
en concordance avec l...
commutateur tournant...
Quand on introduit...
inducteur, il est plus...
cause de l'échauffem...
On peut encore r... puisque les bra...
que, pendant tout l... ... guées.
tion du courant ind... ... potentiel est ...
sens; les éléments ... A et C.
Si la décharge est...
soit nul; les co...
égaux et de sig...
servir du télép... ... x conditions

764. **Comparais...**
de Wheatston...
Lorsque l...
l'équilibre r...
outre la con...

([1]) Maxw... ... c'est-à-dire qu...

...ul de sens contraires dans les deux bobines. En doit avoir $L > -M$.

...nches du pont étant dénuées d'induction propre et abord pour le régime permanent, on peut ajuster les ...ction de plusieurs manières :

...ut varier le coefficient M en changeant la position ...es deux bobines, jusqu'à ce que l'équilibre ait lieu ...ourants variables.

valeur de M étant supposée constante, on modifie dans ... rapport les deux résistances a' et b', jusqu'à ce que ...re soit obtenu.

. introduit entre les points A et B auxquels aboutit la ... dérivation de résistance c sans induction propre. ... ce cas, l'intensité γ du courant qui traverse la déri... satisfait aux équations

$$I = x + x' + \gamma,$$

$$c\gamma = x'(a' + b') = x(a + b).$$

condition d'équilibre relative à l'état variable reste la ... et donne

$$a'(L + M) + a\left(1 + \frac{a' + b'}{c}\right)M = 0,$$

$$\frac{L}{M} = -\left(1 + \frac{a}{a'} + \frac{a + b}{c}\right).$$

... discussion des équations montre que l'erreur relative le rapport des coefficients L et M est environ 100 fois rieure à celle que l'on commet dans le réglage des résis... es; pour obtenir toute la précision dont la méthode est eptible, le galvanomètre devrait être beaucoup plus sen... pour les courants instantanés que pour les courants per... ents. On a tout avantage à produire un régime régulier au ...en d'un commutateur tournant.

6. **Appareil à induction variable.** — Il est utile dans cer...s circonstances d'avoir des appareils dont le coefficient ...uction puisse être gradué comme les boîtes de résistances ... capacités. Avec les courants alternatifs (**393**), la réactance

..e induction mutuelle est ωL.
-..icient de self-induction pro-
ir l'induction mutuelle. M. Bril-
-ositions suivantes :
..rend deux bobines de même axe.
. - .utre extérieure, sur laquelle est
ingt fils isolés, légèrement tordus
....e intérieure et l'un quelconque des
.duction mutuelle M a la même valeur.
. .teur. on établit les communications
...rant induit dans la bobine extérieure
- . .ans un sens et p fils en sens inverse.
. .on mutuelle entre les deux bobines est
l et la résistance du circuit secondaire

. - .st formé d'une bobine cylindrique à
- .aquelle est placée une bobine à fil fin
...ar d'un de ses diamètres. Si le champ
.. .était uniforme, le coefficient d'induc-
. .erait rigoureusement proportionnel au cosi-
- ..ux axes. Le terme de correction est facile
.. . ailleurs que la longueur de la grande
- .ille de la petite pour que l'erreur du cal-
. .. négligeable.
. . ..n serait encore réalisée d'une manière
.. .açant le centre de la bobine induite dans
. .ne bobine à gorge quelconque et de rayon
. ..nd. Enfin on obtiendrait un champ intérieur
. . .iforme avec une combinaison convenable de
. . . cadres (577 et 578).
.. ..gt . a fait usage également de deux bobines
. . .dont on graduait empiriquement l'induction
. .s expériences de comparaison.

: . . 3', t. XXII, p. 169; 1886.

CHAPITRE SEPTIÈME

RAPPORT DES UNITÉS

767. Nature du problème. — Nous pouvons maintenant passer en revue les méthodes employées pour déterminer le rapport **v** des unités d'électricité en mesures électromagnétiques et en mesures électrostatiques (**419**). Ce rapport est de même nature qu'une vitesse; sa valeur absolue est indépendante du choix des unités fondamentales de longueur, de masse et de temps. La détermination expérimentale de cette constante se ramène donc à la mesure d'une longueur et d'un temps; en particulier, on pourra l'exprimer par la résistance électromagnétique d'un circuit conducteur, laquelle a aussi les mêmes dimensions.

Il est évident d'ailleurs, par la suite d'égalités

$$\mathbf{v} = \frac{q}{Q} = \frac{i}{I} = \frac{E}{e} = \sqrt{\frac{c}{C}} = \sqrt{\frac{R}{r}},$$

qu'il existe en principe autant de méthodes, pour déterminer la constante **v**, que de quantités susceptibles d'être mesurées à la fois dans les deux systèmes d'unités.

On peut réduire ces méthodes à trois principales, correspondant aux seules quantités dont la mesure directe en unités électrostatiques soit réellement abordable, c'est-à-dire une charge électrique, une différence de potentiel ou une capacité. Toutefois, il faut ajouter qu'une pareille division est encore un peu arbitraire, car les expériences ne sont pas aussi nettement distinctes et elles aboutissent souvent aux mêmes déterminations finales.

768. Mesure des quantités d'électricité. — Les premières recherches sont dues à Weber et Kohlrausch [1]; nous les décrirons avec détail à cause de leur importance historique.

Après avoir chargé une bouteille de Leyde dont l'armature extérieure est au sol, on touche le bouton avec une sphère conductrice isolée de rayon R, qu'on enlève ensuite pour servir aux mesures électrostatiques, et on décharge par un galvanomètre balistique l'électricité qui reste sur la bouteille.

Il faut d'abord déterminer, par une expérience préalable, le partage des charges au moment du contact, ou le rapport de la capacité C de la bouteille à la capacité C′ de la sphère dans les conditions où elle est placée. Si V_0 est le potentiel primitif de la bouteille seule et V_1 le potentiel commun du système au moment du contact, la capacité propre de la bouteille n'étant pas modifiée d'une manière sensible par le voisinage de la sphère, on a ainsi, pour la même charge totale,

$$CV_0 = (C + C')V_1, \qquad \frac{C'}{C} = \frac{V_0}{V_1} - 1.$$

Les potentiels de la bouteille avant et après le contact peuvent être déterminés par un électromètre, en tenant compte au besoin de la capacité de l'instrument. On doit remarquer toutefois que le second potentiel est inférieur à V_1, si on le mesure après avoir enlevé la sphère qui a une certaine charge; c'est là une cause d'erreur dont il serait nécessaire de tenir compte et que l'on peut d'abord négliger.

Comme la chute de potentiel $V_0 - V_1$ est très faible, on rend les mesures plus faciles en multipliant les contacts. La sphère étant ramenée à l'état neutre, on répète l'opération un certain nombre de fois. Si V_1, V_2, …, V_n sont les potentiels de la bouteille après 1, 2, …, n contacts avec la sphère, il en résulte

$$\frac{C + C'}{C} = \frac{V_0}{V_1} = \frac{V_1}{V_2} \cdots\cdots = \frac{V_{n-1}}{V_n} = \left(\frac{V_0}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\frac{C'}{C} = \left(\frac{V_0}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

[1] WEBER et KOHLRAUSCH, *Électrodyn. Maasbestim.*, — *Abh. der K. S. Gesel. der Wiss.*, t. V, p. 219; 1856.

Avec un électromètre à sinus, les mesures du potentiel après quatre contacts ont donné

$$\frac{C'}{C}=0{,}03276.$$

Ce nombre doit être considéré comme trop élevé, par suite de la remarque précédente, et aussi parce que la capacité de l'électromètre intervient dans les observations.

Pour l'expérience primitive, la charge q' prise par la sphère et la charge correspondante q_0 qui reste sur la bouteille sont respectivement proportionnelles aux capacités C' et C.

On touche ensuite cette sphère par une balle conductrice isolée de rayon r, qui sera utilisée comme boule fixe dans la balance de Coulomb ; le nouveau partage se fait sensiblement de la même manière que si le système était soustrait à toute influence extérieure.

Le rapport p de ces deux charges est une fonction du rapport des rayons correspondants ; on en trouvera la valeur dans les Tables que Plana a calculées en partant des formules de Poisson (¹). Les rayons étaient $R=7^c{,}973$, $r=0^c{,}5768$, et l'on déduit des Tables $p=0{,}007937$. En appelant q_1 la quantité d'électricité que prend la petite balle, on a donc

$$\frac{q_1}{q'-q_1}=p, \qquad \frac{q_1}{q'}=\frac{p}{1+p}=0{,}007875;$$

$$\frac{q_1}{q_0}=\frac{q_1}{q'}\cdot\frac{q'}{q_0}=\frac{q_1}{q'}\cdot\frac{C'}{C}=0{,}258.10^{-3}=\frac{1}{3876}.$$

La boule mobile de la balance ayant à peu près le même rayon $0^c{,}5798$ que la première, chacune d'elles conserve après le contact la moitié de la charge, c'est-à-dire

$$q=\frac{q_1}{2}=\frac{q_0}{7752}.$$

Ces boules étaient creuses, tournées avec soin, dorées et polies. On cherchait la torsion nécessaire pour les maintenir

(¹) Voir MASCART, *Traité d'Électricité statique* ; t. I, p. 281.

à la distance angulaire de 90° ... ait cherché à dé-
donné au fil une torsion un ... par l'air relatives
à laquelle l'écart passait ... menées. Pour une
sauf à faire ensuite les corr... mobile au bout d'un
La distance de la boule ... sur la perte
la boule mobile 6c,17; la di- ... trouvé pour la
90° est alors 11c,205. Cette
pour réduire l'action f de
formules très approchées
correction devrait être
pas grande importance ... le coefficient m ne
D'après ces données ... aille.
centres est égale à ... de charge dues
trique a pour expressi... pendant un premier
... deux mesures élec-

fh ... 5,1 ... contacts avec la

... intervalle de 5'
Le couple de tors... électrométrique et
oscillations, était d... omètre. Cette der-
En appelant T l...
faite de la déperdi... raient pas leurs
... La différence
q^2 ... p. 100.
24,1 ... méthode a été d'abord
... deux points A
... teur traversé par
Pendant qu'u... potentiel électro-
opérations, un ... dans le même
et détermine l... être déterminée
tité d'électrici... plateaux sont en
Les dimen...

a ... l'intensité du
... dynamomètre à sus-
Le nombr... déviation θ.
constante g...
L'aiguill...
correction

En même temps, on relie alternativement au plateau de l'électromètre chacun des points A et B, l'autre point communiquant avec la cage de l'appareil. Si F est la force nécessaire pour amener le disque mobile à la position de repère, D et D' les deux lectures relatives à la distance des plateaux, *a* la surface de la plaque mobile corrigée, on a

$$e = V - V' = (D - D')\sqrt{\frac{8\pi F}{a}},$$

$$v = \frac{E}{e} = \frac{R}{D - D'}\sqrt{\frac{C\theta}{GS'} \cdot \frac{a}{8\pi F}}.$$

La bobine fixe de l'électrodynamomètre est formée par deux cadres distincts. Le courant est amené par le fil de suspension de la bobine mobile et sort ensuite par un fil très léger contourné en spirale, suspendu à la bobine et plongeant dans un godet plein de mercure.

Des aimants convenablement disposés annulaient presque entièrement l'action du champ terrestre. Comme la compensation ainsi obtenue n'est jamais complète, on faisait passer le courant alternativement en sens contraires et on prenait comme déviation finale la moyenne des deux lectures, lesquelles différaient très peu l'une de l'autre.

La bobine mobile avait 3000 tours d'un fil très fin; à cause de ses petites dimensions, on en déterminait la surface S' par comparaison avec une surface étalonnée. La résistance de l'électrodynamomètre était d'environ 15 600 ohms.

Pour avoir des différences de potentiel plus grandes à mesurer par l'électromètre, on introduisait une résistance supplémentaire de 10 000 ohms entre les points A et B, et on faisait varier en conséquence le nombre des couples de la pile. On ne fermait d'ailleurs le circuit que pendant le temps des observations, afin d'éviter l'échauffement des fils.

Les premières expériences ont été faites par M. King [1] en 1869 sous la direction de Lord Kelvin; elles ont été reprises de 1870 à 1872 par M. Dugald M'Kichan [2].

[1] King, *Report of the committee on electr. stand.*; 1869. *Reprint*, p. 186.
[2] Dugald M'Kichan, *Phil. Tr. L. R. S.*; 1879, p. 409, 427.

avec a 0,2 … b 0,1834, …
dépendant que des dimension…
On pouvait ainsi tenir comp…
à la déperdition et au rési…
intervalle de 30, qui s'écou…
trométriques et qui était en…
grosse sphère, ensuite p…
entre l'instant de la derni…
la décharge de la boutei…
nière correction était d'a…
D'ailleurs, Kohlrausch…
expériences comme exa…
entre les valeurs extrê…

769. Forces électron…
employée par Lord …
et B, séparés par la r…
un courant perman…
magnétique E est é…
système, et sa val…
par un électromè…
relation avec les …
Pour éviter la…
courant était dé…
pension unifilair…

La même méthode a été appliquée par M. Shida [1] avec quelques modifications.

On ne cherchait pas à ramener la charge de l'électromètre à une valeur fixe par l'emploi du *replenisher* et de la *jauge*; mais, mettant alternativement le plateau et la cage en communication avec les points A et B séparés par la résistance R, on obtenait, en opérant à une suite d'intervalles de temps égaux, des lectures successives D_1, D'_1; D_2, D'_2; D_3, D'_3.... On prenait alors, pour la moyenne des différences, les valeurs suivantes qui doivent être sensiblement égales entre elles, aux erreurs de lecture près :

$$\frac{D_1+D_2}{2}-D'_1, \qquad \frac{D'_1+D'_2}{2}-D_2\ldots$$

L'intensité du courant était déterminée par une boussole des tangentes disposée comme celle de Joule (**618**). Si on observait la déviation Δ de la boussole au moment de la mesure électrostatique, on aurait

$$E=IR=\frac{H}{G}R\tan\Delta.$$

Au lieu d'opérer de cette manière, M. Shida détermine ensuite la déviation δ que l'on obtient en fermant la pile, dont la résistance est ρ et la force électromotrice E_0, par une résistance auxiliaire r. L'intensité i du courant donne

$$E_0=i(\rho+r)=\frac{H}{G}(\rho+r)\tan\delta.$$

Si la pile reste invariable, le produit $(\rho+r)\tan\delta$ conserve une valeur constante C quand on fait varier la résistance extérieure et on peut choisir des conditions telles que la déviation soit voisine de 45°, ce qui correspond au maximum de sensibilité. On a alors

$$E=\frac{H}{G}\frac{R}{\rho+R}(\rho+R)\tan\Delta=\frac{H}{G}\frac{R}{\rho+R}C.$$

[1] SHIDA, *Phil. mag.*, [5] t. X, p. 401; 1880.

le courant aux bobines ; celui-ci s'échappe ensuite par un fil plongeant dans un godet à mercure. La durée d'une oscillation simple du système était de 7 secondes ; ces oscillations s'éteignent très rapidement à cause des variations de pression qu'elles déterminent dans la boîte S. Il n'y a pas d'ailleurs à tenir compte de la torsion du fil, la position d'équilibre correspondant à une torsion nulle.

La différence de potentiel établie entre les deux plateaux C et C' est celle de deux points A et A' d'un circuit traversé par le courant d'une pile P de 2600 couples au bichlorure de mercure. La résistance R qui sépare les deux points A et A' est formée par une bobine étalonnée valant un million d'ohms environ, et le courant est déterminé par un galvanomètre G.

Une seconde pile P' fournit le courant des bobines B, B' et B_1. Ce courant traverse dans le galvanomètre G un second cadre formé d'un petit nombre de spires et superposé au premier, de manière à constituer un galvanomètre différentiel. Une partie du courant est dérivée dans un shunt dont on modifie la résistance de manière que l'aiguille reste au zéro.

On établit les deux courants pendant un temps très court, au moment où l'oscillation du fléau l'amène dans la position d'équilibre ; alors on fait varier la distance des deux plateaux, de manière que le plateau mobile ne soit ni attiré ni repoussé et, d'autre part, on modifie le shunt jusqu'à ce que l'aiguille du galvanomètre reste au zéro.

Deux circonstances contribuent à la difficulté des observations : d'abord l'instabilité de l'équilibre du fléau, puis la variation rapide de la force électromotrice de la pile P, à partir du moment où le circuit est fermé.

L'attraction des deux disques, pour la distance D et une différence de potentiel électrostatique égale à e, est $\frac{a}{8\pi}\frac{e^2}{D^2}$; la répulsion des deux bobines, en appelant M leur coefficient d'induction mutuelle à la distance x et I' l'intensité du courant qui les traverse (592), a pour expression $-I'^2\frac{\partial M}{\partial x}=I'^2X$. Comme ces deux forces sont égales, il en résulte

$$\frac{a}{8\pi}\frac{e^2}{D^2}=-I'^2X.$$

.crométrique V. Le plateau C, en communicatior ,t placé à l'extrémité d'un fléau mobile autour ı passe exactement dans l'ouverture d'une bot nent en communication avec le sol, laquelle renl teau C′ et sert d'anneau de garde pour le plateaı

Au moment de l'observation, le plateau C doil tenu dans le plan de l'anneau de garde, la distan systèmes étant modifiée par le jeu de la vis micrc Cette position est déterminée au moyen de deux p argentés placés l'un sur la partie postérieure du l'autre sur l'anneau lui-même; le disque et l'anneı le même plan lorsque les portions de l'image droite données par les deux miroirs paraissent dans le prolongement l'une de l'autre; cette positi

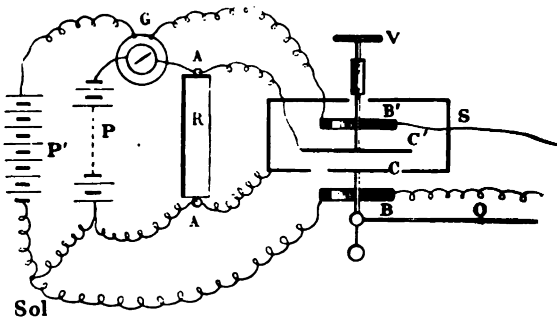


Fig. 233.

rée sur une plaque divisée portée par le s qu'on observe avec un microscope. Quant deux plateaux C et C′, elle se déduit de me son faites sur le micromètre et sur l'échel qu'on déplace simultanément les deux dis les avoir mis en contact.

Pour compenser l'action de la terre su elle est traversée par le courant, le fléau mité une bobine identique B_1 dans laque dans le même sens. Le système const bines est parfaitement astatique.

Le fléau est suspendu à un fil de cı

le facteur c désignant la capacité électrostatique de l'électromètre par unité de longueur. L'équilibre du système a lieu pour la condition

$$4\pi n \mathrm{SI}^2 = cl\frac{e^2}{2}.$$

Les deux instruments étant placés en dérivation sur une résistance R, la force électromotrice commune E a pour expression RI ou $e\mathbf{v}$, ce qui donne

$$\mathbf{v}^2 = \frac{cl\mathrm{R}^2}{8\pi n \mathrm{S}}.$$

En appelant a et a' le rayon des surfaces cylindriques de l'électromètre (57), on a finalement

$$\frac{1}{c} = 2\mathfrak{L}.\frac{a'}{a}, \qquad \mathbf{v}^2 = \frac{\mathrm{R}^2}{16}.\frac{l}{\pi n \mathrm{S}\mathfrak{L}.\frac{a'}{a}}.$$

770. Capacités. — La disposition la plus simple et la plus sûre pour déterminer une capacité en unités électrostatiques consiste à employer deux plateaux parallèles dont l'un est entouré d'un anneau de garde.

La mesure électromagnétique, par les méthodes indiquées au chap. V, se ramène à celles d'une résistance et d'un temps. Supposons qu'un condensateur de capacité C soit porté à la différence de potentiel E = IR, qui existe entre deux points d'un circuit; si l'on désigne par α l'impulsion que produit la décharge Q = CE et par Δ la déviation réduite correspondant au courant I dans le même galvanomètre, on a

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{IR}} = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\tau}{\pi}\frac{\alpha}{\Delta}.$$

La capacité du même condensateur en unités électrostatiques étant c, il en résulte

$$\mathbf{v}^2 = \frac{c}{\mathrm{C}} = \frac{c\mathrm{R}}{\tau}\frac{\pi\Delta}{\alpha}.$$

L'intensité I du courant fourni par la pile P do
rence de potentiel électromagnétique $E = IR$ d
teaux. L'aiguille du galvanomètre est mainten
plaçant sur le fil de résistance g un shunt s;
appelant G et G' les constantes des deux cad

$$\frac{s}{s+g} IG = I'G', \qquad E = IR = RI'\frac{G'}{G}$$

Il en résulte, pour le rapport des unités.

$$v = \frac{E}{e} = \frac{R}{D}\frac{G'}{G}\frac{s+g}{s}\sqrt{\ }$$

Le rapport des constantes G et G' … de
nière ordinaire en faisant passer un … alors
deux cadres, avec un shunt conven…
de manière à ramener l'aiguille au z… est la

Quant au facteur X, qui représen [redacted] d'expé-
courants égaux à l'unité, on le c [redacted] Ayrton
elliptiques (593) appliquées aux c [redacted] ([1]),
ensuite la méthode de Lord Ra [redacted] Elle
bobines, ou par tout autre procé [redacted] proportion-

M. Hurmuzescu ([1]) oppose é [redacted] relative
statiques et électrodynamiques [redacted] importance
cylindrique perpendiculaire au [redacted]
unité de longueur, on suspen [redacted] de forme
en équilibre dans une direct [redacted] de surface,
quand son axe est parallèle [redacted] des pla-
constitue un électrodynam [redacted]
rant I, le champ intérieur … ée par
le cadre $4\pi nI.SI = 4\pi nS$ … dont la

Un électromètre est fo … A cet
et la partie mobile est li
de longueur l. Lorsqu
des inducteurs, l'actio … et

tentiel e est égale à

([1]) HURMUZESCU, *Société* … 1896.
… 895.

…hette iso-
…e à relier
… M. On fait
… plateau N
… l'anneau de
… sépare P de F
… et la boîte S se
… le sol. On fait
… ; la charge du
…e.

…entiel E des deux
…alvanomètre une très
… sont reliées l'une en A,

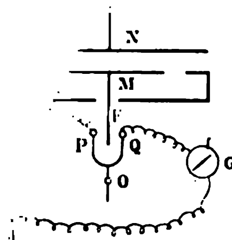


Fig. 234.

…du conducteur AB, tel que la résis-
…tion m de la résistance AB, de sorte
…potentiel entre les points A et D est égale
…galvanomètre étant shunté, le courant i,
…ation δ, est une fraction $\frac{s}{s+g}$ de celui que
… électromotrice mE dans une résistance
$\frac{\ldots s) + gs}{\ldots + g}$; c'est donc le courant qui correspond
…tromotrice E dans la résistance $\frac{r(g+s)+gs}{ms}$.

$$C = \frac{Q}{E} = m \frac{s}{r(s+g)+sg} \frac{\tau}{\pi} \frac{\alpha}{\delta}.$$

On fit usage d'un galvanomètre astatique de lord Kelvin dont les aiguilles avaient été remplacées, pour augmenter la durée de l'oscillation et diminuer l'amortissement, par deux systèmes de 20 barreaux chacun montés dans une espèce de chape en plomb, de manière à figurer une petite sphère. La période des oscillations simples atteignait $39^s,5$ et le décrément logarithmique était réduit à 0,1565.

Le condensateur de Stoletow, pour des expériences qui n'ont pas été terminées, était construit de la même manière, mais avec une précision mécanique qui permet de mesurer exactement la distance des surfaces, quand on les rapproche jusqu'à 1 ou 2 millimètres. A l'aide d'un commutateur tournant, on charge cette capacité par la pile de force électromotrice E et on la décharge n fois par seconde ; le courant moyen est $i = nQ = nCE$. La pile est ensuite fermée par une résistance r et un galvanomètre de résistance g avec un shunt s. Du nouveau courant observé i' on déduit alors

$$i' = I\frac{s}{g+s} = E\frac{s}{r(g+s)+gs},$$

$$nC = \frac{s}{r(g+s)+gs}\cdot\frac{i}{i'}.$$

M. J.-J. Thomson se sert de condensateurs cylindriques avec anneaux de garde et équilibre au pont de Wheatstone le courant moyen produit par une série de décharges obtenues à l'aide d'une lame vibrante (**743**).

M. Rowland emploie un condensateur sphérique et mesure l'impulsion d'une seule décharge. M. Rosa a fait usage du même condensateur en équilibrant un régime de décharges par le pont de Wheatstone.

M. Klemencic a recours au galvanomètre différentiel. L'un des cadres communique avec la pile par une résistance R. Le condensateur est chargé par la pile et se décharge n fois par seconde dans le second cadre. On règle la résistance R de manière que l'aiguille reste au zéro, ce qui a lieu pour la condition $nCR = 1$. Le condensateur est constitué par deux plateaux circulaires dont la distance est variable ; pour tenir compte des variations de densité sur les bords, on a calculé

la capacité par la formule suivante de Kirchhoff [1], dans laquelle a représente le rayon des plateaux, b leur épaisseur et e la distance qui les sépare.

$$c = \frac{a^2}{4e} + \frac{a}{4\pi}\left[\mathfrak{L}.\ \frac{16\pi a(e+b)}{e^2} + \frac{b}{e}\mathfrak{L}.\ \frac{e+b}{b} + 1\right].$$

M. Himstedt s'est servi également d'un condensateur à plateaux circulaires. En plaçant ce condensateur en dérivation sur une résistance R du courant principal, on le décharge n fois par seconde, au moyen d'un diapason, dans un des cadres du galvanomètre différentiel; l'autre cadre, de résistance g, est mis en dérivation sur une résistance r du circuit principal. La condition d'équilibre est alors

$$n\mathrm{CR} = \frac{r}{g+r}.$$

Dans une autre série, M. Himstedt installe le condensateur en dérivation sur l'une des branches du pont de Wheatstone et équilibre le courant moyen produit par une succession régulière de décharges; la capacité des fils de communication intervient alors pour une part dont il a été tenu compte.

M. Abraham équilibre aussi, au galvanomètre différentiel, un courant continu par le courant moyen des décharges. Le galvanomètre comprend deux cadres distincts avec des aiguilles différentes montées sur le même équipage; le condensateur est formé de lames de verre argentées dont on mesure la distance par les images réfléchies d'une échelle et le courant constant est dérivé sur une dérivation du circuit principal utilisé pour la charge du condensateur.

On peut encore évaluer la capacité électromagnétique d'un condensateur par la période des décharges oscillantes (748) et en déduire le rapport des unités. C'est une expérience importante sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Enfin une dernière méthode consisterait à déterminer la capacité électromagnétique C par l'intervalle de temps t nécessaire pour que la différence de potentiel des deux armatures, reliées par une résistance R, passe d'une valeur V_0 à la

(1) KIRCHHOFF, *Mon. Ber. der Ak. zu Berlin*, 1877. — *Gesamm. Abh.*, p. 101.

valeur V. En mesurant le rapport de ces deux potentiels par un électromètre, on aurait alors

$$\frac{t}{CR} = \mathfrak{L}.\frac{V}{V_0}, \qquad \mathbf{v}^2 = \frac{c}{C} = \frac{cR}{t}\mathfrak{L}.\frac{V_0}{V}.$$

771. Résumé des expériences. — A part la méthode de Weber et Kohlrausch où le rapport **v** est emprunté seulement aux nombres fournis par l'expérience même, les autres méthodes font intervenir la valeur numérique d'une résistance. Si les résistances ont été mesurées en fonction d'une unité arbitraire dont la valeur en fonction de l'ohm international (421) est égale à U, et qu'on veuille ramener les résultats à l'ohm international, on doit multiplier le nombre obtenu pour le rapport **v** des unités par U ou $\sqrt{U}$, suivant que l'on a comparé des forces électromotrices ou des capacités.

Plusieurs des expériences, par exemple, ont été rapportées à l'Unité de l'Association Britannique, qui vaut 0,98617 ohm international (709) ; on corrigera les résultats en les multipliant par ce nombre ou par sa racine carrée 0,99306.

Cette grandeur **v** a une telle importance scientifique qu'il paraîtra sans doute utile d'indiquer toutes les valeurs obtenues, en les ramenant à l'ohm international.

Nous rappellerons d'abord que, depuis les expériences célèbres par lesquelles Fizeau a montré, en 1849, et Foucault, en 1850, que la vitesse de propagation de la lumière peut être mesurée directement par la méthode de la roue dentée ou par celle du miroir tournant, les principales déterminations de cette vitesse ont donné

Date.	Observateur.		Vitesse.
1862.	Foucault (Miroir tournant). .		$2,980.10^{10}$
1874.	Cornu (Roue dentée).		2,985
1879.	»	id.	3,004
1879.	Michelson (Miroir tournant).		2,991
1882.	»	id.	2,9985
1882.	Newcomb	id.	2,9986
1882.	»	id.	2,9981

re part, le rapport v des unités d'électricité, dans les s électromagnétique et électrostatique, serait

Observateur.	Valeur de V. obtenue.	corrigée.
Weber et Kohlrausch.	$3,107.10^{10}$	$3,107.10^{10}$
Maxwell.	2,880	2,840
Lord Kelvin et King. .	2,846	2,807
Dugald M'Kichan. . . .	2,935	2,894
Ayrton et Perry.	2,980	2,959
Shida.	2,995	2,954
J. J. Thomson.	2,963	2,963
Exner.	3,01	3,01
Klemencic.	3,019	3,019
Himstedt	3,007	3,007
Lord Kelvin.	3,004	3,004
Rowland	2,982	2,982
J. J. Thomson et Searle.	2,996	2,996
Rosa	3,000	3,000
Pellat.	3,009	3,009
Abraham.	2,992	2,991
Hurmuzescu.	3,001	3,001

difficile de se prononcer sur l'exactitude relative des es expériences. En tout cas, la concordance est si entre la vitesse de la lumière et le rapport des unités cité, que ces deux grandeurs doivent être considérées .dentiques, au degré d'approximation que comportent iodes d'observation.

CHAPITRE HUITIÈME [1]

DÉCHARGES ÉLECTRIQUES

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

772. Isolement par les gaz. — Abstraction faite de la déperdition qui tient au défaut d'isolement des supports, les expériences bien connues de Coulomb paraissaient avoir établi que l'électricité d'un corps se dissipe assez rapidement par l'air, surtout quand il est humide. La question est de savoir si les gaz ont une conductibilité sensible ou si les pertes ont lieu par *convection*, les molécules mêmes du gaz ou les poussières qu'il renferme ou encore les particules métalliques arrachées aux conducteurs emportant peu à peu l'électricité qu'elles prennent au contact.

Il semble maintenant établi que dans un gaz aux températures ordinaires, quel que soit son état hygrométrique, la déperdition d'électricité est absolument négligeable en l'absence de poussières qui agissent par convection; la vapeur qui se dégage d'un vase électrisé contenant de l'eau en ébullition n'emporterait même aucune trace d'électricité.

Le pouvoir isolant des gaz ne se maintient plus pour les températures élevées. Au rouge blanc, par exemple, deux conducteurs en présence ne peuvent conserver l'électricité sous

(1) Nous renverrons, pour plus de détails sur différents points de ce chapitre, à l'ouvrage remarquable de M. J.-J. Thomson (*Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism*; Oxford, 1893).

CHAPITRE HUITI

DÉCHARGES ÉLEC

PROPRIÉTÉS GÉN

772. Isolement par les gaz. — A
dition qui tient au défaut d'isole
riences bien connues de Couloml
l'électricité d'un corps se dissip
surtout quand il est humide. L
gaz ont une conductibilité sen
par *convection*, les molécules n
qu'il renferme ou encore les p
aux conducteurs emportant
prennent au contact.

Il semble maintenant étab
tures ordinaires, quel que so
perdition d'électricité est ab
de poussières qui agissent
dégage d'un vase électris
n'emporterait même aucun

Le pouvoir isolant des
températures élevées. Au
ducteurs en présence ne

(1) Nous renverrons, pour pl
l'ouvrage remarquable de M. J
tricity and Magnetism; Oxfor

a un caractère oscillatoire (399). L'examen de la lumière au spectroscope montre qu'elle renferme en grande majorité des vapeurs métalliques arrachées aux deux électrodes.

Quand on diminue beaucoup la capacité du système, par exemple en enlevant dans une machine de Holtz les bouteilles de condensation, et que l'une des électrodes se termine en pointe, la décharge dans l'air prend la forme d'*aigrettes* violacées beaucoup plus pâles, présentant au pôle positif des houppes ramifiées et au pôle négatif une nappe lumineuse avec des points brillants; le spectre des aigrettes dépend de la nature du gaz traversé par la décharge.

Les apparences sont d'ailleurs très variables avec les conditions de l'expérience. Ces aigrettes sont accompagnées d'un bruissement de tonalité déterminée, qui indique une succession de décharges, et peuvent se transformer en étincelles quand on augmente le débit de la machine.

Les étincelles et les aigrettes correspondent sensiblement au même potentiel explosif. Il existe toutefois une distinction marquée entre les deux phénomènes. L'étincelle entre deux conducteurs les amène brusquement au même potentiel, tandis que, si le débit de la source est continu, l'aigrette maintient entre eux une différence de potentiel constante.

On peut en profiter pour constituer une sorte de *trop-plein électrique* en joignant les pôles de la machine aux branches d'un excitateur dont l'une est terminée en pointe et l'autre par une boule ou un plateau. Quel que soit le débit de la machine, la différence de potentiel reste invariable tant qu'il ne se produit pas d'étincelles; l'expérience réussit beaucoup mieux si la pointe est négative.

Les décharges des bobines d'induction ont un aspect un peu différent parce que la force électromotrice induite dans le fil secondaire varie rapidement à chaque rupture ou fermeture du courant primaire. Si les électrodes sont très éloignées, le courant secondaire direct de rupture est seul capable de traverser le diélectrique et donne des étincelles correspondant au maximum de force électromotrice; pour une distance plus faible, il se produit un mélange d'étincelles et d'aigrettes, en même temps que l'énergie électrique augmente; enfin, quand on rapproche davantage les électrodes ou qu'on diminue la

a un c...
spectr...
vapeur

Qua...
exempl...
de co...
pointe...
lacées
houp...
avec
la na...

Le...
ditio...
brui...
sion
qua...

L...
au
ma...
co...
di...
ti...

... — La dis...
... par F...
... servant par...
... elle était ...
... communications et ...
... batterie se fit ...
... épreuves ainsi ...

... résistance, comme
... elle s'effectue
... par le circuit
... potentiel explosif
... et s'espa...

... par substitu-
... liquides, la de-
... au lieu d'être

ormée par des traits successifs, présente deux bandes lumineuses d'intensité décroissante, qui correspondent aux deux lectrodes, et la durée totale diminue avec la résistance jusqu'à une valeur minimum.

3° Pour des résistances moindres, la décharge devient *oscillante*; l'image photographique présente, suivant les circonstances, soit une série de taches plus intenses qui alternent l'une électrode à l'autre, soit des nappes lumineuses alternes, lont la courbure montre que la lumière met un temps appréiable pour se propager entre les deux électrodes.

4° Les étincelles successives sont alors équidistantes. Pour n circuit dont la forme générale est invariable, le carré de résistance limite R correspondant au début des décharges scillantes est en raison inverse de la capacité C de la batterie. n désignant par *L* le coefficient de self-induction du circuit, condition théorique est, en effet, $R^2C = 4L$.

$$\omega^2 = \frac{1}{CL}, \qquad T = 2\pi\sqrt{CL}.$$

Les épreuves photographiques obtenues par Feddersen ne nt pas assez délimitées pour qu'il soit possible de déterminer période et de suivre plus loin la vérification de la théorie.

Le fait même de l'existence des oscillations peut être mis évidence par un appareil très simple, facile à réaliser dans cours. On relie les électrodes du fil secondaire d'une bone à un excitateur dont les branches terminées en pointe nt séparées par une distance de quelques millimètres. Une uille de papier, montée sur un cadre en bois, peut se mouvoir rticalement entre les pointes. Ce cadre est porté par deux oes de caoutchouc auxquels on donne une grande tension attachant le cadre à un appareil à déclic.

Le cadre marche avec une grande vitesse quand on l'abannne à lui-même et, par une disposition facile à imaginer, il ise en même temps le circuit du courant primaire. Les étinlles secondaires perforent le papier au passage et y laissent grand nombre de trous à peu près équidistants. Il serait ossible d'utiliser cette disposition pour des mesures exactes faisant inscrire simultanément sur le papier les vibrations un diapason chronométrique.

ifférence de niveau maximum. On peut enregistrer
nène en plaçant le fil dans un tube de verre relié à
ambours de M. Marey, qui trace les variations de
sur un cylindre tournant couvert de noir de fumée.

Une autre méthode plus simple consiste à employ
d'épaisseur uniforme dont on modifie la longueur ju
que la décharge le porte exactement à la tempér
fusion. L'expérience ne réussit bien qu'avec les fil
Lorsque la charge est trop faible, le fil rougit ; quan
trop grande, le fil est en partie volatilisé avec proje
matière ; pour une charge convenable, le fil se cour
lentement et se partage en gouttelettes. Il est d'ailleu
saire de remplacer un fil qui a été d'abord porté au r
une décharge insuffisante, sans doute parce que sa
est oxydée et ses propriétés modifiées.

En évaluant la charge d'une batterie de jarres é
le nombre des étincelles d'une bouteille de Lane (61
ainsi facile de vérifier que la longueur du fil fondu
portionnelle au carré de la charge ou, pour une char
tante, proportionnelle à la capacité de la batterie.
sans aucune autre mesure, considérer cette démo
comme suffisante au point de vue expérimental.

776. Étude des décharges oscillantes. — La dis
des étincelles (399) a été constatée d'abord par Fe
l'aide du miroir tournant, soit en les observant pa
soit avec un miroir concave dont l'image réelle
sur une plaque photographique; des communicat
établies de manière que la décharge d'une batteri
une position déterminée du miroir. Les épreuve
nues présentent trois caractères différents.

1° Si le circuit renferme une très grande résis
une colonne d'eau, la décharge est *intermittent*
par fractions, à mesure que le débit d'électric
est suffisant pour porter les électrodes au p
les premières étincelles sont d'abord équidi
cent de plus en plus, sans loi bien détermi

2° Quand on diminue la résistance du c
tion d'acide sulfurique à l'eau des colon
charge ne tarde pas à paraître *continue* : l'

777. Détermination de la période. — Si la capacité électrostatique du condensateur est c, la relation $c = C\mathbf{v}^2$ donne

$$\mathbf{v} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{cL}.$$

Le contrôle de la théorie se ramène donc à vérifier si la valeur du rapport $\mathbf{v}$ des unités ainsi déterminée est conforme à celle que donnent les méthodes plus directes.

M. Lodge [1] dispose l'expérience de manière que l'image de l'étincelle, produite par un objectif fixe, se forme sur une plaque photographique qui tourne dans son plan avec une grande vitesse; les épreuves successives se distribuent ainsi sur une circonférence et un petit déplacement de l'objectif permet d'obtenir sur la même plaque plusieurs séries d'images en cercles concentriques.

La vitesse de rotation se détermine par une méthode stroboscopique, en observant, au travers de deux fentes portées par les deux branches d'un diapason, des rayons tracés sur un disque tournant. L'arbre est commandé par une petite turbine à eau et on modifie la vitesse en appuyant à la main sur les cordes de transmission, de manière que le disque paraisse immobile au moment où l'on fait les épreuves d'étincelles.

Pour que l'induction propre du circuit soit facile à évaluer, on y intercale deux bobines plates parallèles, dont les coefficients respectifs sont L_1 et L_2 et le coefficient d'induction mutuelle M. Suivant le mode de jonction, les courants dans les bobines sont de même sens ou de sens contraires et le coefficient de self-induction final est $L = L_1 + L_2 \pm M$.

Les étincelles, peu nombreuses, présentaient au milieu de taches brillantes une sorte de trait de feu qui semble fournir un repère plus exact. Les expériences finales, avec des condensateurs à air, ont donné pour $\mathbf{v}.\,10^{-10}$, toutes corrections faites, des nombres variant de 2,90 à 3,02.

M. Boys [2] laisse, au contraire, la plaque photographique immobile et monte l'objectif sur un disque tournant. En réalité, ce disque porte six objectifs disposés par paires suivant des diamètres également inclinés l'un sur l'autre, et à des dis-

(1) O. Lodge, *Phil. Mag.* [5], t. XXIX, p. 292; 1890.
(2) C. V. Boys, *Phil. mag.* [5], t. XXX, p. 253; 1890.

ales du centre. Le [illegible]

[illegible] on obtient, dans un [illegible]

[illegible] trois circonférences [illegible]

[illegible] au début [illegible]

[illegible] *pilule* [illegible]

[illegible]

[illegible] le

[illegible] es

[illegible] ne

[illegible] que

même diamètre. Les deux premières plongent dans une rigole incomplète à mercure ; elles ferment le circuit primaire et le rompent au bout d'un temps assez long pour que le régime permanent soit établi. Les électrodes du fil induit communiquent aux autres pointes, dont l'une plonge dans une rigole continue, et dont l'autre touche à chaque révolution un fil de fer tendu que l'on peut déplacer par une vis micrométrique. Ce contact ferme le circuit induit sur un galvanomètre. Une seule décharge imprime au galvanomètre une impulsion balistique correspondant à la force électromotrice instantanée et la répétition des effets donnerait une déviation permanente.

Mouton (1) se servait de trois roues A, B et C, montées sur un même arbre tournant. La première établit le courant primaire et le brise à chaque révolution. Après un intervalle très court t, que l'on peut régler à volonté, les deux autres roues B et C font communiquer par des couteaux, pendant un temps qui ne dépasse pas 25.10^{-6} seconde, les extrémités du fil induit avec un électromètre à quadrants, dont l'aiguille est maintenue à un potentiel constant. La répétition du phénomène donne à l'électromètre une déviation permanente qui définit la force électromotrice induite à l'époque t.

Toutes ces observations s'accordent à montrer que les oscillations, à partir de la seconde, sont isochrones, et que leur période ne dépend que de la bobine induite. L'intervalle des deux premières, qui est plus long, dépend du circuit primaire et augmente beaucoup quand la bobine contient une armature de fer doux.

M. Janet (2) place dans le circuit d'un condensateur deux résistances r_1 et r_2, dont la première a un coefficient L, la seconde étant sans induction propre, et détermine par le même disjoncteur à roues les différences de potentiel correspondantes V_1 et V_2 à différentes époques t à partir de la rupture du courant de charge. On a alors, pour la décharge,

$$V_1 = r_1 i + L\frac{di}{dt}, \qquad V_2 = r_2 i.$$

(1) Mouton, *Ann. sc. de l'Éc. norm. sup.* [2], t. VI, p. 207 ; 1877.
(2) P. Janet, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXV, p. 875 et 1286 ; 1892.

Dans un travail plus récent, M. A. Webster utilis
d'un poids, soutenu par un électro-aimant, pour é
contacts successifs qui font communiquer une pile
condensateur et relient ensuite les armatures de ce c
teur aux bornes de l'électromètre.

Le condensateur est formé par deux plateaux ci
d'acier dont la distance e est maintenue uniforme à
cales cylindriques en verre. La capacité électrostati
déterminée par la formule de Kirchhoff (770); le term
rection ne dépassait pas 0,001 dans les expériences.

Le circuit renfermait une bobine à gorge recta

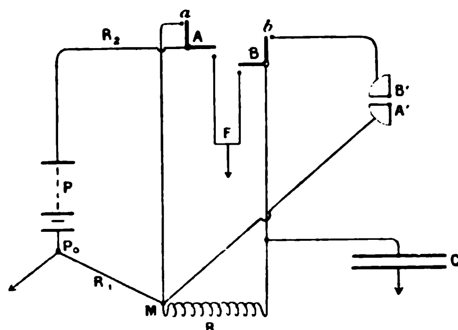


Fig. 235.

dont les dimensions ont été mesurées avec le plus gra
le fil était recouvert par une double couche de soie, et
du coefficient de self-induction L a été calculée par la
de Maxwell (589).

La pile P (fig. 235), dont le pôle P_0 communique a
fermée par un circuit n'ayant pas de self-induction app
nous désignerons par R_1 et R_2 les résistances des d
ties P_0M et MAP_0 de ce circuit. A′ et B′ représentent
paires de quadrants d'un électromètre dont l'aiguill
par un fil de quartz, est maintenue à potentiel consta
le condensateur, dont l'une des armatures commu
sol, et RL la bobine de self-induction. Des leviers en é
et B sont naturellement relevés par des ressorts et fer
contacts a et b; leurs branches horizontales sont r
successivement par la chute du poids; les contacts éta

e
.s
ait
la
R'
les
nde

Les moyennes de plusieurs expériences combinées entre elles de différentes manières ont donné, pour $\mathbf{v}.10^{-10}$, le nombre 3,036 qui paraît encore trop élevé.

Le calcul du coefficient de self-induction a été fait dans l'hypothèse des courants homogènes ; on doit donc en retrancher la demi-longueur du circuit (**411**) pour le cas actuel où la distribution est certainement superficielle, mais cette correction ne diminuerait la valeur de $\mathbf{v}$ que de 3 unités sur le quatrième chiffre significatif.

Remarquons enfin qu'on a supposé, dans l'établissement des formules, que le courant est le même à chaque instant sur toute la longueur du circuit ; il y a, sans doute, un effet de propagation qui n'est pas négligeable et qui suffirait, en dehors des autres causes d'erreur, pour expliquer le petit désaccord qui subsiste entre la théorie et les résultats des expériences.

DISTANCES EXPLOSIVES.

778. Dispositions des expériences. — Sur les surfaces en regard de deux conducteurs assez rapprochés pour provoquer une décharge électrique, les densités sont de signes contraires et l'idée la plus naturelle est de concevoir que la résistance du diélectrique est vaincue lorsque la pression électrostatique (**35**) acquiert une certaine valeur. L'expérience est loin de confirmer cette manière de voir, mais il est intéressant de déterminer dans chaque cas, soit la densité maximum σ, soit la pression correspondante $p = 2\pi\sigma^2$, soit le champ électrique au voisinage de ce point $F = 4\pi\sigma$, ou $F^2 = 8\pi p$.

Ces différentes quantités ont, en même temps, des valeurs constantes, lesquelles sont définies par les potentiels et la forme des conducteurs.

Les potentiels se déterminent en valeurs absolues ou relatives, soit par un électromètre, soit par la bouteille de Lane, quand les électrodes à décharge communiquent avec les armatures d'une batterie groupée en surface ou en cascade.

On obtient encore des mesures comparatives en terminant une des électrodes par deux conducteurs en dérivation A et A', en face desquels se trouvent respectivement deux conducteurs

tance explosive e' entre les conducteurs A'B', par
nme *ne* de distances explosives beaucoup plus faibles.
Enfin, le système AB peut être un trop plein électrique (77
our lequel on a déterminé la relation qui existe entre
istance e et la différence de potentiel qu'il est capable
naintenir. On connaîtra ainsi le potentiel explosif qui cor
pond à la distance équivalente e' du système A'B'.

Une dernière méthode beaucoup plus précise, mais m
facile à réaliser, consiste à employer une pile électrique
différence de potentiel est alors proportionnelle au nombre
couples. Il est vrai que la décharge directe entre les électro
extrêmes ne fournirait qu'une quantité d'électricité très fai
mais on utilise la pile pour charger des condensateur
grande capacité dont les armatures sont reliées aux électr
Warren de la Rue et H. Muller [1] disposaient d'une pi
15 000 couples (argent, chlorure d'argent, chlorhydrate
moniaque, zinc), dont la force électromotrice est d'environ
et d'une série de condensateurs formant une capacité
de 42 microfarads. La différence de potentiel pouvait a
teindre 15 450 volts, ou 51 unités électrostatiques, et
cité 378.10^5 ou 0,06 du rayon terrestre.

779. Plans parallèles. — Entre deux plateaux p
aux potentiels V_1 et V_2, le champ électrique est sen
uniforme et l'on a

$$F = \frac{V_1 - V_2}{e}, \qquad \sigma = \frac{F}{4\pi} = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

Dans ce cas, le potentiel explosif $V = V_1 - V_2$
dant, pour chaque distance, de la valeur abso
potentiels V_1 et V_2, de sorte que l'un ou l'autre
peut être mis en communication avec le sol. Pou
de fixité aux étincelles, l'un des plateaux est lég
rique, ce qui ne modifie pas les conditions du p
Lord Kelvin [2] a trouvé que, pour des dista

(1) WARREN DE LA RUE et H. MULLER, *Phil. Tr. R. S. L.* t.
t. CLXXI, p. 65; t. CLXXIV, p. 447. — *Proc. R. S. L.*, t. X
— *Ann. de Ch. et de Phys.* [5], t. XIII, p. 433 et XV, p.
p. 145 : 1880. — T. XXIV, p. 433; 1881.

(2) SIR W. THOMSON, *Reprint of papers*, p. 258.

^{c},01 à 0^c,15, si le potentiel explosif croît avec la distance, hamp électrique correspondant diminue à mesure que la ance augmente et semble tendre vers une valeur limite.

es nombres obtenus par M. Baille ([1]), à l'aide d'un élecnètre-balance, sont en général 10 p. 100 supérieurs à ceux Lord Kelvin, mais la distance a varié entre des limites s étendues, de 0^c,0015 à 1^c. Quoique les quatre séries qui nent l'ensemble des observations ne se raccordent pas ne manière absolue, on peut en déduire, comme valeurs rochées, les nombres suivants :

e.	$V = V_1 - V_2$.	$F = 4\pi\sigma$.	$5 + 100e$.	$\frac{\delta V}{\delta e}$.
0^c,0015	1,42	947	»	440
20	1,62	810	»	560
25	1,90	760	»	244
50	2,51	502	»	120
75	2,81	375	»	140
0,010	3,16	316	»	135
20	4,51	225	»	170
30	6,22	207	8	124
50	8,70	174	10	125
70	11,20	160	12	116
0,10	14,67	147	15	108
12	16,84	140	17	113
15	20,22	135	20	106
20	25,51	128	25	99
25	30,47	121	30	98
30	35,35	114	35	94
40	44,75	112	45	96
50	54,42	109	55	101
80	84,86	106	85	103
1,0	105,5	105,5	105	

es expériences de M. Liebig ([2]) avec des sphères de 9^c,76 ayon donnent des résultats entièrement de même ordre.

G.-B. Baille, *Ann. de Ch. et de Phys.* [5], t. XXV, p. 486; 1882 et t. XXIX, 1; 1883.
Liebig, *Ph. Mag.* [5], t. XXIV, p. 106; 1887.

A part quelques irrégularités, dont il convient de faire abstraction, ce tableau conduit à plusieurs remarques :

1° Le potentiel explosif diminue avec la distance, mais, au lieu de tendre vers zéro, il semble avoir une limite voisine de 1,25 ou 1, c'est-à-dire qu'une différence de potentiel finie, voisine de 400 ou de 300 volts, serait nécessaire pour produire l'étincelle à une distance infiniment petite.

2° Il n'existe aucune relation directe entre le champ électrique (ou la densité) et la distance explosive ; le champ diminue à mesure que la distance explosive augmente.

3° La dernière colonne montre que la dérivée du potentiel explosif par rapport à la distance est sensiblement constante et égale à 100 à partir de $e = 0^c{,}07$. La courbe des potentiels en fonction de la distance diffère alors très peu de la droite L, représentée par $V = 5 + 100e$; les différences de la seconde et de la quatrième colonne sont, en effet, de l'ordre des erreurs d'observation.

4° La dérivée du potentiel semble même passer par un maximum au voisinage de $e = 0{,}002$. La courbe V, devenue inférieure à la droite L, aurait un point d'inflexion et pourrait passer par un minimum V_0 pour une certaine distance e_0, au-dessous de laquelle la dérivée serait négative. Si la conclusion est exacte, il y aurait une distance critique e_0 au-dessous de laquelle l'accroissement de distance faciliterait la production des étincelles. Ce fait imprévu sera confirmé par les expériences à basse pression.

780. Sphères égales. — Dans l'intervalle de deux sphères de même rayon le champ n'est plus uniforme. Si l'une des sphères communique au sol, le maximum de densité aux points opposés du diamètre commun se trouve sur celle qui est électrisée et il est possible de calculer dans chaque cas la valeur correspondante F du champ électrique maximum.

Les expériences de M. Baille sont assez concordantes avec celles de M. Paschen (¹). Nous reproduirons quelques-uns des nombres obtenus par M. Baille dans deux séries qui présentent de légères différences aux distances communes, en y ajoutant, comme termes de comparaison, les valeurs relatives à deux plans parallèles :

(¹) Paschen, *Wied. Ann.*, t. XXXVII, p. 79 ; 1889.

781. Problème des deux sphères. — Le champ produit par deux sphères voisines à des potentiels différents peut être déterminé par le principe des images (**114**). Considérons deux sphères A et A′ de rayons a et a', dont les centres sont O et O′. La première ayant reçu une charge primitive q et la seconde étant au sol, les charges des images successives sont $-q_1, q_2, -q_3, q_4, \ldots$, les images négatives d'ordre impair étant situées à l'intérieur de la sphère A′ et les autres dans la sphère A. Par la superposition des couches relatives à toutes ces images, le potentiel V_1 sur la première sphère est $q = aV_1$ et le potentiel est nul sur la seconde.

Désignant par $a'x_1, a'x_3, \ldots,$ les distances des images $q_1, q_3, \ldots,$ au centre O′, par $ax_2, ax_4, \ldots,$ celles des images $q_2, q_4, \ldots,$ au centre O, et par $ca = c'a'$ la distance OO′ des centres, la condition des points conjugués (**111**) donne

$$(1)\qquad \begin{cases} cx_1 = (c - x_2)x_3 = \ldots = (c - x_{2n})\,x_{2n+1} = \dfrac{a'}{a}, \\[2ex] (c' - x_1)x_2 = \ldots = (c' - x_{2n-1})x_{2n} = \dfrac{a}{a'}, \end{cases}$$

ou d'une manière générale, en posant $a' = ba$, d'où $c = bc'$,

$$(1)'\qquad c - x_{2n} = \frac{b}{x_{2n+1}}, \qquad c - bx_{2n-1} = \frac{1}{x_{2n}}.$$

D'autre part, les charges successives sont

$$(2)\qquad q_1 = qx_1, \quad q_2 = q_1x_2 = qx_1x_2, \ \ldots, \quad q_n = qx_1x_2 \ldots x_n.$$

Pour déterminer les valeurs F_1 et F'_1 du champ électrique au voisinage des points B et B′ où le diamètre commun rencontre les surfaces en regard, on remarquera que la distance du point B à l'image q_{2n} est égale à $a(1 - x_{2n})$ et sa distance à l'image $-q_{2n-1}$ peut s'écrire, d'après (1)′,

$$a'(c' - x_{2n-1}) - a = a(c - bx_{2n-1} - 1) = a\,\frac{1 - x_{2n}}{x_{2n}}.$$

De même, les distances du point opposé B′ aux deux

mages $-q_{2n+1}$ et q_{2n} sont $a'(1-x_{2n+1})=ab(1-x_{2n+1})$ et

$$a(c-x_{2n})-a'=a(c-x_{2n}-b)=ab\,\frac{1-x_{2n+1}}{x_{2n+1}}.$$

On a ainsi, par l'ensemble de toutes ces masses,

$$\frac{1}{a^2}\left[q+\ldots+\frac{q_{2n}}{(1-x_{2n})^2}+\frac{q_1 x_2}{(1-x_2)^2}+\ldots+\frac{q_{2n-1}x_{2n}}{(1-x_{2n})^2}\right],$$

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{q_1}{(1-x_1)^2}+\ldots+\frac{q_{2n+1}}{(1-x_{2n+1})^2}+\frac{q_1 x_1}{(1-x_1)^2}+\ldots+\frac{q_{2n+1}x_{2n+1}}{(1-x_{2n+1})^2}\right],$$

ou, en groupant les termes deux à deux et remplaçant les charges par leurs valeurs (2),

$$(3)\quad \begin{cases} F_1=\dfrac{q}{a^2}\left[1+x_1x_2\dfrac{1+x_2}{(1-x_2)^2}+\ldots+x_1x_2\ldots x_{2n}\dfrac{1+x_{2n}}{(1-x_{2n})^2}\right] \\ F'_1=\dfrac{q}{a^2b^2}\left[x_1\dfrac{1+x_1}{(1-x_1)^2}+\ldots+x_1x_2\ldots x_{2n+1}\dfrac{1+x_{2n+1}}{(1-x_{2n+1})^2}\right]. \end{cases}$$

Désignant par y_1 et y'_1 les séries précédentes, on peut écrire

$$(3)'\qquad F_1=\frac{V_1}{a}y_1,\qquad F'_1=\frac{V_1}{ab^2}y'_1.$$

Un calcul analogue déterminerait les valeurs $-F'_2$ et $-F_2$ du champ aux mêmes points B' et B lorsque la sphère A' est au potentiel V_2 et l'autre au sol :

$$-F'_2=\frac{V_2}{a'}y'_2,\qquad -F_2=\frac{V_2}{a'}b^2y_2=\frac{V_2}{a}by_2.$$

Enfin, la superposition des deux états correspond au cas où les potentiels sont respectivement V_1 et V_2 ; le champ F au point B est alors

$$(4)\qquad F=F_1-F_2=\frac{1}{a}(V_1y_1-bV_2y_2).$$

Ces différentes séries ne sont pas sous une forme commode pour le calcul, parce que les facteurs $x_1, x_2, \ldots$ se déduisent

successivement les uns des autres. Leur convergence est lente pour des sphères très voisines, mais elles sont utilisables dès que cette distance est supérieure à la moitié du plus petit rayon. En effet, à partir d'un certain terme, les suivants peuvent être considérés comme une progression géométrique, en remplaçant le produit $x_n x_{n+1}$ par sa valeur limite.

Les valeurs limites x et x' de x_{2n} et x_{2n+1} correspondent aux points respectivement conjugués par rapport aux deux sphères. Pour la limite x, on déduit de la relation

$$\frac{b^2}{c - x_{2n}} = b x_{2n+1} = c - \frac{1}{x_{2n+2}},$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &(c-x)\left(c-\frac{1}{x}\right) = b^2,\\ &x^2 - \frac{c^2 - b^2 + 1}{c}\,x + 1 = 0.\end{aligned}\right.$$

Les deux racines de cette équation sont positives, l'une inférieure et l'autre supérieure à l'unité, et l'on doit prendre la plus petite racine. La valeur de x' s'obtiendrait, de même, en remplaçant c par c' et b par son inverse.

Lorsque les sphères sont d'égal rayon, auquel cas $b = 1$ et $y_2 = y'_1$, on a plus simplement

$$(5)' \qquad x(c - x) = 1, \qquad 2x = c - \sqrt{c^2 - 4},$$

$$(6) \qquad F = \frac{1}{a}(V_1 y_1 - V_2 y_2).$$

En outre, si l'on suppose $V_1 + V_2 = 0$, il en résulte

$$(7)\quad F = \frac{V_1}{a}\left[1 + x_1 \frac{1 + x_1}{(1 - x_1)^2} + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_n \frac{1 + x_n}{(1 - x_n)^2}\right] = \frac{2V_1}{a} y.$$

Pour une même différence $V = V_1 - V_2$ de potentiel, les champs F et F_1 sont respectivement proportionnels à y ou y_1, suivant que les sphères sont à des potentiels égaux et de signes contraires ou que l'une d'elles est au sol. Il est manifeste que l'intensité du champ et, par suite, la densité élec-

e dans le secon

à mesure que la

d'une ma-
en chaque
ne méthode,
l'équation (4)

$$\frac{x(cx - 1)}{c - x},$$

$$\frac{1 - p^{4n}x}{(1 + p^{4n}x)^2}\Bigg],$$

$$+ p^{2n}\frac{x - p^{4n+4}}{(x + p^{4n+4})^2}\Bigg].$$

tenant compte de (5)',

$$p = x,$$

$$\ldots + x^{2n}\frac{1 - x^{4n+1}}{(1 + x^{4n+1})^2}\Bigg],$$

$$)^2 + \ldots + x^{2n+1}\frac{1 - x^{4n+3}}{(1 + x^{4n+3})^2}\Bigg];$$

$$\Bigg[\frac{1 - x}{(1 + x)^2} + \ldots + x^n\frac{1 - x^{2n+1}}{(1 + x^{2n+1})^2}\Bigg].$$

ne quelconque des fractions comprises
ent s'écrire

$$\cdot\left(\frac{1 - x^m}{1 - x^m}\right)^2 = \frac{(1 - x^m)^3}{(1 - x^{2m})^2}.$$

a calculé une Table de la fonction y_1 à partir

l'*Institut*, pour 1811, p. 1 et 163.
ournal de Crelle, t. LIX, p. 89; 1861.
hil. Mag. [5], t. XXIX, p. 182; 1890.

de $c = 2,1$; c'est cette table qui a servi à déterminer le champ maximum F dans les expériences précédentes (**780**).

Lorsque la distance e des sphères est inférieure à cette limite, les séries ne sont plus assez convergentes; un autre calcul de Kirchhoff conduit à l'expression suivante, que l'on peut réduire à ses deux premiers termes :

$$F_1 = \frac{V_1}{e}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{e}{a} + \frac{1}{45}\frac{e^2}{a^2} + \cdots\right] = \frac{V}{e}u.$$

Le rapport des séries y et y_1 est égal à l'unité quand la différence $c - 2$ est très petite et varie d'abord très lentement. Nous avons calculé également les valeurs de y, qu'il est utile de considérer dans certains cas.

SPHÈRES ÉGALES.

c.	y_1.	y.	$\frac{y_1}{y}$.	u.
2,1	10,335	10,325	1,001	1,0335
2,2	5,342	5,331	1,002	1,0684
2,3	3,687	3,671	1,004	1,1061
2,4	2,875	2,840	1,012	1,1500
2,5	2,398	2,345	1,023	1,1990
2,7	1,876	1,782	1,053	1,3132
3,0	1,517	1,359	1,116	1,5170
3,5	1,273	1,040	1,224	1,9095
4	1,169	0,885	1,321	2,338
5	1,084	0,738	1,469	3,252
6	1,050	0,669	1,570	4,200
8	1,024	0,605	1,692	6,144
10	1,014	0,575	1,764	8,112
100	1,002	0,506	1,980	»

A une distance déterminée et pour une même valeur du champ maximum, les différences de potentiel dans les deux conditions considérées sont en rapport inverse des quantités correspondantes y et y_1. Si l'étincelle ne dépend que de la densité électrique et de la forme des conducteurs, le potentiel explosif tend donc à devenir double lorsque les sphères sont à des potentiels égaux et de signes contraires.

Ce calcul permettrait aussi de déterminer l'action réciproque deux sphères dont l'une A′ communique au sol, puisque est la somme des attractions exercées par l'ensemble des masses positives q, q_2, ..., q_{2n} contenues dans la première A ur les masses négatives q_1, q_3, ..., q_{2n+1} de la seconde.

Si le rapport b des rayons est assez petit, on obtiendra une grande approximation en supposant : 1° que toute la charge $Q' = q_1 + q_3 + \ldots q_{2n+1}$ de la seconde sphère est à la même distance x' du centre, au point conjugué du centre O de la première; 2° que toutes les images $q_2 + \ldots, + q_{2n} = Q_2$ de la première se trouvent à la même distance x, au point conjugué du centre O′, la charge totale de cette sphère étant $q + Q_2 = Q$. On a alors

$$Q' = Q\frac{x'}{a'}, \qquad Q_2 = Q'\frac{x}{a} = Q\frac{xx'}{aa'};$$

$$Q = q + Q\frac{xx'}{aa'}, \qquad Q = \frac{q}{1 - \frac{xx'}{aa'}}.$$

En désignant par d la distance des centres, l'action réciproque f est alors

$$f = \left[\frac{q}{(d-x)^2} + \frac{Q_2}{(d-x-x')^2}\right]Q',$$

$$f = q^2 \frac{x'}{a'\left(1 - \frac{xx'}{aa'}\right)}\left[\frac{1}{(d-x)^2} + \frac{x}{a(d-x-x')^2}\right].$$

Comme on a $q = aV_1$, les distances x et x' étant déterminées par les relations

$$dx' = a'^2, \qquad (d-x')x = a^2,$$

on en déduira le potentiel V_1 par l'attraction f et les données de l'expérience; ce calcul pourra convenir pour l'électromètre à oscillations indiqué plus haut (**611**).

782. Longues étincelles. — Ces considérations théoriques étaient nécessaires pour discuter les expériences dans lesquelles on obtient des étincelles de grande longueur, ou plus

électrostatiques ou des appareils d'induction ne doivent pas correspondre à des potentiels beaucoup plus élevés.

On conçoit d'ailleurs que la décharge d'un corps électrisé finisse par être indépendante de la distance des conducteurs qui l'entourent. La longueur des éclairs, par exemple, n'implique pas que le potentiel des nuages soit hors de proportion avec ceux qu'on réalise dans les laboratoires.

783. Électrodes de formes différentes. — Entre deux sphères dont l'une n'est pas isolée, le potentiel explosif est sensiblement le même, pour des distances modérées, quel que soit le signe de celle qui communique au sol.

Toutefois, dès que les potentiels deviennent plus élevés, il est manifestement plus difficile de conserver les charges négatives et l'électricité ne tarde pas à s'échapper sous forme d'aigrettes avant de produire une véritable étincelle.

La loi des distances explosives est ainsi modifiée par le seul fait du changement de signe des électrodes.

Les différences deviennent encore plus grandes quand les électrodes ne sont plus symétriques. Entre une pointe et un plateau, par exemple, la distance est plus grande, pour des potentiels inférieurs à 10, quand la pointe est négative et, pour des potentiels plus élevés, quand la pointe est positive.

On peut ainsi constituer de véritables *soupapes électriques*, qui laissent passer la décharge dans un sens et l'interrompent dans le sens opposé.

En employant deux paires d'électrodes A et A′ sur le premier conducteur, B et B′ sur le second, telles que A et B soient des pointes ou des sphères de petit diamètre, A′ et B des sphères plus grandes ou des plateaux respectivement à la même distance, la décharge franchira l'un ou l'autre des deux intervalles et passe ainsi d'un côté ou de l'autre quand on permute les signes des électrodes.

L'expérience est facile à réaliser avec les bobines d'induction quand la distance considérée est assez grande pour interrompre l'une des décharges induites.

On a vu déjà que, pour des distances notables entre deux sphères, le potentiel explosif diminue rapidement avec leur diamètre. Le calcul relatif aux sphères cesse bientôt d'être applicable parce qu'on doit les porter par des conducteurs

l'influence n'est plus négligeable et les électrodes devien- plutôt assimilables à des pointes; les distances explo- sont alors beaucoup plus grandes. Nous citerons encore, re d'exemple, quelques-uns des résultats obtenus par ren de la Rue et H. Muller.

DISTANCE EXPLOSIVE.

Volts.	Deux plateaux.	Pointe + et disque —	Deux pointes paraboliques.
1000	0c,020	0c,012	0c,017
2000	43	57	49
3000	66	0,138	0,138
4000	91	245	308
5000	0,118	403	511
6000	147	563	684
7000	180	704	850
8000	215	845	1,012
9000	249	971	1,160
10000	286	1,087	1,291
11000	324	1,199	1,313
12000	357	1,306	1,524
13000	407	1,408	1,627
14000	446	1,514	1,715
15000	488	1,612	1,796
15450	0,503	1,660	1,850

ur les deux dernières colonnes, la distance explosive est u près proportionnelle au carré de la différence de poten- usqu'à 8000 volts, et croît ensuite moins rapidement.

ı voit encore, à part les premiers nombres, que la dis- explosive augmente d'une colonne à la suivante. Pour o volts ou 50 unités électrostatiques, cette distance dans les rapports de 1 à 3,30 et 3,68.

4. **Nature du gaz.** — Les courbes de potentiel explosif pré- nt la même allure dans les autres gaz, tels que l'*acide onique*, l'*hydrogène* et le *gaz d'éclairage*. Les résultats nus par comparaison avec les étincelles dans l'air, à l'aide lérivations équivalentes, ne présentent pas beaucoup de

électrostatiques ou des appareils d'induction ne doivent p correspondre à des potentiels beaucoup plus élevés.

On conçoit d'ailleurs que la décharge d'un corps électri finisse par être indépendante de la distance des conducteu qui l'entourent. La longueur des éclairs, par exemple, n'im plique pas que le potentiel des nuages soit hors de proportio avec ceux qu'on réalise dans les laboratoires.

783. Électrodes de formes différentes. — Entre deux sphères dont l'une n'est pas isolée, le potentiel explosif est sensiblement le même, pour des distances modérées, quel que soit le signe de celle qui communique au sol.

Toutefois, dès que les potentiels deviennent plus élevés, il est manifestement plus difficile de conserver les charges négatives et l'électricité ne tarde pas à s'échapper sous forme d'aigrettes avant de produire une véritable étincelle.

La loi des distances explosives est ainsi modifiée par le seul fait du changement de signe des électrodes.

Les différences deviennent encore plus grandes quand les électrodes ne sont plus symétriques. Entre une pointe et un plateau, par exemple, la distance est plus grande, pour de potentiels inférieurs à 10, quand la pointe est négative et, pou des potentiels plus élevés, quand la pointe est positive.

On peut ainsi constituer de véritables *soupapes électriqu* qui laissent passer la décharge dans un sens et l'interromp dans le sens opposé.

En employant deux paires d'électrodes A et A' sur le mier conducteur, B et B' sur le second, telles que A soient des pointes ou des sphères de petit diamètre, A' des sphères plus grandes ou des plateaux respectivemen même distance, la décharge franchira l'un ou l'autre des intervalles et passe ainsi d'un côté ou de l'autre qua permute les signes des électrodes.

L'expérience est facile à réaliser avec les bobines d tion quand la distance considérée est assez grande pou rompre l'une des décharges induites.

On a vu déjà que, pour des distances notables ent sphères, le potentiel explosif diminue rapidement a diamètre. Le calcul relatif aux sphères cesse bientô applicable parce qu'on doit les porter par des con



[illegible]

obtenus par [illegible]
des [illegible]

ques-uns des résultats ainsi obtenus sont indiqués dans la figure 237, où les ordonnées représentent les potentiels en unités électrostatiques, et les abscisses les pressions en centimètres de mercure, les courbes étant relatives à différentes distances explosives. Plusieurs conclusions s'en dégagent :

1° Pour des potentiels inférieurs à 1, ou 300 volts, aucune étincelle n'a lieu, quelles que soient la distance et la pression.

2° A mesure que la distance explosive croît, la pression critique ϖ diminue, mais le potentiel correspondant augmente.

3° Pour de petites distances, telles que $0^c,001$, le potentiel

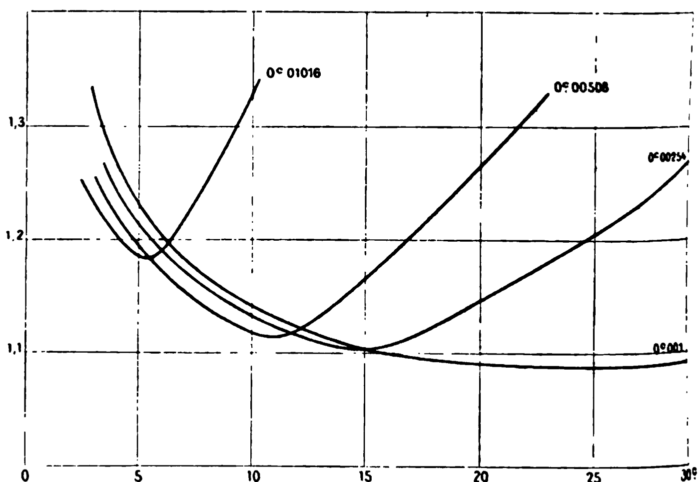


Fig. 237.

change très peu pendant que la pression varie entre des limites très écartées.

4° Enfin, et c'est là le phénomène le plus inattendu, deux courbes quelconques ont un point d'intersection. A la pression de 5^c, par exemple, le potentiel explosif est plus faible pour des étincelles de $0^c,01$ que pour celles de $0^c,001$.

Ce résultat a été confirmé directement par M. Peace en employant un plateau légèrement convexe. Au voisinage de la pression critique, les étincelles laissent leur trace sur le métal par un anneau circulaire autour du point qui correspond à la moindre distance.

5° Il est naturel de chercher si la distance explosive qui

correspond à la pression critique est en relation avec quelque autre propriété des gaz, par exemple avec le *libre parcours moyen* des molécules, mais ce parcours est en raison inverse de la pression, tandis que la distance explosive considérée croît plus rapidement; elle est d'ailleurs d'un ordre de grandeur tout différent, comme on le voit par les résultats suivants où le libre parcours moyen a été calculé en adoptant $0^{mm},1$ pour la pression de 76^c.

Potentiel explosif. V.	Pression critique. ϖ.	Distance explosive. e.	Libre parcours moyen.
1,08	25^c	$0^c,001$	$0^c,00003$
1,10	15	0,00254	0,00005
1,11	11	0,00508	0,00007
1,18	5,5	0,01016	0,00014
1,23	3,5	0,02032	0,00022

Au-dessous de la pression critique, la résistance du gaz augmente rapidement, au point qu'il devient difficile d'y produire des étincelles, et l'électricité ne traverse pas le vide absolu. Cette propriété importante, dont on pourrait déjà trouver l'indication dans des expériences anciennes, paraît avoir été démontrée d'abord par Masson [1]; elle a été confirmée depuis par différents observateurs, à mesure que les procédés de raréfaction se sont améliorés.

Il est intéressant de remarquer que si le potentiel explosif continuait de diminuer avec la pression, au point que le vide devint bon conducteur de l'électricité à la manière des métaux, la théorie de Maxwell exigerait alors que les espaces interplanétaires soient opaques à la lumière.

787. Pressions très faibles. — Tubes sans électrodes. — Quand la décharge a lieu entre des électrodes métalliques, dans un tube à gaz très raréfié, ces électrodes modifient beaucoup les conditions du phénomène. M. J. J. Thomson a eu l'idée ingénieuse d'employer des tubes sans électrodes, des tubes annulaires par exemple, ou de simples boules, afin que la masse du gaz soit seule à intervenir. Les appareils consti-

[1] Masson, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. XXXI, p. 314; 1851.

tuent alors des circuits fermés, de formes plus ou moins variées, et l'on doit recourir aux effets d'induction pour obtenir des forces électromotrices finies capables de provoquer l'illumination du gaz.

Si le courant inducteur est produit par une série de décharges de caractère alternatif (399) à faible amortissement, les premières oscillations seront surtout efficaces et on peut considérer la charge q de l'appareil primaire comme représentée par $q_0 \cos \omega t$. On a alors, pour le courant inducteur,

$$I = -\frac{dq}{dt} = q_0 \omega \sin \omega t, \qquad \frac{dI}{dt} = q_0 \omega^2 \cos \omega t.$$

En désignant par C et L la capacité et le coefficient de self-induction de l'appareil primaire, et par V_0 le potentiel explosif, il en résulte

$$\omega^2 = \frac{1}{CL}, \qquad q_0 = CV_0, \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{V_0}{L} \cos \omega t.$$

Si M est le coefficient d'induction mutuelle entre le circuit primaire et le tube à gaz, la force électromotrice induite est

$$E = M \frac{dI}{dt} = V_0 \frac{M}{L} \cos \omega t.$$

Les armatures d'un condensateur sont reliées par un conducteur renfermant une hélice de quelques spires.

L'expérience peut être disposée de plusieurs manières diffé-

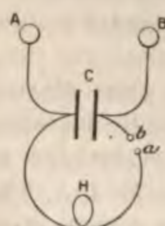


Fig. 238.

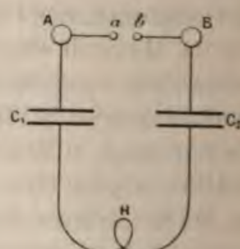


Fig. 239.

rentes. Dans la figure 238, les pôles A et B d'une machine électrostatique sont reliés aux armatures d'un condensateur C dont le circuit renferme l'hélice H et un interrupteur ab pour

règler le potentiel explosif. Dans la figure 239, on a disposé deux condensateurs en cascade C_1 et C_2 reliés aux pôles A et B; l'hélice H est située sur la communication des autres armatures et l'interrupteur ab entre les pôles de la machine. Pour éviter tout effet d'induction électrostatique, on relie au sol le milieu de l'hélice H.

Quant aux appareils à gaz raréfié, on les place autour de l'hélice s'ils ont la forme annulaire, ou dans l'intérieur même de cette hélice s'il s'agit d'une simple boule.

A même potentiel explosif, l'amplitude de la force électromotrice d'induction est proportionnelle au rapport des coefficients M et L, qu'il faut rendre maximum. La valeur de M est proportionnelle au nombre n des spires de l'hélice et peut s'écrire βn; le coefficient L comprend d'abord un terme L_0 relatif au conducteur étranger à l'hélice et un autre terme αn^2 proportionnel au carré du nombre de spires. Il en résulte

$$\frac{M}{L} = \frac{\beta n}{L_0 + \alpha n^2}.$$

Cette expression est maximum pour $L_0 = \alpha n^2$, $L = 2 L_0$. Toutefois il est préférable de prendre un nombre de spires supérieur à cette limite, afin de rendre L plus grand et de diminuer l'amortissement des oscillations primaires.

788. Apparences des décharges. — Dans une boule de verre où l'on raréfie l'air progressivement, il se produit un anneau rougeâtre vers la pression d'un millimètre, puis l'éclat augmente et la lumière devient plus blanche; l'anneau devient très brillant et bien défini quand la pression est inférieure à $\frac{1}{100}$ de millimètre, il s'affaiblit ensuite et finit par disparaître. La pression critique est donc beaucoup plus faible que dans les expériences où l'on fait usage d'électrodes métalliques.

Des résultats analogues s'observent avec les tubes en forme d'anneau, même quand l'anneau est interrompu et le circuit complété par un tube latéral de plusieurs mètres de longueur soustrait à l'induction.

Si l'anneau est soumis à l'action d'un champ magnétique parallèle à son plan, on voit, dans les régions où le tube est perpendiculaire au champ, la bande lumineuse se séparer en

deux parties qui correspondent aux décharges de sens contraires. L'illumination est alors moins facile à obtenir et peut même être supprimée par le champ magnétique.

On rendra compte de ces particularités en concevant que le champ magnétique agit, non pas sur le courant même de décharges, mais sur le conducteur qu'il parcourt. La décharge doit débuter d'abord sur la ligne de plus grande force électromotrice ; sur ce chemin, la conductibilité augmente, soit par une élévation de température, soit par un état instable du gaz en partie dissocié, et le passage est rendu plus facile pour les courants qui suivent. Si la première décharge est déviée, le chemin n'est plus frayé pour les suivantes et l'illumination peut être interrompue. A la limite des deux cas, la décharge n'a pas de chemin défini et oscille dans le tube.

Ces décharges induites traversent difficilement les conducteurs métalliques, sans doute à cause de leurs très courtes périodes (**462**). Une boule à gaz raréfié, divisée en deux compartiments par une cloison métallique, étant disposée de manière que la cloison soit dans un plan méridien des courants induits, la lueur du gaz montre que les décharges suivent un chemin fermé dans chacun des compartiments en longeant de part et d'autre la cloison métallique. Si cette cloison a été percée de petites ouvertures aux extrémités du diamètre situé dans le plan des courants, les décharges s'y propagent.

L'expérience suivante montre encore que les gaz raréfiés peuvent se comporter à la manière des écrans conducteurs. Une boule de verre A, dont le gaz est au voisinage de la pression critique, est renfermée dans une seconde boule B concentrique, qui contient une goutte de mercure et où le vide a été poussé plus loin ; l'appareil est soumis à l'action d'une hélice inductrice. A la température ordinaire, la boule intérieure A s'illumine. Si l'on chauffe la boule B de 70° à 160°, la vapeur de mercure devenue conductrice s'illumine et la boule A s'éteint. Pour une température plus élevée, la pression de la vapeur de mercure devient trop grande et la boule intérieure A s'illumine de nouveau.

789. Conductibilité des gaz raréfiés. — Ce rôle d'écrans permet d'évaluer la conductibilité des gaz raréfiés. Dans l'appareil représenté par la figure 240, le tube A qui renferme un

é-
i-
ıts

cer
iffé-
rgie

ıeurs
ıle, et
ule B

deux parties qui correspondent aux décharges d
traires. L'illumination est alors moins facile à obt
même être supprimée par le champ magnétique

On rendra compte de ces particularités en co
champ magnétique agit, non pas sur le couran
charges, mais sur le conducteur qu'il parcou
doit débuter d'abord sur la ligne de plus gran
motrice ; sur ce chemin, la conductibilité a
une élévation de température, soit par un é
en partie dissocié, et le passage est rendu
courants qui suivent. Si la première décl
chemin n'est plus frayé pour les suivan
peut être interrompue. A la limite des d
n'a pas de chemin défini et oscille dans

Ces décharges induites traversent di
teurs métalliques, sans doute à caus
périodes (462). Une boule à gaz raréfi
partiments par une cloison métalliqu
nière que la cloison soit dans un pl
induits, la lueur du gaz montre que
chemin fermé dans chacun des con
part et d'autre la cloison métalli se
percée de petites ouvertures aux ooke
dans le plan des courants, les d e lieu

L'expérience suivante montr s à l'élec
peuvent se comporter à la man l'air, d'écla
Une boule de verre A, dont le la colonne
sion critique, est renfermée d par Farad
centrique, qui contient une g
a été poussé plus loin ; l'app qui s'étend
hélice inductrice. A la temp surtout dans
rieure A s'illumine. Si l'on plus ou moins
la vapeur de mercure de et de
boule A s'éteint. Pour un
sion de la vapeur de mer complète s
intérieure A s'illumine d avec l'inten

789. Conductibilité des avec la pression du
met d'évaluer la condu de l'influence
reil représenté par la de disques

strates, quoique plus difficilement, dans les tubes à décharge sans électrodes.

La colonne positive et les strates qu'elle renferme sont liées à la position de l'anode, dont elles paraissent émaner en suivant le plus court chemin vers la cathode. On peut ainsi réaliser une belle expérience. La pression dans un tube cylindrique étant assez faible pour produire un petit nombre de strates, si on laisse rentrer le gaz avec une grande lenteur, on voit des bulles lumineuses se détacher successivement de l'anode et marcher dans le tube où elles forment de nouvelles strates; en même temps les précédentes sont repoussées, de manière que la distance moyenne soit en rapport avec la pression. Le phénomène inverse se produirait, les strates marchant cette fois vers l'anode, qui les absorberait une à une, si l'on diminuait la pression.

Il est plus simple encore d'employer une électrode mobile, reliée à l'extrémité du tube par un fil en spirale, et que l'on peut déplacer par de petites secousses ou par l'action d'un aimant extérieur sur un morceau de fer doux. Si ce conducteur mobile est utilisé comme cathode et qu'on le fasse cheminer dans le tube, il emporte avec lui, sans altération, l'espace obscur de Crookes, la lueur négative et l'espace sombre de Faraday; la colonne positive marche en même temps, les strates conservant leur distance, mais elles sont une à une dégagées ou absorbées par l'anode, suivant le sens du mouvement. Si la cathode est fixe et l'anode mobile, la forme générale de l'illumination reste invariable : l'anode absorbe toutes les strates qu'elle rencontre ou en dégage de nouvelles, suivant qu'elle chemine vers l'anode ou dans la direction opposée.

Les stratifications ont été observées pour la première fois par Abria (1) et ont donné lieu à beaucoup de recherches sans que l'on connaisse encore le mécanisme de leur production. On peut les comparer aux interférences produites par la lumière ou aux alternatives de nœuds et de ventres dans un tuyau sonore, ou encore supposer qu'elles traduisent une série de décharges dans les différentes couches de gaz. Il paraît certain, en tous cas, que le phénomène est périodique, car l'in-

(1) ABRIA, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. VII, p. 478; 1834.

terposition d'un téléphone dans le circuit fait entendre un son manifeste, même dans le cas où l'on se sert d'une pile.

Lorsque les strates sont complexes, les différentes couches d'un même groupe n'ont pas la même teinte ni le même spectre; pour un mélange de gaz, comme l'air, il semble que les couches de même espèce soient dues isolément aux divers éléments qui entrent dans la constitution du mélange.

791. Propagation de la décharge. — De la Rive (1) a montré, par une expérience devenue célèbre, que la colonne positive obtenue dans un gaz raréfié subit l'action d'un champ magnétique comme ferait un conducteur solide parcouru par le courant; la portion du gaz traversée par la première décharge, devenue plus conductrice, est entraînée par le champ magnétique et reste le siège de la transmission du courant.

Toutefois, ce n'est là que l'ensemble du phénomène et le champ n'agit pas de la même manière sur les différentes parties du gaz illuminé. D'après Plucker (2), la lueur négative se comporte comme un corps paramagnétique, tel que le fer, et se dispose dans le sens des lignes de force. De même, les strates sont déformées par un champ magnétique. Sans entrer dans le détail de ces effets très complexes, il paraît en résulter que les décharges émanent de l'anode et se propagent dans les strates successives.

Une première question est de savoir s'il y a un entraînement des molécules illuminées, auquel cas l'étude spectrale dans la direction du mouvement permettrait d'apprécier un déplacement des raies. L'expérience réalisée par M. Zahn (3) a montré que le déplacement, s'il existe, n'est pas $\frac{1}{40}$ de la distance des deux raies D du sodium, dont la différence de longueur d'onde est d'environ $\frac{1}{1000}$. La vitesse de transport serait donc inférieure à $0{,}25.10^{-4}$ de celle de la lumière ou 7500 mètres par seconde.

En observant un tube à vide au moyen du miroir tournant, Wheatstone (4) en a conclu que la vitesse de propagation n'est pas inférieure à 8.10^7 ou $\frac{1}{375}$ de celle de la lumière, sans pouvoir indiquer le sens de cette propagation.

(1) De la Rive, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. LIV, p. 238; 1858.
(2) Plucker, *Pogg. Ann.* t. CIII, p. 88; 1858.
(3) Zahn, *Wied. Ann.* t. VIII, p. 675; 1879.
(4) Wheatstone, *Brit. Ass. Rep.*; Dublin, 1835.

M. J. J. Thomson a réalisé l'expérience
mieux définies. Le tube avait 5^{mm} de d
gueur totale de 15 mètres. Deux portions
séparées par $5^{m},5$ de tube, étaient disp
l'image de l'une, dans un miroir fixe,
longement de l'autre; on visait cet en
tournant qui faisait 400 ou 500 révo

Il n'était pas facile de régler l'appa
celle eut lieu pour une position dét
mais la répétition fréquente des dé
ser la lunette d'observation dans
tendre que le hasard fit apparaître
à des intervalles d'environ 4 min
se trouvent plus en ligne droit
l'autre et le sens du déplaceme
décharges, de manière à indi
de l'anode à la cathode. L'ang
par un micromètre, a permis
propagation est environ la

792. Distribution des pot
déterminer comment varie
raréfié, puisque le phénom
ne peut évaluer que des

La seule méthode p
tube deux électrodes lat
met en communication
un condensateur dont
le galvanomètre balist
de potentiel sont not
périence que dans l

On doit remarque
un milieu fortemen
qui introduit une
véritable des pote
entièrement mod
métal porté au r
A part cette

(1) HITTORF, W

rsque l
millim
toute l'éte
particulier

semble émet
une sorte de
le rendre flu
rencontre, et ce
effets se propag
usant qu'il exis
hypothèse sur le
sur le trajet de ce
une phosphorescen
terres alcalins. L'ex
par M. Crookes, d
une longue ampou
une électrode te
cathode : sur l'anode
une croix en alun
quand la croix es
sur le fond du tube
fluorescente. Le
une sorte de fati

que l'appareil a fonctionné pendant quelque temps, si l'on fait tomber la croix d'aluminium, la place de l'ombre primitive prend plus d'éclat que les régions voisines.

En donnant à la cathode la forme d'une calotte sphérique, les rayons se réunissent au centre de courbure et y acquièrent une activité beaucoup plus grande. On arrive même à fondre le verre si le centre de courbure de la cathode se trouve sur la paroi de l'ampoule.

La plupart des corps deviennent ainsi phosphorescents sous l'influence des rayons cathodiques et avec plus d'intensité que par l'emploi de la lumière ultra-violette. Nous citerons, par exemple, le *rubis*, l'*yttria*, les *sulfures alcalins*, les sels d'*urane* et même la *craie*. Le spectre de ces phosphorescences présente une composition spéciale, dont M. Crookes a montré l'importance pour l'étude des terres rares.

Les traces de la phosphorescence et, en particulier, l'expérience de la croix de Malte, permettent facilement de montrer que les rayons cathodiques sont déviés par un champ magnétique, comme s'ils constituaient des filets de courants négatifs émanés de la cathode.

S'il existe ainsi un transport d'électricité négative, deux filets voisins doivent se repousser en vertu de leur action électrostatique et s'attirer comme courants. En employant deux cathodes parallèles, dont le rayonnement était intercepté par un écran percé de deux fentes voisines, M. Crookes a observé que la transmission est rectiligne pour chacune des cathodes agissant séparément et que, si on les met toutes deux en fonction, les deux rayons s'écartent l'un de l'autre après les fentes.

Toutefois, si cette répulsion existe, il est assez difficile que les rayons émis par une même cathode restent normaux à sa surface. MM. E. Wiedemann et Ebert (1) ont d'ailleurs observé qu'en fermant l'une des fentes par un volet mobile, la déviation [a] lieu encore pour le seul rayon qui conserve le passage libre quand on fait agir les deux cathodes simultanément; l'effet produit doit donc s'expliquer autrement.

En plaçant comme anode dans la région moyenne du tube

(1) [...] Ebert, *Wied. Ann.*, t. XLVI, p. 158; 1892.

n'ont sans doute qu'un rapport éloigné avec les
réelles, que l'on doit plutôt attribuer à la vit
cules gazeuses et à l'illumination produite pa
chimiques entre les atomes.

L'apparence de la décharge est entièreme
les électrodes sont assez rapprochées, ou
faible, pour que l'espace noir de Crooke
l'anode. Dans ce cas, la décharge positive
ger vers la cathode, se propage le lon
verre. En outre, l'étincelle passe beauc
de sorte qu'en écartant davantage les
le potentiel explosif.

RAYONS CATHODI

793. Expériences de M. Crookes. –
assez faible, de l'ordre du centièn
encore, pour que l'espace noir occ
les phénomènes ont des caractè
étudiés par M. Crookes.

Le fait capital est que la cath
direction normale en chaque p
invisible qui jouit de la propri
phosphorescents les corps qu
soit la position de l'anode.
droite et on peut les traduir
cathodiques, sans faire auc

S'il n'existe pas d'écran
paroi opposée du tube pre
le cristal et bleue pour le
de la *croix de Malte*, réa
cette propagation rectili
porte à l'une de ses ext
disque vertical qui sert
dée latéralement, est
autour d'un axe hori
ombre se projette en
la portion qui l'ent
une modification pa

cile-
particules
doit être
ile à contrôler.
les, elle existe en
platine, mais elle
Crookes obtient les
ampoule sphérique où
ttes métalliques appli-
de matériel émane
à nouvel ordre, rend
ènes. Si on place
à ailettes de mica qui
tales et disposé de
seules sur le trajet
se met en mouvement
série de projectiles.
radiomètre et que
nature.
par les chocs ou
la vitesse du

ive corres-

lé-

sphère, la
a donne

sse des molécules
. ce qui correspond
se dont seraient ani-
a théorie cinétique des
. Un tel échauffement
nnement, pour expliquer

er si la matière radiante em-
négative dans son mouvement
s de M. Crookes à ce sujet ne
. La distribution des potentiels
par des sondes électriques, con-
résultats curieux, mais l'électri-
mière elle-même apporte dans les
reur inconnue; il semble bizarre, en
métal frappé par les rayons catho-
entiel positif.
vée par M. Perrin [1] paraît plus correcte.
dre C (fig. 241), terminée par un petit
ndre métallique B dont la base est percée

l'Acad. des sc., t. CXXI, p. 1130; 1895.

d'une petite ouverture et qui sert d'anode. Dans l'interieur de ce cylindre est un second cylindre B′ dont la base opposée à la cathode porte également une petite ouverture en face de la première. Le fil *b′* du cylindre intérieur communique avec un électromètre à feuilles d'or; le fil *b* de l'anode est relié au sol et à la cage de l'électromètre. L'électricité négative émanant de la cathode et passant par l'ouverture de l'anode peut ainsi pénétrer dans le cylindre B′, qui se charge à la manière du cylindre de Faraday. L'expérience montre, en effet, que l'électroscope indique un potentiel négatif.

Enfin, et c'est là une propriété dont l'importance a beaucoup augmenté depuis quelque temps, les corps rendus phosphorescents par les rayons cathodiques deviennent eux-mêmes des sources d'émission analogue. Avec un tube recourbé plusieurs fois à angle droit, M. Goldstein (¹) a constaté que

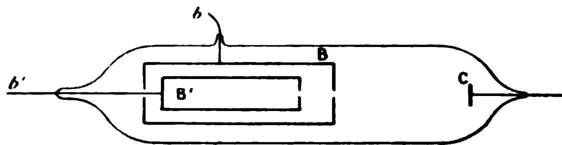


Fig. 241.

si l'un des angles est sur le trajet direct des rayons cathodiques, il provoque ensuite la phosphorescence sur l'angle opposé, lequel agit à son tour sur le suivant.

795. Vitesse des rayons cathodiques. — Par une méthode analogue à celle qu'il avait déjà utilisée pour les décharges, M. J. J. Thomson (²) a essayé de déterminer si le rayonnement cathodique se propage avec une vitesse appréciable.

L'ampoule, de forme cylindrique, est entièrement noircie à l'exception de deux fentes à quelque distance l'une de l'autre sur une même génératrice. Ces fentes s'illuminent par phosphorescence et on les observe dans un miroir tournant à six facettes, afin d'augmenter les chances de visibilité.

Avec les bobines excitées par des courants interrompus, les images des deux fentes paraissent comme des rubans lumi-

(¹) GOLDSTEIN, *Wied. Ann.*, t. XV, p. 246; 1882.
(²) J.-J. THOMSON, *Ph. Mag.* [4], t. XXXVIII, p. 358; 1896.

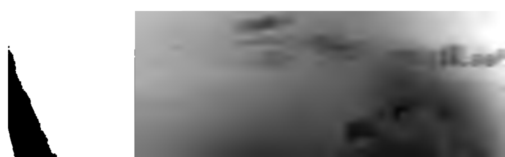
[illegible]tensités variables qui ne [illegible] pas [illegible]s. Les résultats sont meilleurs quand on fait [illegible] primaire la décharge de deux jarres électriques [illegible] le fil secondaire peut alors donner des étincelles [illegible] avec le tube précédent, les images sont moins [illegible] et il est possible d'en observer la séparation [illegible] verre d'urane que la phosphorescence s'éteint [illegible] et que les effets sont plus nets.

[illegible] a montré qu'il existe une vitesse manifeste de [illegible] que M. Thomson évalue à [illegible]. Si l'on admet [illegible] corresponde au transport réel des molécules, [illegible] Kelvin conduirait à un échauffement des [illegible] millions de degrés par seconde, résultat [illegible]ssible: pour rester dans le même ordre [illegible] en conclure qu'une très faible partie du [illegible]vement électrique.

[illegible] considérer les choses d'un autre point de [illegible] atome d'hydrogène, v sa vitesse, [illegible] V le potentiel correspondant, l'énergie [illegible] représentée par $\frac{mv^2}{2}$ ou Vq.

[illegible]tricité en mesures électromagnétiques [illegible] hydrogène, de sorte que le rap[illegible] masse de gaz m qu'elle emporte [illegible] différence de potentiel V entre la [illegible] négative soit de [illegible]

[illegible]



sol, protège le champ situé en face de la fenêtre contre toute action électrique. La tubulure latérale t communique avec la pompe et on fait le vide au point qu'il se produise à l'extérieur des étincelles de 3e dans un excitateur à boules.

Pendant les décharges, l'air s'illumine d'une lueur bleuâtre près de la fenêtre en produisant de l'ozone ; le phénomène paraît être une diffusion de rayons émis par l'aluminium.

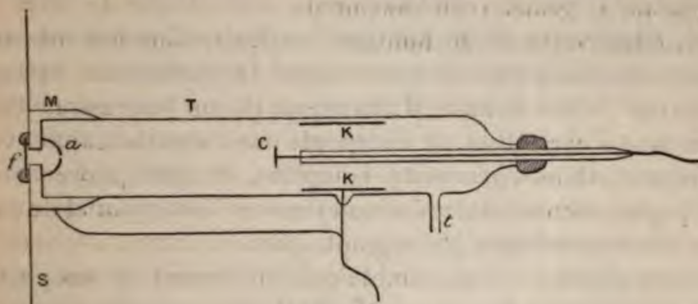


Fig. 242.

Les corps phosphorescents placés en face deviennent lumineux et avec des caractères différents de ceux qu'ils présentent sous l'action des rayons ultra-violets ; la phosphorescence du spath, par exemple, est beaucoup plus durable.

Ce rayonnement se propage en ligne droite, comme la lumière, et l'énergie des effets produits est en raison inverse du carré de la distance ; il est absorbé par les gaz en raison de leur densité absolue, quelle qu'en soit la nature, et par tous les milieux à des degrés différents ; une lame de quartz de $0^{mm},5$ d'épaisseur l'arrête, mais il traverse les feuilles métalliques minces et le verre paraît aussi transparent que l'aluminium ; il jouit encore de la propriété singulière de décharger les corps électrisés.

En collant sur la fenêtre un second tube à gaz raréfié dans lequel on a placé une fente et une plaque phosphorescente, on constate aussi que les rayons sont déviés, au moins en partie, par un champ magnétique.

Les rayons ainsi transmis dans l'air ont enfin des actions photographiques et, à ce point de vue, l'absorption exercée par différents corps est de même ordre que pour les effets de phosphorescence.

Les résultats obtenus par M. Lénard semblent se rapporter à un phénomène complexe ; ils n'ont paru d'abord, comme ils étaient dans la pensée de l'auteur, qu'un développement des recherches de M. Crookes sur les rayons cathodiques et la complication des appareils ne permettait pas de répéter facilement les expériences ; en réalité on y retrouve la plupart des faits auxquels la belle découverte de M. Röntgen a donné ensuite un si grand retentissement.

797. Découverte de M. Röntgen. — En renfermant une ampoule de Crookes dans une enveloppe de papier noir, opaque aux rayons ultra-violets, M. Röntgen (¹) eut l'occasion d'observer que l'excitation de l'ampoule était encore capable de provoquer, dans l'obscurité complète, la phosphorescence d'un papier recouvert de platino-cyanure de baryum et de produire des impressions photographiques.

L'ampoule de Crookes émet donc au travers de ses parois des rayons particuliers, que M. Röntgen a appelés rayon X, et qui se distinguent des rayonnements ordinaires par un grand nombre de propriétés.

Aucune considération antérieure, par exemple, ne permettait de prévoir l'ordre d'opacité ou de transparence des différents corps pour ces rayons. Ils traversent facilement une plaque d'aluminium de 15^{mm} d'épaisseur, une planche de bois, un livre de 1000 feuillets, tandis qu'ils sont arrêtés par des plaques de plomb ou de platine. Les muscles sont transparents et les os relativement opaques, de sorte que le squelette de la main se dessine nettement dans l'ombre projetée sur un écran phosphorescent ou sur une plaque photographique. C'est cette expérience surtout, dont la chirurgie et la médecine ont tiré profit, qui a popularisé la découverte.

Certaines propriétés étaient encore plus inattendues. Ainsi, les rayons X n'éprouvent aucune réfraction appréciable dans des prismes d'eau, de sulfure de carbone, d'aluminium ou d'ébonite ; ils ne subissent pas la réflexion régulière, ni la diffraction, et on n'a pu manifester aucun phénomène de polarisation ou d'interférence. A l'inverse des rayons cathodiques dont ils proviennent, ils ne sont pas déviés par un champ

(¹) W. C. Röntgen, *Sitzb. der Würzburer, phys. méd. Gesell.* Déc. 1895. — *Journ. de Phys.* [3], t. V, p. 101 et 189 ; 1896.

magnétique, mais ils sont encore capables de décharger un corps électrisé. Ils paraissent enfin avoir pour origine la surface du tube frappée par les rayons cathodiques et leur action est ensuite en raison inverse du carré de la distance.

M. Röntgen était donc autorisé à conclure que les rayons X sont d'une nature spéciale, indépendante des rayons cathodiques qui leur ont donné naissance. L'absence de diffraction sensible conduit à penser que la longueur d'onde de ce rayonnement particulier est très petite par rapport à celle des rayons lumineux ou ultra-violets ; certaines formules de dispersion, étendues à ce cas extrême, ne seraient pas non plus incompatibles avec l'absence de réfraction.

798. Propriétés des rayons X. — Cette étude nouvelle a donné lieu à un grand nombre de travaux, dont nous nous bornerons à signaler les principaux résultats.

Un premier fait bien établi est que le rayonnement a son origine sur les corps frappés par les rayons cathodiques, soit que ces corps deviennent phosphorescents, comme les parois de l'ampoule de verre, soit qu'ils ne manifestent aucune propriété analogue. Pour diminuer l'étendue de la source rayonnante, on a d'abord terminé la cathode par une calotte sphérique dont le centre de courbure est sur la surface de l'ampoule, mais cette disposition a l'inconvénient de provoquer assez vite la fusion du verre. Il est plus avantageux de placer une lame de platine ou d'aluminium au centre de courbure de la cathode. Cette lame reçoit les rayons cathodiques sous une inclinaison de 45° et son maximum de rayonnement total a lieu aussi dans une direction voisine de 45°. Avec des lames de très petites dimensions, la source peut être assez réduite pour donner des images très nettes ; c'est ce que l'on appelle des tubes *focus*.

Des observations très précises, sur les photographies obtenues par des rayons X ayant traversé deux fentes successives, montrent que l'élargissement de l'image par diffraction serait manifeste si la longueur d'onde était seulement de $0^{\mu},005$ ou 40 fois plus petite que celle des dernières radiations ultra-violettes. La propagation rectiligne est donc beaucoup plus pure que pour la lumière.

On n'a pas constaté non plus de réflexion appréciable. Si

certaines substances, telles que le spath fluor, sont capables de renforcer l'image quand on les place derrière la plaque photographique, comme si elles réfléchissaient les rayons qui ont traversé la plaque, il est probable que ce résultat est un effet secondaire et doit être attribué à la fluorescence développée par les rayons eux-mêmes.

Les tentatives faites pour manifester la réfraction ou la polarisation n'ont pas réussi davantage; il semble établi que, si la réfraction existe, la différence de l'indice avec l'unité est inférieure à un millionième.

L'absorption exercée par les gaz est encore proportionnelle à la masse rencontrée par les rayons, et quelle que soit la nature du gaz, comme dans l'expérience de M. Lénard.

Les rayons X ne sont pas formés de radiations homogènes, car les rapports de transparence de différents corps, par exemple des muscles et des chairs, varient beaucoup avec l'intensité des décharges dans les ampoules.

De même, si l'on fait tomber les rayons sur un électroscope, on peut apprécier leur intensité par la vitesse de décharge et évaluer l'absorption d'une plaque interposée comme écran par le ralentissement de la décharge. Or, quand on interpose ainsi plusieurs lames ou que l'on augmente leur épaisseur, l'absorption exercée par les premières couches est manifestement plus grande; il se fait une sélection des rayons plus transmissibles, analogue à celle que produisent les milieux colorés sur la lumière blanche.

Les phénomènes de décharge électrique doivent être examinés avec plus de détails.

Il n'est pas nécessaire d'abord que ces rayons X frappent directement un corps électrisé pour le décharger; lorsqu'ils traversent dans un gaz le champ électrique situé entre deux conducteurs, sans toucher aucun d'eux, ils provoquent des échanges d'électricité plus ou moins rapides et ramènent finalement les conducteurs au même potentiel, ou du moins la différence de potentiel finale n'est pas supérieure à celle qui résulte des effets de contact. Tout se passe comme si les lignes de force étaient devenues en partie conductrices.

Les gaz ainsi traversés par les rayons X conservent même, d'une manière temporaire, la propriété de décharger les corps

électrisés sur lesquels on les dirige et qui sont situés en dehors de toute action directe.

Les décharges n'ont pas lieu au travers des diélectriques solides ou liquides. Supposons, en effet, qu'on enferme un corps électrisé A dans une enceinte conductrice A' perméable aux rayons et que l'intervalle soit rempli par un diélectrique tel que la paraffine ; l'action des rayons sur le système est incapable d'égaliser les potentiels de A et de A'. Aucun échange d'électricité ne se produit que si une partie au moins des lignes de force est située dans un gaz.

La méthode la plus simple pour étudier ce phénomène consiste donc à faire passer les rayons dans le champ électrique uniforme compris entre deux plans conducteurs parallèles. Dans ce cas, le débit d'électricité croît d'abord assez rapidement pour atteindre un régime régulier, indépendant de la différence de potentiel et en raison inverse du carré de la distance à la source, au moins quand cette distance n'est pas assez grande pour que l'absorption par le gaz intervienne. Ce débit régulier est proportionnel à la pression du gaz et indépendant de sa température.

En d'autres termes, les échanges d'électricité sont proportionnels à l'intensité du rayonnement, à la masse de gaz rencontrée et à la température absolue.

L'interprétation la plus directe de ces résultats est d'admettre que les rayons X libèrent en chaque point, par dissociation des molécules gazeuses, des quantités d'électricité égales et contraires capables de se mouvoir sous l'influence du champ. Cette hypothèse permet de concevoir que les gaz conservent la propriété de provoquer les décharges jusqu'à ce que les effets de dissociation aient disparu.

Quant aux rayons X eux-mêmes, différents physiciens ont supposé, sans raison bien plausible, qu'ils sont dus à des vibrations longitudinales.

Leur action photographique semble indiquer plutôt qu'ils correspondent à des vibrations transversales, comme celles de la lumière, mais de longueurs d'onde beaucoup plus courtes. M. H. Becquerel a reconnu aussi qu'il existe une sorte de continuité entre les deux ordres de phénomènes. Certains corps phosphorescents, en particulier tous les sels d'urane.

émettent des radiations invisibles, capables de produire des impressions photographiques après avoir traversé des feuilles minces d'aluminium et de cuivre, et pouvant aussi décharger un électroscope, même lorsque l'air qu'ils ont traversé est ensuite insufflé sur l'instrument. Leur action est donc comparable, quoique plus faible, à celle des rayons X. Ces radiations obscures paraissent éprouver une véritable réflexion et présenteraient ainsi des propriétés intermédiaires.

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES.

799. Propagation. — L'analogie étroite des oscillations électriques et de la lumière a été vérifiée par un grand nombre d'expériences dont nous devons encore indiquer les principaux résultats. On a vu que, dans le phénomène de Hertz [1], les vibrations produites par l'excitateur sont généralement de nature complexe [2] et on peut toujours les représenter par une suite de termes de périodes différentes. La structure plus simple du résonateur lui impose une période mieux définie; il entre d'autant plus facilement en vibration que cette période correspond plus exactement à celle du terme prédominant dans les vibrations primitives. En raison de cette différence, l'amortissement est très rapide pour les vibrations de l'excitateur et plus lent pour celles du résonateur.

Hertz avait montré aussi que les vibrations se propagent beaucoup plus facilement le long d'un fil métallique situé devant l'excitateur. Si le fil est très long, il se partage en concamérations régulières; l'extrémité est un ventre électrostatique, ou un nœud de courants, et la distance des nœuds successifs est la moitié de la longueur d'onde. Le résonateur placé en face d'un nœud de courant ne vibre pas et il reste silencieux si l'on coupe le fil à l'endroit d'un autre nœud.

Deux ventres électrostatiques successifs ont toujours des potentiels égaux et de signes contraires; en comptant ces ventres P_0, P_1, P_2, P_3, ... à partir de l'extrémité, leurs poten-

(1) H. Hertz, *Wied. Ann.* t. XXI, XXXIV et XXXVI.
(2) Sarrazin et L. De la Rive, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. CX, p. 72; 1890.

tentiels sont égaux de deux en deux et la distance des ventres de même espèce est un nombre entier de longueurs d'onde.

Si l'on emploie deux fils parallèles reliés respectivement à des plateaux en regard des deux armatures de l'excitateur, les potentiels des points correspondants P_0 et Q_0, P_1 et Q_1, ... sont de signes contraires. En faisant communiquer le résonateur avec deux points de parités différentes sur les deux fils, P_0 et Q_1 par exemple, on n'obtient aucune étincelle et la distance Q_0Q_1 est la moitié d'une longueur d'onde (1).

On a employé encore divers autres procédés d'observation pour mettre en évidence la nature du phénomène, mais la difficulté de définir la période ne permettait pas d'en déduire exactement la vitesse de propagation. Le progrès apporté par M. Blondlot (2) fut d'employer un résonateur formé de deux plateaux réunis par un cadre rectangulaire. On peut alors calculer le coefficient de self-induction L de l'appareil. En désignant par C sa capacité électromagnétique, la période est $T = 2\pi\sqrt{CL}$. Pour une longueur d'onde λ, la vitesse de propagation V est donc

$$V = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

On peut calculer la valeur de C par la surface S des plateaux et leur distance e, d'où résulte

$$C = \frac{1}{\mathbf{v}^2}\frac{S}{4\pi e}, \qquad V = \mathbf{v}\lambda\sqrt{\frac{e}{\pi S L}}.$$

L'expérience déterminerait ainsi le rapport de V à $\mathbf{v}$. Pour n'emprunter aucune quantité étrangère, M. Blondlot mesure directement la capacité C par les courants intermittents (**742**); la moyenne de plusieurs séries d'expériences, avec des appareils où la longueur d'onde variait de $8^m,94$ à $35^m,36$, conduit à la valeur $V = 3,0285.10^{10}$ (3).

Ce nombre est supérieur de $\frac{1}{100}$ environ à la vitesse de la

(1) J. J. Thomson, *Proceed. L. R. S.*, t. XLVI, p. 1; 1889.
(2) R. Blondlot, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXIII, p. 628; 1891. — *Journ. de Phys.* [2], t. X, p. 549; 1891.
(3) E. Mascart, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXVIII, p. 277; 1894.

lumière; la différence peut être attribuée à la mesure des capacités ou au calcul des coefficients d'induction.

Comme la nature des fils conducteurs n'a pas d'influence, on doit en conclure que la propagation se fait réellement dans l'air le long de ces conducteurs.

Par une seconde méthode, M. Blondlot (¹) mesure directement la vitesse à l'aide du miroir tournant. Les armatures intérieures de deux bouteilles de Leyde cylindriques communiquent avec les électrodes secondaires d'une bobine d'induction et avec les boules A et A′ d'un excitateur (fig. 243). Les

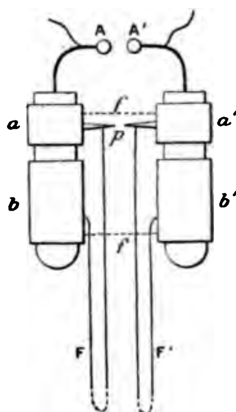


Fig. 243.

armatures extérieures sont formées de deux parties, les unes *a* et *a′* de petites dimensions, les autres *b* et *b′* plus larges, réunies par des fils de coton *f* de conductibilité médiocre, mais suffisante pour que les armatures soient maintenues au même potentiel pendant la charge.

Les armatures *a* et *a′* communiquent, d'une part, avec un excitateur à pointes *p* et, d'autre part, avec les armatures *b* et *b′* par des conducteurs en cuivre F et F′ de très grande longueur. Au moment de la décharge en AA′, les fils de coton *f* ne sont plus efficaces; les armatures *aa′* donnent d'abord une étincelle en *p* et, au bout de quelque temps, les armatures *bb′* fournissent au même point une seconde étincelle affaiblie par la propagation le long des fils FF′; c'est précisément pour

(¹) R. Blondlot, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXVII, p. 543; 1893.

›mpenser en partie la différence de ces deux étincelles qu'on ›nne une plus grande surface à ces armatures.

Dans un miroir tournant, on voit donc au point p deux ıages successives correspondant à la même décharge. En les rojetant sur une plaque photographique, la répétition du hénomène fournit une série de doubles images dont l'écart ermet de calculer la vitesse de propagation. La période de ›tation du miroir était déterminée par la comparaison du ›n d'axe avec les vibrations d'un monocorde. En donnant aux ls FF' des longueurs de 1029 et 1821 mètres, on a obtenu, our cette vitesse, $2,964.10^{10}$ et $2,98.10^{10}$, nombres très voiins de la vitesse de la lumière. On doit remarquer encore que influence réciproque des fils d'aller et de retour, qui sont ortés par des poteaux télégraphiques et assez rapprochés l'un e l'autre, tend à ralentir la propagation.

800. Pouvoirs inducteurs spécifiques. — La détermination es pouvoirs inducteurs par les oscillations très rapides pré›nte un intérêt spécial. Le contrôle le plus direct de la théoe est fourni par ce fait, que la distance des nœuds le long 'un fil ne change pas quand on plonge le fil avec le résona›ur dans un autre milieu (**452**).

Toutefois cette disposition des expériences ne s'applique uère qu'aux liquides, tandis que la plupart des résultats obnus par les autres méthodes ont donné pour les pouvoirs ıducteurs des nombres notablement trop élevés.

M. Thomson [1] détermine les valeurs λ et λ' de la longueur onde des oscillations dues à la décharge d'un condensateur plateaux, suivant que le diélectrique est formé par une couıe d'air ou une lame de verre de même épaisseur. La vitesse › propagation étant la même dans les deux cas, ainsi que le ›efficient de self-induction du circuit, les longueurs d'onde et λ sont proportionnelles aux périodes T' et T, et celles-ci à racine carrée des capacités C' et C; on a donc

$$\frac{C'}{C} = \left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2.$$

Le rapport des capacités C' et C représente le pouvoir in-

(1) J.-J. THOMSON *Proceed. L. R. S.*, t. XLVI, p. 292; 1889.

ducteur K du verre. Avec des oscillations dont la fréquence était de 25.10^6, on a ainsi obtenu $K = 2,7 = (1,65)^2$. L'indice moyen de réfraction du verre est voisin de 1,52; le pouvoir inducteur se rapproche donc beaucoup du carré de l'indice de réfraction, à mesure que les oscillations sont plus rapides.

Cette conclusion ayant été mise en doute par différents physiciens (¹), M. Blondlot (²) emploie, avec des oscillations très rapides, une méthode de compensation qui ne fait intervenir aucune formule accessoire.

Deux plateaux conducteurs AA′ et BB′ (fig. 244), le second de dimensions moindres, symétriques par rapport à une même

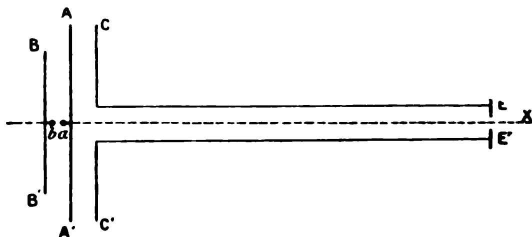


Fig. 244.

droite X, sont munis de boules *a* et *b*, pour la production des décharges; le plateau AA′ est relié au sol, le plateau BB′ à l'une des électrodes du fil secondaire d'une bobine dont la seconde électrode communique également au sol. Lorsque la bobine fonctionne, le torrent d'étincelles entre *a* et *b* correspond à des oscillations dont la fréquence est de l'ordre de 25.10^6. Le plateau A fait écran vers la droite pour toute action électrique à variation lente, mais cet espace est le siège de perturbations périodiques dues à la décharge.

Deux plaques C et C′, symétriques par rapport à la droite X et à la même distance *e* de A et de A′, communiquent par des conducteurs fixés à leurs bords avec des pointes en charbon EE′ dont la distance très petite peut être réglée par une vis micrométrique. Dans ces conditions, aucune étincelle ne se manifeste entre les charbons, par raison de symétrie.

(¹) E. Lecher, *Wied. Ann.*, t. XLII, p. 142; 1891.
(²) R. Blondlot, *Journ. de Phys.*, [2], t. X, p. 197; 1891.

...ion est maximum quand la vibration incidente ... aux fils, ce qui démontre la polarisation.

... et Howard (¹) ont ainsi utilisé une lentille de ...rai) à faces hyperboliques qui permet de con... vibrations électriques.

... disposant de longueurs d'onde très courtes, pou... des surfaces dont les dimensions ne dépassent ... dont on fait usage en optique.

... la réflexion sur des blocs prismatiques, afin d'é... ...ence de la seconde surface. Quel que soit l'azi... ...ation incidente, la composante de la vibration ... le second azimut principal est nulle pour une ...ence I qui correspond à l'angle de polarisation. ...ce était comprise entre 60° et 64° pour le *soufre*, ...° pour la *paraffine* ; le calcul donnerait respec... ...' avec $n = 1,87$ et 55°2' avec $n = 1,43$.

... varier l'azimut de la polarisation incidente et ... l'azimut de polarisation réfléchie par le rapport ...santes principales, on vérifie encore avec un degré ... très satisfaisant les formules de Fresnel relatives ...ion vitrée (**454**).

... de même pour la réflexion totale. Si l'on place à ...x prismes de 45°, disposés comme les moitiés d'un ...ibrations ne se transmettent pas au travers de ce ...orsque les faces hypoténuses sont notablement ...une de l'autre, mais elles se propagent dès que ...nce est voisine d'une demi-longueur d'onde. C'est ...ation du phénomène de la tache noire observée par ...ns la réflexion totale.

...terons encore, sans pouvoir y insister, diverses ex... sur les variations d'intensité dans la réflexion inté... ...r la production de vibrations circulaires par les ...pèdes de Fresnel, le déplacement latéral et l'ab... ...ar les lames à faces parallèles, la réflexion métal... polarisation elliptique produite par transmission au une plaque de bois, etc.

...areils de M. Lebedew lui permettent d'employer des

(¹) ...odge et L. Howard, *Ph. Mag.* [5], t. XXVII, p. 48; 1889.

monture qui trav… pas 2°. Il a pu ainsi
tion autour de l… une double réfraction
direction des … ux qui correspondent à
résonateur qui … *ol analyseur* et des pla-
la bissectrice … illations électriques.
pendiculaire … — Les effets de diffraction

Les élim… aucoup les expériences si
l'amplitud… rs d'onde assez courtes.
dans de… n excitateur et d'un résona-
des vib… des écrans en anneaux cir-
des azi… ables, il isole sur la surface

Si l… les différentes zones d'Huy-
la dir… dans l'intensité des vibrations
ou … observe aussi sur la ligne de
aux … ma ou de minima, suivant que
vib… bre impair ou pair de zones
l'a… corps opaque terminé par un
m… les maxima et des minima d'in-
l… issante. Il en est de même pour
… tige opaque.

… servé les interférences par les
… ration en avant d'un miroir plan
… taché à imiter la plupart des phé-
… oirs de Fresnel, le biprisme, l'in-
… irectes avec celles qui sont réflé-
… retard produit par le déplacement
… esnel ou par l'interposition d'une
… indice de réfraction déduit de cette
… pour la paraffine et 1,87 pour le
… soufre est plus faible que celle
… omène optique, comme on pouvait le
… ment de longueur d'onde.

… ames relativement minces a permis de
… les anneaux de Newton, à centre blanc

TROISIÈME PARTIE. — MESURES MAGNÉTIQUES

CHAPITRE PREMIER

CONSTANTES D'AIMANTATION

DES AIMANTS

804. Couples directeurs. — On a supposé jusqu'à présent, dans plusieurs applications, que le magnétisme d'un aimant reste invariable, mais on doit souvent tenir compte de l'aimantation temporaire due à différentes circonstances.

Considérons un aimant mobile autour d'un axe dans un champ uniforme. Soit V son volume, A la composante perpendiculaire à l'axe de l'aimantation moyenne, $M=AV$ le moment magnétique rigide correspondant et H la composante efficace du champ.

Si l'aimant est dévié de l'angle α, et que l'intensité du champ ait une valeur modérée, on peut admettre que l'aimantation induite se compose de deux parties, l'une A_1 longitudinale et l'autre A_2 transversale, respectivement proportionnelles aux composantes $H\cos\alpha$ et $H\sin\alpha$; on écrira donc

$$A_1=f_1 H\cos\alpha, \qquad A_2=f_2 H\sin\alpha.$$

Les coefficients f_1 et f_2 d'aimantation moyenne varient avec

la forme de l'aimant et la nature de l'acier; il est évident d'ailleurs que l'aimantation longitudinale est relativement plus facile et qu'on a toujours $f_1 > f_2$.

On voit aussi que l'aimantation induite équivaut à deux autres, l'une $f_2 H$ parallèle au champ et l'autre $(f_1 - f_2) H \cos\alpha$ longitudinale.

En posant $f = f_1 - f_2$, l'aimantation apparente est donc $A + fH\cos\alpha$ et le couple produit par l'action du champ

$$V(A + fH\cos\alpha) H \sin\alpha = MH\left(1 + f\frac{H}{A}\cos\alpha\right)\sin\alpha.$$

Lorsque les déviations restent très faibles, comme dans le cas des oscillations, on peut remplacer $\cos\alpha$ par l'unité. Si le barreau est porté par un fil de torsion négligeable et que K soit le moment d'inertie du système mobile, le nombre n d'oscillations simples par seconde, toutes réductions faites pour l'amplitude et l'amortissement, donne la relation (**293**)

$$(1) \qquad n^2\pi^2 K = MH\left(1 + f\frac{H}{A}\right) = MH(1 + x).$$

A part le terme x de correction, cette expérience fournit une méthode très simple pour comparer deux champs différents, comme le faisaient Biot et Savart (**315**); elle permet aussi de déterminer en valeur absolue le couple directeur MH relatif à l'aimantation rigide.

Nous verrons plus loin comment il est possible d'évaluer le coefficient f. Pour un barreau d'acier à section carrée dont la longueur est 10 fois le côté, on a environ $f_1 = 0{,}98$ et $f_2 = 0{,}20$; par suite, $f = f_1 - f_2 = 0{,}78$. Si la valeur moyenne A de l'aimantation rigide est égale à 200, valeur qu'on ne dépasse guère dans les aimants ordinaires, et que les oscillations soient produites par la composante horizontale du champ terrestre, qui est voisine de 0,195 à Paris, il en résulte

$$x = f\frac{H}{A} = 0{,}78\,\frac{0{,}195}{200} = 0{,}00076.$$

Dans ce cas, la correction est inférieure à $\frac{1}{1000}$, mais elle

deviendrait très sensible avec des champs plus intenses et une moindre aimantation rigide.

Le rapport des moments magnétiques M et M' de deux barreaux s'obtiendrait en observant leurs oscillations dans un même champ; on a ainsi la relation approchée

$$(2)\qquad \frac{M}{M'} = \frac{K}{K'} \cdot \frac{n^2}{n'^2}.$$

Les moments d'inertie K et K' des deux systèmes pourront être déterminés par les dimensions et le poids des barreaux ou par une expérience de comparaison (546).

On éliminera cette mesure accessoire en montant les deux aimants sur le même équipage, avec leurs axes magnétiques parallèles, d'abord de même sens, puis de sens contraires. Les moments magnétiques du système mobile étant alors $M + M'$ et $M - M'$, les nombres d'oscillations n et n' correspondants donnent

$$\frac{M + M'}{n^2} = \frac{M - M'}{n'^2}, \qquad \frac{M}{M'} = \frac{n^2 + n'^2}{n^2 - n'^2}.$$

Si les axes magnétiques des aimants font un angle θ, il suffira encore d'observer la déviation α de l'un d'eux par rapport au champ pour la position d'équilibre; on a, en effet,

$$(3)\qquad HM \sin\alpha = HM' \sin(\theta - \alpha), \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\alpha}.$$

Dans le cas où les barreaux sont orientés à angle droit, il reste simplement [1]

$$M' = M \operatorname{tang} \alpha.$$

Il est à remarquer toutefois que des aimants trop rapprochés réagissent l'un sur l'autre, ce qui contribue à augmenter l'aimantation temporaire. La réaction est plus faible, sans être négligeable, quand les axes sont à angle droit.

Une autre méthode consiste à porter l'aimant par une balance de torsion, unifilaire ou bifilaire. L'appareil mobile étant

(1) E. Bouty, *Ann. de l'École Norm. Sup.* [2], t. IV, p. 9; 1875.

muni d'une aiguille de repère ou d'un miroir réflecteur, on le charge d'abord d'un poids égal à celui du barreau et on règle la suspension de manière que la substitution de l'une des charges à l'autre ne modifie pas l'équilibre. L'axe magnétique du barreau est alors parallèle au méridien, dans la position *naturelle* ou *inverse*, suivant que les deux directions sont de même sens ou de sens contraires.

En désignant par C le coefficient de torsion du système, le couple directeur, dans les deux cas, est $C + MH$ et $C - MH$; cette dernière quantité doit être positive pour que l'équilibre soit stable. Les nombres n et n' d'oscillations correspondants donnent alors

$$(4) \qquad \frac{C+MH}{n^2} = \frac{C-MH}{n'^2}, \qquad MH = C\,\frac{n^2-n'^2}{n^2+n'^2} = Cp.$$

Le couple directeur MH est ainsi déterminé par le coefficient C et le nombre p que fournit l'expérience.

Dans le cas actuel, on doit admettre que l'aimantation induite est plus faible pour la position inverse, de sorte que les moments magnétiques apparents peuvent être représentés par $M(1+x)$ et $M(1-x')$, avec $x' < x$.

On déduit alors des expériences d'oscillations, en remarquant que les termes de correction sont très petits,

$$\frac{MH}{C}\left(1+\frac{x-x'}{2}\right) = p\left(1+\frac{MH}{C}\,\frac{x+x'}{2}\right) = p\left(1+p\,\frac{x+x'}{2}\right),$$

$$\frac{MH}{C} = p\left(1+p\,\frac{x+x'}{2} - \frac{x-x'}{2}\right).$$

Quand on fait osciller un aimant porté par un fil de soie ou un paquet de fils, les effets de torsion interviennent en partie. Pour en tenir compte, on remplace l'aimant par un barreau de cuivre de même poids et de même moment d'inertie. En désignant par n et n_0 les nombres d'oscillations relatives à l'aimant et au barreau de cuivre, on a

$$\pi^2 K = \frac{C + MH(1+x)}{n^2} = \frac{C}{n_0^2}.$$

Le nombre n_0 ayant été déterminé par expérience, l'équa-
on (1) devra être remplacée par

$$MH(1+x) = (n^2 - n_0^2)\pi^2 K. \quad)'$$

Supposons enfin que l'aimant ait été réglé d'abord dans sa osition naturelle et qu'on donne au système une torsion θ. 'aimant est dévié d'un angle α et prend une position *oblique* u champ [1]. Abstraction faite de l'aimantation induite, la ondition d'équilibre devient, suivant que la suspension est nifilaire ou bifilaire,

$$\left\{\begin{array}{l} MH\sin\alpha = C(\theta - \alpha), \\ MH\sin\alpha = C\sin(\theta - \alpha). \end{array}\right. \quad))$$

On dit que l'aimant est dans une position *transverse* quand ι déviation α est de 90°. Dans ce cas particulier, l'équilibre ne épend plus que du magnétisme rigide, puisque l'aimantation ıduite longitudinale est nulle et que l'aimantation transver- ale ne donne pas de couple.

C'est encore une méthode pour déterminer le couple direc- eur MH ou le rapport des moments magnétiques.

805. Champ magnétique d'un aimant. — Considérons un imant rectiligne régulier, dont le milieu se trouve à l'origine les coordonnées, et prenons l'axe des x parallèle à son axe nagnétique. Désignons par X et Y les composantes du champ ›roduit à la distance R, dans une direction qui fait l'angle α ıvec l'axe magnétique, par F_n et F_t les composantes parallèle t normale au rayon vecteur R.

Lorsque l'aimant est très petit, on a (**108**)

$$F_n = 2\,\frac{M\cos\alpha}{R^3}, \qquad F_t = \frac{M\sin\alpha}{R^3};$$

$$X = F_n\cos\alpha - F_t\sin\alpha = \frac{M}{R^3}(3\cos^2\alpha - 1),$$

$$Y = F_n\cos\alpha + F_t\cos\alpha = \frac{M}{R^3}\,3\cos\alpha\sin\alpha.$$

[1] GAUSS. *Resultate aus den Beob. des Mag. Ver.*; 1837. — *Œuvres*, p. 137.

Si l'aimant a une longueur notable et qu'on puisse l'assimiler à deux masses magnétiques $\pm m$ situées à la distance $2L$ le moment magnétique est $M = 2mL$. Les distances du point considéré aux masses $+m$ et $-m$ étant r et r', le potentiel correspondant a pour expression $V = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$ et l'on a

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial R}, \qquad F_t = -\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \alpha}.$$

En posant $L = \lambda R$ et $z = \frac{2LR}{R^2 + L^2}\cos\alpha = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\cos\alpha$, il est facile d'en déduire

$$F_n = \frac{2M\cos\alpha}{R^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\left[1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{3.5}{2.4}z^2\left(\frac{2}{3} - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}z^4\left(\frac{3}{5} - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \ldots\right],$$

$$F_t = \frac{M\sin\alpha}{R^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{3.5}{2.4}z^2 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}z^4 + \ldots\right].$$

On remarquera, en particulier, que dans l'équateur de l'aimant, où $\alpha = 90°$, on a $z = 0$, $Y = F_n = 0$ et

$$-X_2 = F_t = \frac{M}{R^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le champ est alors simplement en raison inverse du cube de la distance aux pôles.

Suivant la direction de l'axe magnétique, la valeur de z est égale à $\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$. On a d'ailleurs directement

$$X_1 = \frac{m}{(R-L)^2} - \frac{m}{(R+L)^2} = \frac{m}{R^2}\left[\frac{1}{(1-\lambda)^2} - \frac{1}{(1+\lambda)^2}\right] = \frac{2M}{R^3(1-\lambda^2)^2},$$

$$X_1 = \frac{2M}{R^3}(1 + 2\lambda^2 + 3\lambda^4 + 4\lambda^6 + \ldots).$$

Les quantités qui ont été désignées par X_1 et X_2 sont les valeurs *principales* du champ de l'aimant.

806. Couple réciproque des deux aimants. — Supposons qu'un second aimant de moment M′, situé dans le même plan

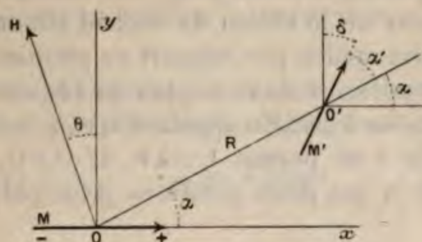


Fig. 245.

que le premier, ait son centre au point O′ (fig. 245) et que son axe magnétique fasse l'angle α' avec la droite $OO'=R$. Si ce second aimant est très court, le couple produit par le champ du premier est $M'(F_n \sin\alpha' - F_t \cos\alpha')$.

En appelant δ l'angle $90° - \alpha' - \alpha$ que fait le barreau M′ avec l'équateur du premier, le terme principal de ce couple est

$$D = \frac{MM'}{R^3}(2\cos\alpha\sin\alpha' - \sin\alpha\cos\alpha'),$$

$$D = \frac{MM'}{R^3}[(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\delta - 3\sin\alpha\cos\alpha\sin\delta].$$

Si l'on veut tenir compte des longueurs magnétiques 2L et 2L′ des deux aimants supposés réduits à leurs pôles, le couple réciproque C pourra s'exprimer par un développement en série de la forme

$$(6) \qquad C = D\left(1 + \frac{h_2}{R^2} + \frac{h_4}{R^4} + \dots\right),$$

dans lequel les numérateurs $h_2, h_4, \dots$, sont respectivement des fonctions homogènes du 2ᵉ, 4ᵉ... degré en L et L′, ne renfermant que des puissances paires de ces deux longueurs. En effet, si on change le signe de L ou de L′, ce qui revient à retourner l'un des aimants, le couple C doit conserver la même valeur au signe près.

Si l'aimant a une longueur notable et qu'o... ler à deux masses magnétiques $\pm m$ situées... le moment magnétique est $M = 2mL$. Les... considéré aux masses $+m$ et $-m$ étant...

correspondant a pour expression $V = m$... ...c'est-à-dire... ...eur, l'angle... ...valeurs cor... ...R, les couples...

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial R}, \qquad F_t \ldots$$

En posant $L = \lambda R$ et $z = \frac{2LR}{R^2 + \ldots}$ ...pales, sont facile d'en déduire

$$F_n = \frac{2M\cos\alpha}{R^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\Big[1 - \lambda^2 \ldots - 3\lambda^4 \ldots \sin^2 \ldots + 21 \sin^4 \ldots\Big],$$

$$+ 3 \ldots \sin^2 \ldots + \frac{15}{8}\lambda^4$$

$$F_t = \frac{M\sin\alpha}{R^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\Big[1 \ldots - \ldots \sin^2 \ldots - 21 \sin^4 \ldots\Big].$$

On remarquera, en p... mant, où $\alpha = 90°$, on a ... termes du second ou ... λ et λ, on mettra

$$-X_2 = I \ldots$$

$$\ldots - n - q \ldots$$

Le champ est ... de la distance au... ... $- n - q_2$).

Suivant la dir...

égale à $\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$. ... peut être l'importance ... d'abord que le se... ... par rapport à la dis... ... négligeable; ces termes

$$X_1 = \frac{m}{(R - L)\ldots}$$

...ois la longueur 2L du pre-
... il en résulte

$$q_1 = 3\lambda^4 = 0,000732;$$

$$q_2 = \frac{15}{8}\lambda^4 = 0,000457.$$

...que perpendiculaires entre eux, on
... angles δ dans les termes de correc-
... on a alors

$$q_1 = 3\lambda^4\left(1 - 5x^2 + \frac{15}{8}x^4\right);$$

$$q_2 = \frac{15}{8}\lambda^4(1 - 12x^2 + 8x^4).$$

... termes du quatrième ordre soient nuls, il faut
... x des longueurs magnétiques soit la racine po-
... petite que l'unité, de l'une des équations

$$1 - 5x^2 + \frac{15}{8}x^4 = 0, \qquad x = \frac{1}{2,15} = 0,465.$$

$$1 - 12x^2 + 8x^4 = 0, \qquad x = \frac{1}{3,36} = 0,298.$$

...faisant $x = 0,5$ on a $p_2 = 0$ et le terme q_1 est très petit.
...la même valeur $\lambda = \frac{1}{8}$, il vient alors

$$p_1 = 0,019531, \qquad q_1 = -0,000097;$$

$$p_2 = 0, \qquad q_2 = -0,000685.$$

...in, si les aimants sont presque parallèles, on remplacera
...us des angles δ par l'unité, ce qui donne

$$= 2\lambda^2(1 + 6x^2), \qquad q_1 = 3\lambda^4(1 + 20x^2 + 15x^4);$$

$$= -\frac{3}{2}\lambda^2(1 + 11x^2), \qquad q_2 = \frac{15}{8}\lambda^4(1 + 34x^2 - 496x^4).$$

Les numérateurs h peuvent être calculés, soit par les a
des composantes F_n et F_t du premier aimant sur les
pôles du second, soit directement par les quatre acti
pôles deux à deux.

Lamont ([1]) a poussé le calcul jusqu'aux termes du
degré pour les cas où le milieu du second aimant
des positions principales par rapport au premier.
sur la ligne des pôles ou dans le plan de l'équat
étant égal à zéro ou à 90°. En appelant δ_1 et δ_2 les
respondantes de δ et posant $L = \lambda R$, $L' = \lambda' \mathrm{l}$
C_1 et C_2 relatifs à ces deux positions princi

$$C_1 = \frac{2MM'}{R^3} \cos\delta_1 \Big[1 + 2\lambda^2 - 3\lambda'^2 (1 - 5 \sin^2 \delta_1$$

$$- 15\lambda^2\lambda'^2 (1 - 5 \sin^2\delta_1) + \frac{45}{8} \lambda'^4 (1 - 14$$

$$C_2 = -\frac{MM'}{R^3} \cos\delta_2 \Big[1 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{3}{2} \lambda'^2 (4 - 1$$

$$- \frac{15}{4} \lambda^2\lambda'^2 (6 - 23 \sin^2\delta_2) + 15\lambda'^4 (1$$

Désignant par p_1 et p_2 ou q_1 et q
du quatrième ordre en fonction des
ces expressions sous la forme

$$(7) \quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{2MM'}{R^3} \cos\delta_1 (\\ C_2 = -\dfrac{MM'}{R^3} \cos \end{cases}$$

Il est nécessaire d'exam
de ces termes de correcti
cond aimant soit extrêm
tance R, auquel cas le rap
sont alors indépendants d

([1]) J. Lamont, *Handbuch des*

Si la distance R est égale à 4 fois la longueur 2L du premier aimant, par exemple, ou $\lambda = \frac{1}{8}$, il en résulte

$$p_1 = 2\lambda^2 = 0{,}031\,250, \qquad q_1 = 3\lambda^4 = 0{,}000\,732;$$

$$p_2 = -\frac{3}{2}\lambda^2 = -0{,}023\,437, \qquad q_2 = \frac{15}{8}\lambda^4 = 0{,}000\,457.$$

Si les aimants sont presque perpendiculaires entre eux, on peut négliger les sinus des angles δ dans les termes de correction. En posant $x = \frac{L'}{L} = \frac{\lambda'}{\lambda}$, on a alors

$$p_1 = 2\lambda^2\left(1 - \frac{3}{2}x^2\right), \qquad q_1 = 3\lambda^4\left(1 - 5x^2 + \frac{15}{8}x^4\right);$$

$$p_2 = -\frac{3}{2}\lambda^2(1 - 4x^2), \qquad q_2 = \frac{15}{8}\lambda^4(1 - 12x^2 + 8x^4).$$

Pour que les termes du quatrième ordre soient nuls, il faut que le rapport x des longueurs magnétiques soit la racine positive, plus petite que l'unité, de l'une des équations

$$1 - 5x^2 + \frac{15}{8}x^4 = 0, \qquad x = \frac{1}{2{,}15} = 0{,}465.$$

$$1 - 12x^2 + 8x^4 = 0, \qquad x = \frac{1}{3{,}36} = 0{,}298.$$

En faisant $x = 0{,}5$ on a $p_2 = 0$ et le terme q_1 est très petit. Pour la même valeur $\lambda = \frac{1}{8}$, il vient alors

$$p_1 = 0{,}019\,531, \qquad q_1 = -0{,}000\,097;$$

$$p_2 = 0, \qquad q_2 = -0{,}000\,685.$$

Enfin, si les aimants sont presque parallèles, on remplacera les sinus des angles δ par l'unité, ce qui donne

$$p_1 = 2\lambda^2(1 + 6x^2), \qquad q_1 = 3\lambda^4(1 + 20x^2 + 15x^4);$$

$$p_2 = -\frac{3}{2}\lambda^2(1 + 11x^2), \qquad q_2 = \frac{15}{8}\lambda^4(1 + 34x^2 - 496x^4).$$

Dans ce cas, q_1 est positif et q_2 s'annule pour $x = 0,3$
Avec $x = 0,5$ et $\lambda = \frac{1}{8}$, on aurait

$$p_1 = +0,078125, \qquad q_1 = +0,005078;$$
$$p_2 = -0,087898, \qquad q_2 = -0,009825.$$

Ces calculs ne sont d'ailleurs qu'une approximation et
peuvent être utilisés directement dans la pratique, parce qu
l'action des aimants n'est pas réductible à celle de leurs pôle
d'autre part, même pour des barreaux semblables, la distan
des pôles n'est pas proportionnelle à la longueur des bar
reaux. Il est manifeste, en tous cas, que les termes du qua
trième ordre restent très petits lorsque le second aimant es
dans une position principale du premier et que leurs direction
sont presque rectangulaires.

807. Déviation dans un champ. — Supposons que le secon
aimant soit mobile autour d'un axe perpendiculaire au plan
de la figure et placé dans un champ uniforme dont la compo

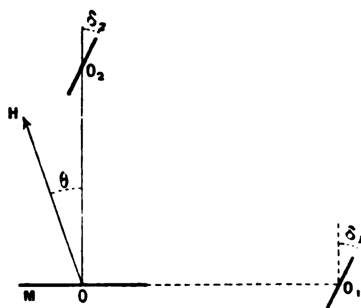
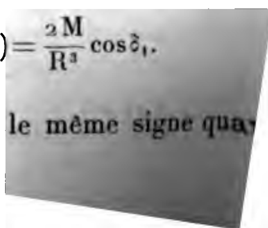


Fig. 246.

sante efficace H (fig. 246) fait l'angle θ avec l'équate
premier barreau.

Pour la première position principale, le barreau m
étant en O_1, on aura ainsi, à part les termes de correc



$$H \sin(\theta_1 + \delta_1) = \frac{2M}{R^3} \cos \delta_1.$$

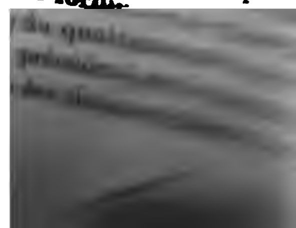
Pour que l'angle δ conserve le même signe qua

positio

tenir com

premier

a form



mination englobe une partie notable de la correction qui correspondrait au terme suivant.

Supposons d'abord que l'angle δ n'entre pas dans les corrections, ce qui a lieu en particulier pour la méthode des sinus. Soit u la valeur de $\tang\delta$ ou de $\sin\theta$ relative à la distance R pour l'une des équations (8), u' la valeur relative à la distance plus grande R', p et p' les termes de correction correspondants. Comme ces termes sont en raison inverse de la distance, si l'on pose $R = \rho R'$, il en résulte $p' = p\rho^2$.

On a alors

$$r = \frac{R'^3 u'}{R^3 u} = \frac{1+p'}{1+p} = \frac{1+p\rho^2}{1+p},$$

$$(9) \qquad p = \frac{1-r}{r-\rho^2}.$$

Le rapport r étant connu par la mesure des distances et celle des quantités u et u', l'équation (9) détermine le terme p.

Pour simplifier le raisonnement, on peut reporter toutes les erreurs expérimentales sur la valeur de u', ce qui revient à supposer que les quantités R, R' et u sont connues exactement. L'erreur dp correspondant à une erreur $dr = \frac{1}{\rho^3}\frac{du'}{u}$ est

$$dp = -\frac{1-\rho^2}{(r-\rho^2)^2}\,dr = -\frac{1-\rho^2}{\rho^3(r-\rho^2)^2}\,\frac{du'}{u},$$

ou, en remarquant que r est très voisin de l'unité,

$$dp = -\frac{1}{\rho^3(1-\rho^2)}\,\frac{du'}{u}.$$

Toutes choses égales, la moindre erreur correspond au maximum du produit $\rho^3(1-\rho^2)$, c'est-à-dire à la condition

$$3 - 5\rho^2 = 0, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{R'}{R} = 1,29.$$

Le cube de la dernière fraction est égal à 2,15 et le produit

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

et l'erreur relative que l'on commettrait sur la valeur de p, en négligeant cette correction, est sensiblement

$$\frac{\varepsilon\rho^2}{r-\rho^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho^2}\varepsilon = \frac{3}{2}\varepsilon = \varepsilon'.$$

Pour les mêmes angles de 10° et de 5°, on aurait $\varepsilon = 0{,}0564$ et $\varepsilon' = 0{,}0846$. Avec $p = \frac{1}{20}$, le calcul approché donnerait une valeur trop faible d'environ 0,0042. Il est vrai que cette nouvelle correction est à peu près proportionnelle au carré des angles de déviation et se réduirait au millième pour des angles moitié moindres.

Il reste à voir enfin si l'on doit tenir compte des aimantations induites. Considérons, en général, des barreaux disposés comme dans la figure 245. En désignant par MX et MY les composantes rectangulaires du champ produit en O' par le barreau M, l'équation approchée d'équilibre est

$$H\sin(\theta+\delta) = M(X\cos\delta - Y\sin\delta).$$

Sur le barreau mobile, qui est parallèle au champ, l'aimantation induite est longitudinale et n'intervient pas pour l'équilibre; on peut la supposer comprise dans le moment M'.

Comme le couple des aimants est réciproque, on a aussi

$$MM'(X\cos\delta - Y\sin\delta) = MM'Y',$$

en désignant par M'Y' une valeur moyenne de la composante verticale du champ produit par le barreau M' sur M; la valeur de Y' diffère très peu de celle qui convient pour le centre O. La condition d'équilibre peut donc s'écrire

$$(10)\qquad H\sin(\theta+\delta) = MY'.$$

Soient $M_1 = x_1 M$ et $M_2 = x_2 M$ les moments magnétiques, longitudinal et transversal, des aimantations induites sur le barreau M, et M'X' la composante au point O du champ produit par le barreau M'. Le couple M'MY' doit être remplacé par

$$M'[M(1+x_1)Y' - Mx_2X'] = M'MY'\left(1 + x_1 - x_2\frac{X'}{Y'}\right).$$

Il en résulte que l'erreur relative qui correspond à l'aimantion induite a pour expression

$$\varepsilon = x_1 - x_2 \frac{X'}{Y'} = \frac{X'}{Y'}\left(x_1 \frac{Y'}{X'} - x_2\right).$$

On a d ailleurs, en appelant A l'aimantation rigide,

$$x_1 = \frac{f_1}{A}(M'X' - H\sin\theta), \qquad x_2 = \frac{f_2}{A}(M'Y' + H\cos\theta);$$

$$A\varepsilon = \frac{X'}{Y'}\left[M'Y'(f_1 - f_2) - H\left(f_2\cos\theta + f_1\frac{Y'}{X'}\sin\theta\right)\right],$$

u, en tenant compte de (10)

$$A\varepsilon = \frac{X'}{Y'}H\left[\frac{M'}{M}(f_1 - f_2)\sin(\theta + \delta) - f_2\cos\theta - f_1\frac{Y'}{X'}\sin\theta\right].$$

Si on emploie la méthode des sinus, $X' = 0$ et il reste

$$\varepsilon = -f_1 \frac{H}{A}\sin\theta.$$

Dans les conditions indiquées précédemment (**804**), la corection relative à l'action du champ terrestre serait inférieure 0,0005 pour une déviation de 30°.

Avec la méthode des tangentes, $\theta = 0$, ce qui donne

$$\varepsilon = \frac{H}{A}\frac{X'}{Y'}\left[\frac{M'}{M}(f_1 - f_2)\sin\delta - f_2\right].$$

Il est surtout intéressant d'examiner les cas où le barreau nobile occupe une des positions principales O_1 ou O_2 (fig. 246) ar rapport au barreau déviant. Le rapport des composantes X' et Y' est égal à 2 tang δ pour la première position et à $\frac{1}{2}$ tang δ our la seconde.

D'autre psrt, si l'on suppose que les barreaux ont la même imantation moyenne, le rapport des moments M' et M est égal

au cube x^3 du rapport de leurs longueurs. Faisant encore $x=\frac{1}{2}$, l'erreur ε est le double ou la moitié de la quantité

$$\frac{H}{A}\tang\delta\left[\frac{f_1-f_2}{8}\sin\delta-f_2\right]=0,001\tang\delta\left[\frac{0,78}{8}\sin\delta-0,20\right].$$

Nous remarquerons, en passant, que les équations (8) permettent de comparer les moments magnétiques de deux barreaux en observant les déviations qu'ils produisent sur un aimant mobile dans un même champ.

Enfin, l'observation des oscillations d'un barreau donne le produit $MH=P$ par l'équation (1) et le quotient $\frac{M}{H}=Q$ par l'une des équations (8), en tenant compte dans chaque cas des termes de correction. On en déduit

$$M^2=PQ, \qquad H^2=\frac{P}{Q}.$$

Les deux expériences permettent ainsi de déterminer en valeurs absolues le moment magnétique M du barreau et la composante efficace H du champ.

809. Loi des actions magnétiques. — Une application importante de cette méthode a été faite par Gauss [1] pour vérifier la loi des actions magnétiques.

Supposons que l'action qui s'exerce entre deux masses magnétiques soit en raison inverse de la n^e puissance de la distance. Le champ magnétique d'une masse m à la distance r est alors $\frac{m}{r^n}$ et son potentiel $\frac{1}{n-1}\,\frac{m}{r^{n-1}}$.

Pour un couple de deux masses $\pm m$, dont le moment magnétique est mh, le potentiel en un point P, dont les distances aux masses $+m$ et $-m$ sont r et r', a pour expression

$$V=\frac{m}{n-1}\left(\frac{1}{r^{n-1}}-\frac{1}{r'^{n-1}}\right)=\frac{m\,dr}{r^n}.$$

Or, le produit mdr est la projection du moment $mh=M$ des

[1] GAUSS, *Intensitas vis magneticæ terrestres*, etc.— *Comm. Soc. Reg. Gotting.* t. VIII; 1841. — *Gauss werke*, t. V, p. 81.

deux masses sur le rayon vecteur r qui joint au point P le milieu du système. En appelant α l'angle que fait la direction de l'axe magnétique avec la droite r, on a donc $V = \frac{M \cos \alpha}{r^n}$. Les composantes du champ F_n et F_t, normale et tangentielle à la sphère de rayon r, sont alors

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial r} = n \frac{M}{r^{n+1}} \cos \alpha,$$

$$F_t = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{M}{r^{n+1}} \sin \alpha.$$

Pour un aimant de longueur finie, on trouverait également qu'à part des termes de correction, les valeurs du champ aux deux positions principales, à la même distance R du milieu du barreau, sont $n \frac{M}{R^{n+1}}$ et $\frac{M}{R^{n+1}}$. Le rapport de ces deux expressions est l'indice n de la puissance qui définit l'action élémentaire.

Gauss a fait agir sur une même aiguille un barreau perpendiculaire au méridien, situé alternativement de manière que l'aiguille fut dans la première ou dans la seconde position principale du barreau. En opérant à 13 distances différentes comprises entre $1^m,3$ et 4^m, on en pouvait déduire, par une méthode de moyennes, les coefficients des deux termes du développement.

Les déviations ont varié de $2^\circ\,13'\,51''$ à $4'\,36''$. A quelques secondes près, toutes les observations sont exactement représentées par les expressions

$$\tan\delta_1 = 0{,}086\,870\,R^{-3} - 0{,}002\,185\,R^{-5},$$
$$\tan\delta_2 = 0{,}043\,435\,R^{-3} + 0{,}002\,449\,R^{-5}.$$

Pour une grande distance, les derniers termes sont négligeables et le rapport des tangentes, c'est-à-dire des champs du barreau déviant sur la ligne des pôles et dans le plan de l'équateur, est égal au rapport des premiers coefficients, lequel est exactement 2. La loi du carré des distances se trouve ainsi vérifiée avec une approximation que ne comportaient pas les expériences de Coulomb.

810. Emploi de la balance. — Le couple produit par l'action du champ terrestre sur un barreau placé dans la position verticale est $MH\left(1+f_1\frac{Z}{A}\right)$ ou $MH\left(1-f'_1\frac{Z}{A}\right)$, suivant que le pôle nord est en bas ou en haut, et ces deux couples sont de sens contraires.

Si l'on attache le barreau d'une manière rigide au fléau d'une balance dont l'axe de rotation est perpendiculaire au méridien, l'appareil peut être équilibré, dans les deux cas, avec des tares P_1 et P_2 agissant par un bras de levier de longueur l; on aura donc

$$(11)\qquad 2HM\left(1+\frac{f_1-f'_1}{2}\cdot\frac{Z}{A}\right)=(P_1-P_2)gl.$$

C'est une sorte de double pesée dans laquelle l'aimantation induite est généralement négligeable, puisqu'elle n'intervient que par une différence.

Lorsque l'aimant est placé horizontalement dans le sens du fléau, le couple magnétique est produit par la composante verticale Z du champ. Les tares Q_1 et Q_2 relatives aux deux positions du barreau donnent encore

$$(12)\qquad 2ZM\left(1+\frac{f_1-f'_1}{2}\cdot\frac{H}{A}\right)=(Q_1-Q_2)gl.$$

Les équations (11) et (12) permettent encore de comparer deux moments magnétiques et leur rapport donnerait la tangente de l'inclinaison:

$$\operatorname{tang} I=\frac{Z}{H}=\frac{Q_1-Q_2}{P_1-P_2}.$$

Von Helmholtz [1] équilibre encore par la balance l'action réciproque de deux barreaux. L'un d'eux, de moment M_2, est suspendu verticalement à l'un des plateaux, l'autre M_1 placé horizontalement sur le second plateau et dirigé vers le milieu du premier. La distance des centres étant R, la composante

[1] HELMHOLTZ, *Ber. der Ak. der Wiss. zu Berlin*, t. XVI; 1883. — *Journ. de Phys.* [2], t. IV, p. 238; 1885.

D'une manière plus générale (**253**), l'énergie potentielle d'un aimant M dans un champ F qui fait l'angle θ avec la direction de l'axe magnétique a pour expression $-MF\cos\theta$. Diverses combinaisons de cadres (**576** à **578**) permettent d'obtenir un champ uniforme; soit G sa valeur pour l'unité de courant. Le travail nécessaire pour amener l'aimant de la direction θ à une autre direction θ', ou la variation correspondante du flux de force de l'aimant dans le circuit, est

$$\varphi = MG(\cos\theta - \cos\theta').$$

Si l'aimant est enlevé à une grande distance, la décharge induite déterminera ainsi la composante $M\cos\theta$ du moment magnétique. Si on retourne l'aimant bout par bout, la décharge induite donne $2M\cos\theta$.

En mesurant par ces méthodes les composanles M_x, M_y et M_z du moment magnétique M par rapport à trois axes rectangulaires, on en déduira

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2.$$

Les cosinus directeurs α, β, et γ de l'aimantation moyenne par rapport aux axes seront déterminés par les relations

$$\frac{\alpha}{M_x} = \frac{\beta}{M_y} = \frac{\gamma}{M_z} = \frac{1}{M}.$$

812. Aimantation moyenne. — Le quotient du moment magnétique d'un corps par son volume donne la valeur moyenne de son aimantation.

Nous avons vu déjà (**310**) que l'aimantation moyenne d'un des barreaux employés par Gauss était égale à 174. Cette aimantation varie souvent de 200 à 400 pour les barreaux dont on se sert dans les laboratoires ou dans les observations de magnétisme terrestre. L'aimantation maximum que peut acquérir l'acier dépend, non seulement de la nature du métal et de sa trempe, mais aussi des dimensions du barreau.

Le magnétisme, en effet, est surtout localisé dans les couches superficielles, soit parce que les procédés d'aimantation employés n'agissent pas facilement sur les parties intérieures,

soit parce que la trempe ne pénètre pas à une grande profondeur. En outre la réaction d'un aimant sur lui-même, ou la force démagnétisante (292), est d'autant moindre que le barreau est plus allongé dans le sens de l'aimantation.

Avec des tiges très minces, M. Kohlrausch [1] a obtenu pour l'acier des moments magnétiques de 100 unités par gramme, ce qui correspond à une aimantation de 780.

Supposons qu'un aimant soit entouré par un circuit de n_0 spires. En prenant l'axe des x perpendiculaire à la surface S du circuit, le flux total d'induction magnétique qui traverse cette surface est (243)

$$\varphi = n_0 \int X_1 \, dS = n_0 \left[4\pi \int A \, dS + \int X \, dS \right].$$

Quand on enlève l'aimant à une grande distance, ou que l'on supprime l'aimantation, le circuit est parcouru par une décharge induite qui donnera la mesure de φ.

Si l'aimant est un barreau sur lequel le circuit s'applique comme un anneau, on peut appeler X et A les valeurs moyennes du champ et de l'aimantation dans la section S et écrire

$$(14) \qquad \varphi = n_0(4\pi A + X) S = n_0 4\pi AS(1 - \alpha).$$

La décharge relative au déplacement $x' - x$ du circuit est proportionnelle à la différence $\varphi - \varphi'$ des flux d'induction correspondants, ou au flux de force qui sort de l'aimant dans cet intervalle. On en déduira la valeur moyenne de la composante normale extérieure en chaque point (294, III).

Lorsque l'anneau est placé dans la région moyenne d'un barreau très long, le terme de correction α est négligeable; l'enlèvement de l'anneau à une grande distance produit une décharge qui détermine l'aimantation moyenne A dans la section d'abord entourée. Cette aimantation a une valeur maximum A_0 dans la section médiane, puisque le barreau équivaut toujours à un aimant lamellaire (250) ou à un aimant solenoïdal (246) formé de filets magnétiques uniformes aboutissant à différents points de la surface.

[1] F. Kohlrausch, *Leitfaden der prakt. Phys.* 4e éd. p. 174; 1880.

Pour des barreaux plus courts ([1]), on peut calculer d'abord le champ X_0 dans la section médiane en supposant que les masses magnétiques $\pm m$ des extrémités du barreau sont concentrées aux pôles dont la distance est $2L$; en appelant $2L'$ la longueur du barreau, on a ainsi

$$-X_0 = \frac{2m}{L^2} = \frac{M}{L^3} = \frac{AL'S}{L^3},$$

$$x_0 = \frac{-X_0}{4\pi A_0} = \frac{L'S}{4\pi L^3}.$$

Cette fraction est d'environ $\frac{1}{200}$ quand la longueur magnétique du barreau est 10 fois son diamètre et se réduit au quart pour une longueur double. Dans ce cas, il est suffisant de calculer la correction d'une manière approchée.

813. Distribution du magnétisme. — Les différentes méthodes expérimentales (**295**) ne peuvent donner, avec plus ou moins d'exactitude, que la forme du champ magnétique extérieur. On en déduirait la couche fictive superficielle, ou l'aimantation lamellaire équivalente (**250**), sans qu'il soit possible de connaître la situation réelle du magnétisme. Réduit à ces termes, le problème présente encore de grandes difficultés.

Soit V le potentiel d'un aimant, ρ la densité magnétique et désignons par U le potentiel de l'unité de masse située en un point extérieur P.

En appliquant l'équation de Green (**28**)

$$(15) \qquad \int (U\Delta V - V\Delta U)\,dv = \int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS$$

au volume de l'aimant, ou au volume compris dans une surface S qui l'entoure et à laquelle le point P est extérieur, on aura toujours, dans les limites de l'intégration, $\Delta U = 0$ et $\Delta V + 4\pi\rho = 0$. Désignant par r la distance au point P, le premier membre se réduit à

$$\int U\Delta V\,dv = -4\pi\int \frac{\rho\,dv}{r}.$$

([1]) E. Mascart, *Ann. de Chim. et de Phys.* [6], t. XVIII, p. 5; 1889.

Or, la dernière intégrale représente le potentiel V_p de l'aimant au point P ; l'équation (15) devient alors

$$(16) \qquad 4\pi V_p = \int V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS - \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

La valeur de V_p ne dépend ainsi que du potentiel V sur la surface et de sa dérivée normale. Il existe d'ailleurs une relation entre ces deux quantités. En effet, on peut encore appliquer l'équation (16) au volume limité par la surface S et la surface S' d'une sphère de rayon r' très petit ayant son centre au point P, à la condition que l'intégrale du second membre soit étendue aux deux surfaces S et S'.

Dans ce cas, si dS' désigne l'élément qui correspond à l'ouverture angulaire $d\omega$, on a $dn = -dr'$, $dS' = r'^2 d\omega$; la partie du second membre de l'équation (16) relative à S' devient

$$\int \frac{V}{r'^2} dS' + \int \frac{1}{r'} \frac{\partial V}{\partial r'} dS' = \int V d\omega + r' \int \frac{\partial V}{\partial r'} d\omega.$$

Quand le rayon r' tend vers zéro, le dernier terme s'annule et le précédent devient $4\pi V_p$. L'équation (16) se réduit donc à

$$\int V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Comme cette condition est indépendante de la position du point P, il en résulte que les quantités V et $\frac{\partial V}{\partial n}$ sont des fonctions l'une de l'autre. Le champ extérieur est donc déterminé quand on connaît le potentiel sur la surface S ou sa dérivée normale, c'est-à-dire la composante normale du champ en chaque point.

Désignons encore par U le potentiel de l'unité de masse située au point P et de la couche qu'elle induirait, si elle était électrique, sur la surface S supposée conductrice et en communication avec le sol, et soit u la densité de cette couche sur l'élément dS. En appliquant l'équation (15) au volume limité par les mêmes surfaces S et S', on remarquera que

pour la surface S', la valeur de U tend vers $\frac{1}{r'}$ quand r' tend vers zéro, ce qui donne

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} dS' = -\int \frac{1}{r'} \frac{\partial V}{\partial r'} r'^2 d\omega = -r' \int \frac{\partial V}{\partial r'} d\omega = 0,$$

$$\int V \frac{\partial U}{\partial n} dS' = -V_p \int \frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{1}{r'}\right) r'^2 d\omega = 4\pi V_p.$$

Les termes correspondants relatifs à la surface S sont nuls, car la fonction U et sa dérivée normale sont nulles, cette dérivée étant comptée vers l'intérieur ou l'extérieur, suivant que le point P est en dehors ou dans la surface S.

Si le point P est extérieur, $\Delta V = 0$ dans les limites de l'intégration, sauf peut-être sur la surface, mais alors $U = 0$. On a aussi $\Delta U = 0$ dans les mêmes conditions, mais il faut tenir compte de la couche située sur la surface S, où V n'est pas nul, ce qui donne

$$\int V \Delta U \, dv = -4\pi \int V u \, dS.$$

L'équation (15) devient alors

$$\int V u \, dS = -V_p;$$

le potentiel extérieur de l'aimant se trouve ainsi exprimé en fonction du potentiel V sur une surface qui l'entoure.

Si le point P est à l'intérieur de la surface S, on remplacera l'aimant par la couche fictive superficielle; le même raisonnement s'applique alors sans modification. Quant à la densité auxiliaire u, sa détermination se ramène à un problème d'électrostatique généralement difficile à résoudre; elle est liée, en tous cas, au potentiel U par la relation

$$4\pi u = -\frac{\partial U}{\partial n}.$$

D'autre part, l'étude du champ magnétique F permet de connaître, à partir d'une surface de niveau arbitraire V_1, l'intégrale $V_1 - V = \int F \, ds$ le long d'une ligne de force s. Pour

un barreau aimanté, par exemple, on prendra comme point de départ la surface de niveau $V_1 = 0$ qui passe par la région médiane et l'on aura

$$V = -\int F\,ds.$$

Les formules empiriques (297) qui représentent la distribution des densités magnétiques à la surface d'un barreau ne reposent que sur des expériences approchées et impliquent l'hypothèse inexacte que cette distribution ne dépend que de la forme de l'aimant.

814. Distance des pôles. — Ces formules de distribution permettraient de déterminer, au même ordre d'approximation, la distance $2L$ des pôles, c'est-à-dire la distance des centres de gravité des couches positive et négative.

Une méthode plus directe consiste à évaluer cette distance par le terme du second ordre, p_1 ou p_2, dans l'expression du couple produit par un aimant sur un autre aimant très court, qui occupe une des positions principales (806); on en déduit le rapport de la longueur magnétique à la distance R.

M. Kohlrausch [1] a trouvé ainsi que, pour des barreaux d'acier cylindriques ou creux, trempés ou non, dont la longueur variait de 10 à 30 fois le diamètre, ou même pour des parallélipipèdes dont les dimensions étaient $44 \times 2{,}3 \times 1$, le rapport de la longueur magnétique $2L$ à celle du barreau a oscillé entre 0,81 et 0,86; on pourrait donc considérer cette fraction comme égale en moyenne à 0,83 ou $\frac{5}{6}$.

Toutefois, outre que l'expérience ne comporte une précision suffisante que dans des cas exceptionnels, elle ne donne pas encore la distance réelle des pôles. Considérons, en effet, un aimant rectiligne et symétrique de longueur $2l$, dont la densité linéaire soit λ à la distance x du centre. La masse relative à la longueur dx est $\lambda\,dx$ et le moment magnétique de deux masses symétriques $2\lambda x\,dx$; le moment et la longueur magnétique de l'aimant sont définis par

$$M = 2\int_0^l \lambda x\,dx = 2L\int_0^l \lambda\,dx.$$

(1) F. Kohlrausch, *Wied. Ann.*, t. XXII, p. 411; 1884.

)r, dans les termes de correction relatifs à l'expression du mp, on doit en réalité remplacer L^2 par l'expression

$$L'^2 = \frac{\Sigma M L^2}{\Sigma M} = \frac{\int 2\lambda x\, dx . x^2}{\int 2\lambda x\, dx} = \frac{\int \lambda x^3\, dx}{\int \lambda x\, dx}.$$

)uel que soit le mode de distribution, en dehors du cas de ıx masses isolées, il est facile de voir que la valeur ainsi :ulée pour L' est toujours plus grande que L.

;i la distribution est linéaire, par exemple, la densité λ étant ·portionnelle à x, on a

$$\frac{L}{l} = \frac{2}{3} = 0{,}667, \quad \frac{L'}{l} = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}775.$$

.'erreur commise sur la distance des pôles, par l'emploi de te méthode, atteindrait alors un dixième.

ɪI. Blakesley (¹) détermine les coordonnées x et y d'un des nts P où le champ est perpendiculaire à l'axe. En appelant : α' les angles que font avec l'axe les rayons vecteurs relaaux deux pôles, on a (**106**)

)

$$\sin\alpha \sin 2\alpha = \sin\alpha' \sin 2\alpha',$$

$$\cot\alpha = \frac{x - L}{y}, \qquad \cot\alpha' = \frac{x + L}{y},$$

)

$$\cot\alpha + \cot\alpha' = 2\,\frac{x}{y};$$

$$\frac{2L}{y} = \cot\alpha' - \cot\alpha.$$

.es angles α et α' étant définis par les équations (17) et (18), dernière donnera la valeur de L. Il serait facile de voir : cette solution n'est pas plus satisfaisante; la distance des es ainsi déterminée dépend encore de la position du point P du mode de distribution.

)n obtient des résultats mieux définis en interprétant d'une re manière l'équation (13) appliquée à la section médiane barreau où l'aimantation moyenne est A_0, le champ X_0 et

(¹) BLAKESLEY, *Proc. of the L. Phys. Soc.*; 1891, p. 58.

l'induction $4\pi A_0 + X_0$, D'autre part, le flux total de force émis par le pôle positif est $4\pi m$; la plus grande partie s'échappe par les surfaces extérieures pour être finalement absorbée au pôle négatif, mais une partie $-X_0 S$ traverse la section médiane. Le flux de force extérieur est donc $4\pi m + X_0 S$; comme il est égal au flux d'induction $\varphi_0 = (4\pi A_0 + X_0) S$ dans la section médiane, il en résulte $m = A_0 S$. Le flux d'induction φ_0 relatif à l'enlèvement de l'anneau ayant été déterminé par expérience, on en déduit

$$m = A_0 S = \frac{\varphi_0}{4\pi n_0 (1 - x_0)}.$$

Si l'on a déterminé, d'autre part, le moment magnétique M du barreau dans une bobine cylindrique, par l'équation (12), on aura la longueur magnétique 2L par la relation

$$2L = \frac{M}{m} = \frac{\varphi}{\varphi_0} \frac{n_0}{n} \frac{1 - x_0}{1 - \varepsilon}.$$

On trouve ainsi que, pour un même barreau, la distance des pôles varie beaucoup avec l'aimantation, même quand elle a été produite aussi régulièrement que possible, à l'aide d'une bobine magnétisante.

Je citerai, comme exemple, quelques expériences faites avec un barreau d'acier trempé à section circulaire, de $19^{c},9$ de longueur et $0^{c},4$ de diamètre. On déterminait d'abord les quantités m et M, puis les mêmes éléments après avoir laissé tomber le barreau de la hauteur d'un mètre sur le parquet. Dans le tableau suivant, d désigne la distance des pôles aux extrémités du barreau et f la fraction de magnétisme qui reste après les chocs.

		2L.	d.	f.
I	Aimantation initiale........	$14^{c},5$	$2^{c},7$	»
	» après plusieurs chutes.	15,07	2,4	0,396
II	Aimantation initiale........	14,11	2,90	»
	» après 3 chutes...	14,79	2,55	0,348
III	Aimantation initiale........	13,74	3,08	»
	» après 6 chutes...	14,77	2,56	0,418

La distance des pôles est toujours modifiée en même temps ıe l'aimantation. Les chocs ont pour effet, comme on le saıit, de diminuer beaucoup le magnétisme et ils rapprochent s pôles des extrémités du barreau.

Il semble résulter de là qu'on ne peut adopter aucune règle énérale et que chaque état d'un barreau devrait être l'objet 'une étude particulière.

AIMANTATION INDUITE.

815. Méthodes d'observation. — Comme le coefficient d'ainantation k et la perméabilité magnétique $\mu = 1 + 4\pi k$ vaient avec la force magnétisante, les résultats ne seront bien léfinis que si l'on opère sur des corps homogènes, avec un hamp extérieur uniforme, et si le champ produit par le manétisme induit est lui-même uniforme ou négligeable.

L'aimantation A est alors liée au champ extérieur F par ıne expression de la forme (**273**)

$$A = \frac{k}{1+kC} F,$$

t le moment magnétique d'un volume v est

$$(1) \qquad M = vA = v \frac{k}{1+kC} F.$$

A l'intérieur du corps, la valeur du champ est $\frac{F}{1+kC}$, elle de l'induction $\frac{\mu F}{1+kC}$, et le flux d'induction dans une ection S normale au champ a pour expression

$$(2) \qquad \varphi = \frac{\mu S}{1+kC} F.$$

Le facteur constant C est égal à $\frac{4\pi}{3}$ pour la sphère et à l'un les coefficients L, M ou N pour l'ellipsoïde (**276**), quand le hamp est parallèle à l'un des axes principaux. Pour un ylindre circulaire de grande longueur, parallèle ou perpeniculaire au champ, on a encore $C = 0$ ou $C = 2\pi$.

Un corps isotrope, limité par une surface de forme quelconque, se comporte d'ailleurs comme un ellipsoïde, en ce sens que l'aimantation moyenne est parallèle au champ pour trois directions principales rectangulaires. En désignant par f le coefficient d'aimantation moyenne relatif à l'une de ces directions, on peut écrire

$$(3)\qquad A = fF, \qquad M = \varphi A = \varphi f F.$$

Dans un circuit magnétique soumis à l'influence d'un courant I qui parcourt N spires, la force magnétomotrice est $4\pi NI$ (**361**); avec la seule hypothèse que l'aimantation est en chaque point parallèle au champ, le flux d'induction est, en appelant R la réluctance du circuit [1],

$$(4)\qquad \varphi = \frac{4\pi NI}{R}.$$

Le circuit le plus simple, en théorie, est un anneau circulaire enveloppé par une bobine annulaire à enroulement régulier (**579**) dont les N spires sont appliquées sur la surface. Le champ intérieur est à peu près uniforme dans chaque section S lorsque l'épaisseur de l'anneau est très petite par rapport à sa longueur moyenne l, de sorte que la perméabilité est la même dans toute l'étendue de l'anneau. On a alors

$$(5)\qquad \varphi = \mu S \frac{4\pi NI}{l}.$$

Pour éviter l'obligation d'enrouler une bobine sur chaque anneau, M. Hopkinson [2] introduit une tige aa' (fig. 247), qui doit servir d'*éprouvette*, dans les trous opposés d'un cadre en fer PQ de très grande section. Si la tige est bien ajustée dans les

(1) Dans la pratique, on représente habituellement par $\mathfrak{H}$ le champ magnétisant, par $\mathfrak{B}$ l'induction magnétique et par $\mathfrak{F}$ la force magnétromotrice. Si le courant I est évalué en ampères, on a alors

$$\mathfrak{B} = \frac{4\pi}{10}\,\frac{NI}{R} = 1,257\,\frac{NI}{R}.$$

(2) Hopkinson, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1885, p. 456.

trous, le circuit magnétique ne présente pas d'interruption sensible, ou d'*entre-fer* ; la réluctance du cadre est d'aillleurs négligeable et aucune trace de magnétisme n'apparaît à l'extérieur. On peut même couper l'éprouvette en deux parties appliquées l'une sur l'autre par des surfaces bien planes. Cette tige est entourée par une bobine BB' formée de deux parties distinctes, dont le nombre total de spires est N, et qui laissent entre elles un petit intervalle pour y intercaler une autre bobine b'. Le flux d'induction est représenté par la même

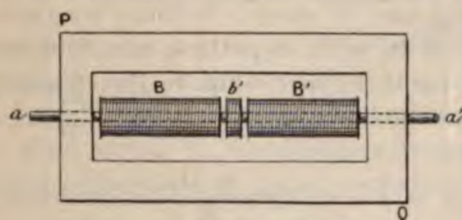


Fig. 247.

expression (5) en fonction de la section S de la tige et de la longueur intérieure l du cadre.

816. Mesure des moments magnétiques. — Si le corps ne forme pas un circuit magnétique fermé, comme une sphère ou un barreau cylindrique, on déterminera le moment magnétique induit par l'une des méthodes indiquées plus haut.

Supposons, par exemple, qu'un cylindre soit placé dans une direction parallèle à la composante horizontale H du champ terrestre ; le moment magnétique peut s'écrire $v f_1 H = M$, le facteur f_1 différant très peu du coefficient d'aimantation k si le barreau est assez long. A la distance R du centre et dans une des positions principales, le champ produit est, à part les termes de correction, $+\frac{2M}{R^3}$ ou $-\frac{M}{R^3}$. Sur une aiguille placée en l'un de ces points, le champ résultant sera donc

$$H_1 = H\left(1 + 2\frac{f_1 v}{R^3}\right) \quad \text{ou} \quad H_2 = H\left(1 - \frac{f_1 v}{R^3}\right).$$

Les oscillations de l'aiguille feront connaître le rapport des champs H et H_1 ou H et H_2, d'où l'on déduira f_1.

... constituée en de- ... plaçant le barreau ... à petite distance ... menée par le voi- ... distance constante, le ... diculaire au méridien

... ou vertical, ce champ ... H ou Z par le même ... α et β du déclino-

$$\ldots \beta = \frac{pZ}{H}.$$

... une manière plus exacte ... obtenues quand on ... bout pour bout, ce qui ... eux. Cette observation ... d'ailleurs, pour déter- ... par la relation

$$\ldots = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}.$$

... le facteur p et le coeffi- ... qu'en supposant connue

... se fera d'une manière ... artificiel. Le barreau ... uniforme F perpendicu- ... une longue bobine cylin- ... moment est $M = v f_1 F$ et ... situé dans une des posi-

... lui-même exerce sur ... avant et après l'introduc- ... préférable de la com- ... assez éloigné pour ne pas

· le champ de la bobine. Il suffit, par exemple, d'em-
:omme déclinomètre l'aiguille d'un galvanomètre et
·e le cadre en dérivation sur le courant principal par
istance telle que l'effet total soit équilibré. Dans ce
iéviation x ne dépend plus que de l'aimantation induite
barreau. Si le déclinomètre est placé dans la pre-
osition principale, la déviation x donne

$$\tan g x = \frac{2M}{HR^3} = f_1 \frac{2vF}{HR^3}.$$

ıra une idée plus précise de cette méthode par les ré-
le quelques expériences (¹). Avec des barreaux cylin-
à section circulaire, de 9ᶜ de longueur, formés par
uets d'un même fil, les coefficients moyens f_1 et f_2
ation longitudinale et transversale ont été :

·port de la longueur au diamètre.	F.	f_1.	f_2.
3,3	1,3	0,70	»
	2,0	0,71	0,13
	3,1	0,74	0,13
	6,9	0,79	0,16
12,3	1,2	2,81	»
	3,1	3,04	»
	5,7	3,37	0,12
	7,0	3,51	0,16

eux coefficients augmentent d'une manière manifeste
:hamp, mais cette variation est faible, surtout lorsque
dres sont très courts.
.e cas d'une aimantation transversale, un cylindre de
ongueur devrait donner

$$f_2 = \frac{k}{1+2\pi k} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2\pi k}} = \frac{0,159}{1+\frac{1}{2\pi k}}.$$

ıscart, *Ann. de Ch. et de Phys.* 6ᵉ, t. XVIII, p. 5; 1889.

On peut encore faire agir sur ... aleur limit
clinomètre, l'un des pôles seul... ...rence.
dans le méridien magnétique et ... ...culière p
sur une droite perpendiculaire ... ...amp terrestre
sinage d'une des extrémités. Pou... ...valeurs
champ du barreau à peu près ... ...x et d'acier
est proportionnel à l'aimantatio...

Suivant que le barreau est h...
est proportionnel à l'une des ...
facteur p. Les déviations cor...
mètre sont alors

$$\tan g\alpha = \frac{pH}{H}$$

Les angles α et β s'obti...
en prenant la moyenne de...
retourne le barreau face po...
donne quatre lectures pour...
fournit une méthode, ass...
miner l'inclinaison I du ...

$$\frac{Z}{H} = \tan ...$$

Quant au rapport qu...
cient f_1, on ne pourrait...
la position des pôles.

La mesure du mo...
plus exacte par l'em...
étant placé dans un...
laire au méridien, pa...
drique dont le cham...
on le fera agir sur...
tions principales.

On éliminera l'...
l'aiguille par deu...
tion du barreau ... ...imites des e...
penser à l'aide d...

	f_1
	»
0,29	0,15
0,26	0,17
0,20	0,13
	0,16
	0,10
	0,11
	0,19
	0,18

induites fournissent une méthode plus gé-
s d'abord qu'un barreau, soumis au champ
end un moment magnétique M, soit placé
bobine cylindrique.

e barreau, la variation de flux d'induction
l $4\pi n$M (811). Suivant que l'axe de la bobine
dans le méridien ou vertical, on a

$$\ldots 4\pi n v \mathrm{H} \quad \text{ou} \quad \varphi = f_1 4\pi n v \mathrm{Z}.$$

cas, la composante H s'élimine d'elle-même
du galvanomètre balistique.

indiquée par la figure 248 permet d'opérer

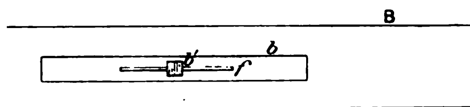


Fig. 248.

rtificiel. Le barreau *f* est placé dans une
ignétisante *b*, entourée elle-même par une
B plus longue.

le la bobine magnétisante, le courant agit
ie B. On peut déterminer la décharge corres-
expérience à blanc, c'est-à-dire sans barreau
, préférable de la compenser en plaçant sur
ctifs des bobines auxiliaires b_1 et B_1 ayant
n mutuelle et disposées de manière que la
le sens contraire ; une expérience à blanc
fier si la compensation est exacte.

te fois le barreau, son moment magnétique
la décharge induite à l'établissement du
obine magnétisante. La suppression du cou-
ner la même décharge en sens contraire,
riations sont généralement inégales et leur
ond au magnétisme résiduel.

ntenant qu'on entoure la section moyenne
e bobine b' de n' tours. La décharge dans ce
orrespond au flux d'induction qui provient
ction de la bobine magnétisante ; ce dernier

effet est très faible et peut d'ailleurs être déterminé par une expérience à blanc. Si le barreau est assez long pour que la décharge induite dans la bobine b' permette de déterminer, sans erreur sensible (**815**), la masse magnétique de chaque pôle, on pourra déduire des deux expériences simultanées la distance $2L$ des pôles.

Avec un barreau cylindrique de $0^c,3$ de diamètre et $2l=20^c,7$ de longueur on a ainsi obtenu, en désignant par d la distance des pôles aux extrémités,

F.	d.	$2L$.	$\frac{L}{l}$.
1 à 7	$3^c,04$	$14^c,82$	0,716
10,4	$2^c,79$	$15^c,12$	0,730
22	$2^c,40$	$15^c,9$	0,768
57	$1^c,44$	$17^c,82$	0,861

La longueur magnétique augmente avec le champ, et il en est de même pour l'aimantation temporaire d'un barreau d'acier, à l'inverse de qui avait lieu pour des aimants affaiblis par des chocs successifs.

817. Perméabilité. — La décharge induite dans la bobine b (fig. 248) permet aussi de déterminer le flux d'induction dans la section moyenne, ou au moins ses variations ; on aurait d'ailleurs le flux lui-même en retirant le barreau du champ et de la bobine b. Si la longueur du barreau est assez grande, par exemple 100 fois le diamètre, ce flux φ est très sensiblement égal à μFS et la décharge induite correspond à

$$\varphi' = n'\varphi = \mu n' SF.$$

Le phénomène est encore mieux défini quand on opère sur un circuit magnétique fermé. Si le barreau est annulaire et muni d'une bobine magnétisante, il suffit d'y enrouler n tours d'un fil secondaire, ce qui donne encore

$$\varphi' = \mu n\, SF = \mu n' S \frac{4\pi n I}{l}.$$

L'appareil de M. Hopkinson (fig. 247) donne le même résultat par la décharge induite sans la bobine b'. Toutefois, il

est à remarquer que l'expérience fournit seulement la perméabilité relative à la variation du champ.

Si le fer est d'abord neutre et que le courant I reçoive des accroissements successifs, l'aimantation finale sera donnée par la somme des décharges induites. Quand on annule ensuite le courant par échelons, le fer garde du magnétisme rémanent qui échappe à une nouvelle observation.

C'est pour obtenir l'aimantation totale à chaque expérience que le barreau aa' est formé de deux parties, dont l'une a est fixée au cadre par une vis de pression et l'autre mobile; la face de jonction est dans l'intervalle des bobines B et b'. Quand on tire brusquement le morceau a', la bobine b' se relève par l'effet d'un ressort, de manière à perdre le flux d'induction φ' qui la traversait. La décharge induite correspond alors à l'aimantation totale de l'éprouvette.

Entre deux pièces de fer ainsi rapprochées au contact par des surfaces planes perpendiculaires à l'aimantation, l'attraction des couches par centimètre carré (**288**) est $2\pi A^2$. Si l'aimantation est produite par un champ extérieur F, on doit y ajouter l'action du champ sur la partie mobile; au total, l'*effort d'arrachement* par unité de surface est donc

$$p = 2\pi A^2 + FA = (1 + 2\pi k)FA = \frac{\mu + 1}{2} FA,$$

ou, en tenant compte des relations $F_1 = \mu F = F + 4\pi A$,

$$(6) \qquad p = \frac{\mu^2 - 1}{8\pi} F^2 = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \frac{F_1^2}{8\pi} = \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \frac{(4\pi A)^2}{8\pi}.$$

Comme la perméabilité μ est en général assez grande, on fait habituellement usage des expressions plus simples

$$(6)' \qquad p = \mu^2 \frac{F^2}{8\pi} = \frac{F_1^2}{8\pi} = \frac{(4\pi A)^2}{8\pi}.$$

La mesure de l'effort d'arrachement relatif à une surface S déterminera ainsi l'induction F_1 ou l'aimantation A.

Avec une bobine annulaire (**579**) renfermant un nombre total

de N spires, le champ moyen est $F = 4\pi \frac{NI}{l}$. Si la bobine et l'anneau sont coupés par un plan diamétral, l'effort d'arrachement pour l'ensemble des deux sections est

$$P = 2pS = (\mu^2 - 1) 4\pi \frac{N^2 I^2}{l^2} S.$$

On a quelquefois employé la méthode d'arrachement en disposant l'appareil de M. Hopkinson dans une direction verticale, pour déterminer par des poids ou par un ressort dynamométrique l'attraction des deux tiges, mais le frottement de la partie mobile dans les trous du cadre peut nuire à l'exactitude des mesures.

C'est pour éviter cette cause d'erreur, que M. Bosanquet[1] supprime le cadre et réduit l'appareil à sa partie centrale. L'induction F_1 est mesurée par la décharge induite dans la bobine b' et, après avoir équilibré la tige a' par un contrepoids, on détermine la charge nécessaire pour produire l'arrachement. La formule (6)′ se vérifie alors à 2 ou 3 % près, sauf pour le cas de petites forces magnétisantes, par exemple inférieures à 5 unités.

818. Propriétés du fer. — Pour les expériences comparatives, on peut employer des méthodes plus rapides. Avec des échantillons de fer, par exemple, on les placera à l'intérieur d'une bobine magnétisante perpendiculaire au méridien et disposée de manière que son axe soit dirigé vers le déclinomètre. Si l'action propre de la bobine sur l'aiguille est compensée par celle d'un autre circuit que parcourt le même courant, la tangente de la déviation α est proportionnelle au moment magnétique. Le rapport des déviations obtenues avec deux barreaux de mêmes dimensions, placés au même point et aimantés par le même courant, est égal au rapport de leurs moments magnétiques.

L'expérience est encore plus simple pour le magnétisme permanent des barreaux d'acier. Après les avoir aimantés par un même courant, on les place de part et d'autre du déclinomètre sur une perpendiculaire au méridien, leurs pôles de

(1) B. H. M. Bosanquet, *Ph. Mag.* [5], t. XXII, p. 535; 1886.

ches; les trois suivants sont déduits d'expériences antérieures de Nesbit, de Henry et de Sturgeon :

Sect. des barreaux en cent. carrés.	Poids maximum en kilogrammes par centim. carré.	Aimantation maximum. A.	Champ. $4\pi A$.
64,5	14,695	1 514	19 025
1,26	17,638	1 660	20 860
0,2813	19,349	1 738	21 840
0,0077	11,818	1 358	17 064
29,03	22,312	1 869	23 487
25,42	13,383	1 445	18 158
1,26	18,000	1 676	21 050

Le maximum d'aimantation peut ainsi atteindre des valeurs voisines de 1 700 ou 1 800 et le champ magnétique entre les deux surfaces dépasse 20 000 unités. Des nombres de même ordre ont été obtenus par différents observateurs.

L'existence de ce maximum est une conséquence immédiate de l'hypothèse d'Ampère (**358**), qui consiste à considérer les courants particulaires comme préexistant dans le fer doux, et le fait de l'aimantation comme une simple orientation des courants primitifs [1].

Cette hypothèse semble confirmée par une expérience ingénieuse de Beetz [2]. Un fil d'argent recouvert de vernis, sauf sur une génératrice, est pris comme électrode négative dans un bain de fer, au milieu d'un champ magnétique parallèle à sa longueur. Le mince filet de fer obtenu dans ces conditions présente une aimantation permanente très élevée, d'autant plus grande qu'il est plus fin et que, par suite, la réaction des particules contiguës se fait moins sentir.

Des expériences de Joule [3], quoique bornées au magnétisme permanent, montrent déjà qu'au début l'aimantation croît d'une manière plus rapide que la force magnétisante.

Ce résultat a été mis nettement en évidence par les expériences de M. Wiedemann [4] sur des barreaux cylindriques

(1) Ampère, *Réponse à Van Beck;* 1822. — *Collect. de Mém. de la Société française de Phys.*, t. II, p. 214.
(2) Beetz, *Pogg. Ann.*, t. CXI, p. 107; 1860.
(3) Joule, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1856, p. 287.
(4) G. Wiedemann, *Galvanismus*, 1re éd. t. II, p. 297.

dont il déterminait séparément l'aimantation totale et l'aimantation résiduelle, d'où l'on déduit par différence l'aimantation temporaire. Pour les trois espèces d'aimantation, la courbe figurative de l'aimantation commence par tourner sa convexité vers l'axe des abscisses, présente un point d'inflexion et tend ensuite vers le maximum.

819. Étude de l'aimantation. — Plusieurs procédés peuvent être employés pour traduire les résultats des expériences. La méthode qui répond le plus directement aux besoins de la pratique consiste à exprimer, par une courbe ou par une formule, la relation qui existe entre le moment magnétique, ou l'intensité d'aimantation, et la force magnétisante.

Lamont [1] a obtenu une expression assez rationnelle en admettant que l'accroissement dM du moment magnétique, produit par un accroissement dF de la force magnétisante, est à chaque instant proportionnel à l'excès $M_1 - M$ du moment maximum M_1 sur la valeur actuelle M, c'est-à-dire à l'accroissement total de magnétisme que le barreau est encore capable de recevoir. Il en résulte

$$dM = \alpha(M_1 - M)\,dF,$$
$$M = M_1(1 - e^{-\alpha F}).$$

La courbe qui figure le rapport de M à M_1, en fonction de la force magnétisante F, part de l'origine, où le coefficient angulaire de la tangente est égal à la constante α, et devient asymptote à la droite $y = 1$. On retrouve ainsi cette propriété générale que l'aimantation est d'abord proportionnelle à la force magnétisante et tend vers un maximum.

Cette formule de Lamont représente très exactement les phénomènes observés par Joule et, d'une manière générale, ceux qui correspondent à des forces magnétisantes assez grandes pour que l'on ait dépassé les premiers éléments de la courbe à courbure inverse.

Au lieu de recourir à une exponentielle, ce qui complique beaucoup les calculs, on peut représenter le moment magnétique, comme l'a fait M. Fröhlich [2], par une branche d'hy-

(1) Lamont, *Handbuch des magnetismus*, p. 407; 1867.
(2) Fröhlich, *Electrotechn. Zeitschrift*, t. II, p. 134; 1881.

perbole, soumise à la condition d'avoir la même tangente à l'origine et la même asymptote, ce qui donne des résultats équivalents. On aurait alors

$$M = M_1 \frac{\alpha F}{1 + \alpha F}.$$

Müller [1] avait trouvé que, pour un barreau de fer doux de diamètre d, le moment magnétique M produit par un champ F se représente assez exactement par l'expression empirique

$$M = B d^2 \operatorname{arctang} \frac{F}{C d^{\frac{3}{2}}}.$$

Toutefois cette formule répond seulement au cas particulier d'un barreau aimanté par une courte bobine qui entoure son milieu ; elle indique aussi un maximum d'aimantation, d'autant plus vite atteint que le barreau est plus étroit.

W. Weber [2] a fait, sur de longues tiges cylindriques et par la méthode des déviations, une série d'expériences qui ont été calculées par Kirchhoff [3]. Pour des forces magnétisantes F d'abord croissantes puis décroissantes, elles donnent les valeurs suivantes du coefficient d'aimantation k :

F.	k.	F.	k.
29,6	25,0	248,4	5,6
30,1	23,5	197,5	6,7
82,3	13,5	158,3	8,1
118,4	10,2	129,7	9,5
151,2	8,4	96,7	12,0
208,0	6,4	61,2	16,9
239,7	5,7	29,2	25,0

Il est à remarquer que l'aimantation kF est toujours un peu plus grande dans la période descendante, conformément aux effets d'hystérésis. Cette propriété a été plus nettement établie par les expériences de M. Warburg et de M. Fromme [4].

(1) Müller, *Pogg. Ann.*, t. LXXIX, p. 337; 1850 et t. LXXXIX, p. 181; 1851.
(2) W. Weber, *Electr. Maasbest., Diamagnetis.* — *Abhand. der König. Götting. Ges.* t. I, p. 170; 1852.
(3) R. Kirchhoff, *Crell's Journal*, t. XLVIII; 1853. — *Gesamm. Abh.*, p. 193.
(4) E. Warburg, *Wied. Ann.*, t. XIII, p. 141; 1881. — C. Fromme, *ibid.*, p. 315.

Thalen ([1]) utilise simplement l'action de la terre sur des guettes cylindriques de fer, de 2c à 4c de diamètre et 40c de ngueur, situées dans la position verticale et observe la dé-arge par retournement dans une bobine qui les entoure. vec différents échantillons de fer suédois recuit, le coeffi-ent k a varié de 27 à 45.

Des expériences analogues de M. Riecke ([2]) ont donné pour même coefficient, avec des ellipsoïdes de différentes excen-icités et des forces magnétisantes comprises entre 0,032 et 072, des valeurs de 13,5 à 25,4.

Quintus Icilius ([3]) s'est servi de deux ellipsoïdes dont la ngueur était 101 ou 165 fois le diamètre. Il opérait par la éthode des déviations pour les forces magnétisantes un peu nsidérables et par induction pour les forces faibles. Les ux séries d'observations étaient raccordées par une expé-ence faite dans les mêmes conditions et simultanément par s deux méthodes.

Les résultats, calculés par Stoletow ([4]), conduisent à des leurs du coefficient d'aimantation d'abord croissantes et qui teignent un maximum de 110 ou 120, correspondant à des rces magnétisantes de 4 à 5 unités.

Stoletow a employé lui-même un anneau à section rectan-ılaire; il a trouvé des valeurs croissant de 21,5 à 174,2; le aximum a lieu pour un champ égal à 3,21. La courbe I g. 249) représente le coefficient k en fonction du champ après Stoletow; les courbes II et III se rapportent aux ex-riences de Quintus Icilius.

M. Rowland ([5]) a étudié, par la même méthode, plusieurs pèces de fer et d'acier sous la forme d'anneaux à section rculaire. Les courbes I, II et III (fig. 250) représentent l'ai-antation totale, l'aimantation temporaire et l'aimantation rmanente pour un bon fer de Norvège. Elles montrent que ccroissement de l'aimantation est très rapide pour les pe-es forces, que le magnétisme est d'abord uniquement tem-raire (et cet effet est encore plus marqué pour l'acier que

([1]) R. Thalen, *Nova acta R. S. Upsal*, 3e série, t. IV; 1863.
([2]) Riecke, *Pogg. Ann.*, t. CXLI, p. 543; 1870.
([3]) Quintus Icilius, *Pogg. Ann.*, t. CXXI, p. 125; 1864.
([4]) Stoletow, *Pogg. Ann.*, t. CXLVI, p. 442; 1872.
([5]) Rowland, *Phil. mag.* [4], t. XLVI, p. 140; 1888.

pour le fer), enfin que le maximum est atteint plus vite pc le magnétisme permanent que pour le magnétisme total.

M. Rowland emploie une traduction graphique qui par

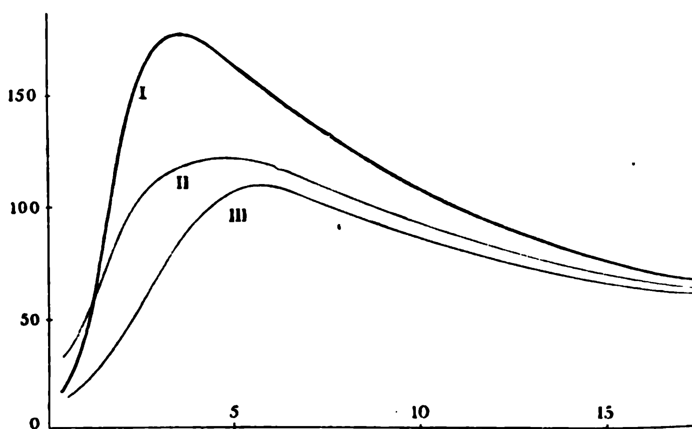


Fig. 249.

plus démonstrative parce qu'elle donne, pour toutes les aima tations, des courbes finies très régulières. Elle consiste

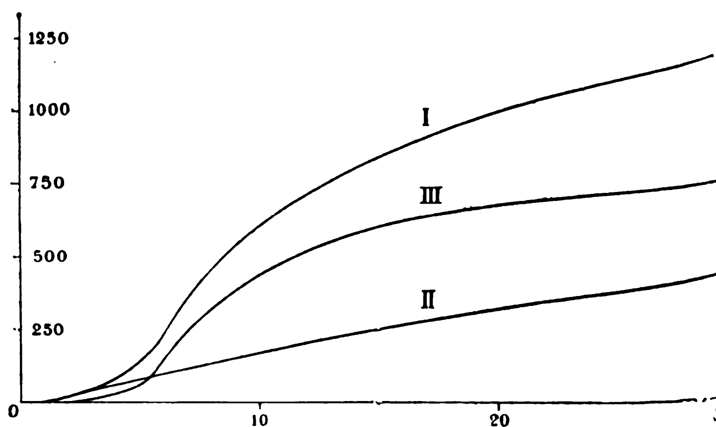


Fig. 250.

prendre comme abscisse l'aimantation A, ou l'induction n gnétique $F_1 = F + 4\pi A = \mu F$, et à porter en ordonnées la p méabilité magnétique μ, ou la quantité $\lambda = 4\pi\mu$.

‿es courbes ainsi obtenues (fig. 251) ont la forme de paraˌles inclinées et sont bien représentées par la formule

$$\lambda = \text{L} \sin \frac{\text{F}_1 + a\lambda + b}{c},$$

ns laquelle a, b et c, sont des constantes qui dépendent du :tal observé et L la valeur maximum de λ.

La figure se rapporte à une série d'observations sur un fer ·gé de bonne qualité. La constante L est égale à 30860, ce

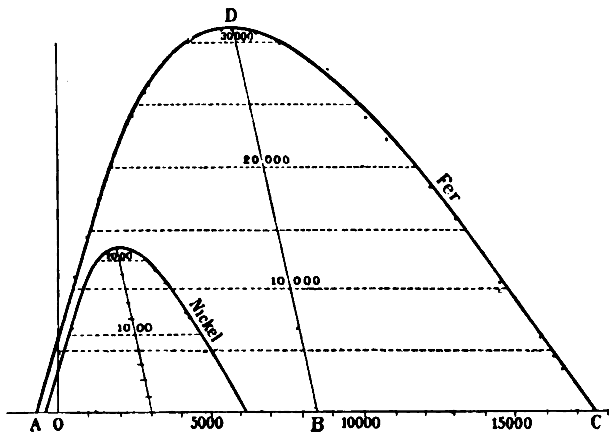


Fig. 251.

i donne $\mu = 2456$, ou $k = 195$, pour $\text{F}_1 = 5968$ ou $\text{F} = 2,43$.
: point où la courbe rencontre l'axe des x correspond au ıximum d'aimantation, qui serait de 1400 pour $\text{F}_1 = 17500$.
Le fer de Norvège déjà cité donnait $\text{L} = 57820$, ou $\mu = 4602$ $k = 366$, pour $\text{F}_1 = 5380$ ou $\text{F} = 1,169$.

Il est digne d'attention que les valeurs les plus élevées coefficient d'aimantation ont été obtenues par la méthode nduction appliquée à des pièces de fer doux en forme d'anaux, tandis que la mesure des moments magnétiques par ; déviations ne conduit pas à des nombres de même ordre. : telles différences peuvent tenir en partie aux défauts de la ẽthode d'observation, mais elles sont dues surtout à l'action magnétisante des tiges cylindriques. Cette action ne devient gligeable que si le rapport de la longueur du cylindre à son

diamètre est extrêmement grand ; on le reconnaît en employant simultanément les deux méthodes [1].

En opérant sur des tiges de fer aimantées dans le champ F d'une longue bobine cylindrique, on détermine le coefficient f d'aimantation moyenne et, par la décharge induite dans une bobine qui entoure la section centrale, l'induction correspondante que l'on peut écrire $4\pi A' = 4\pi f'' F$.

L'expérience montre d'abord que dans toutes les circonstances on a $f' > f$; très différents pour des cylindres courts, ces deux coefficients se rapprochent de plus en plus à mesure que la tige devient plus longue. En second lieu, le champ dans lequel se produit le maximum de f ou de f' est d'autant plus intense que la tige est plus courte.

Avec des fils de fer de même nature, quand la longueur variait de 40 à 600 fois le diamètre, la valeur maximum des coefficients f ou f' a varié de 25 à 190, ou de 40 à 220, lorsque les champs correspondants diminuaient depuis 20 unités jusqu'à 3 unités. Les mêmes fils, employés sous forme d'anneaux, donnaient pour k un maximum d'environ 200 avec un champ de 3 unités. La concordance de ces résultats peut être considérée comme suffisante.

On peut donc étudier les propriétés du fer avec des tiges cylindriques dont la longueur atteint 500 fois le diamètre : on y trouve l'avantage de connaître à chaque instant l'état magnétique du métal, qu'il est facile de désaimanter pour le soumettre à de nouvelles épreuves.

820. Hystérésis magnétique. — Les travaux de M. Ewing [2] ont appelé l'attention sur l'importance que présente le retard d'aimantation, ou l'hystérésis magnétique (**285**). Dans un cycle fermé, si A désigne l'aimantation, F la force magnétisante et F_1 l'induction, le travail perdu relatif à un corps de volume v a pour expression (**286**)

$$\mathfrak{T} = v \int A\, dF = v \int A\, dF_1 = \frac{v}{4\pi} \int F_1\, dF.$$

Il n'est pas inutile de montrer l'analogie de ce phénomène avec le frottement ordinaire. Imaginons qu'un corps soit placé

(1) E. Mascart, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CII, p. 992 ; 1886.
(2) Voir J. A. Ewing, *Magnetic induction in iron and others metals* : 1894.

sur un plan horizontal ; il est retenu d'un côté par un ressort, dont l'action R est proportionnelle à son changement de longueur x, et tiré de l'autre par une force F.

En appelant φ le frottement, les forces se font équilibre quand $F = R + \varphi$; si le corps se déplace dans ces conditions, le travail de F entre les positions x_0 et x_1 est

$$\int_0^1 F\,dx = \int_0^1 R\,dx + \int_0^1 \varphi\,dx.$$

Pour le mouvement en sens contraire, le frottement change de signe et la condition d'équilibre devient $F' = R - \varphi'$. Entre les positions x_1 et x_3, on a donc

$$\int_1^3 F'\,dx = \int_1^3 R\,dx - \int_1^3 \varphi'\,dx.$$

Lorsque le corps revient à sa position primitive, décrivant un cycle fermé, on a $x_3 = x_0$; le travail total du ressort est nul et celui de la force extérieure a pour expression

$$\mathfrak{T} = \int_0^1 (F - F')\,dx = \int_0^1 (\varphi + \varphi')\,dx,$$

laquelle se réduit à $2\varphi(x_1 - x_0)$ si le frottement est constant. Ce travail perdu se transforme en chaleur, comme celui qui correspond à l'aimantation. On peut remarquer encore que le frottement diminue beaucoup quand on maintient le corps en vibration, ce qui complète l'analogie.

Pour étudier la marche de l'aimantation, on peut employer du fer en anneau, en mesurant les décharges induites, ou la méthode des moments magnétiques avec des tiges dont la longueur est au moins 400 fois le diamètre. Comme l'aimantation A est sensiblement proportionnelle à l'induction F_1, les courbes qui représentent les valeurs de A ou de F_1 en fonction du champ F ont la même forme.

Les figures 252 et 253 donneront une idée du phénomène. Pour la première, le champ F a varié d'abord de 0 à 7, puis de + 7 à − 7, avec deux retours au zéro dans l'intervalle, ensuite de − 7 à + 7, retour au zéro, etc. A chaque suppression du champ il existe une aimantation résiduelle. L'induction maximum était voisine de 11000 et le premier résidu OB de 9000, soit 81 °/₀ ; ce résidu peut quelquefois atteindre 93 °/₀.

Avec du fer très doux, l'induction résiduelle a atteint 15000, ce qui correspond à une aimantation de 1200, tandis que les plus grandes aimantations obtenues pour l'acier sont de 780. Aux points d'inflexion des courbes, tels que C, le coefficient angulaire de la tangente n'est pas inférieur à 14500.

La figure 253 correspond à une suite de champs d'intensité croissante, avec retour au zéro dans les intervalles. Le résidu augmente à chaque opération; l'induction a finalement dépassé 16000, pour un champ de 23 unités, et le résidu était alors de 15000.

La fraction résiduelle d'aimantation croît d'abord avec le

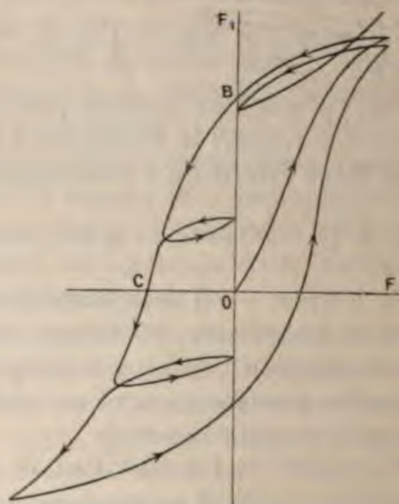


Fig. 252.

champ et passe par un maximum qui paraît avoir lieu au voisinage du point où la tangente à la courbe passe par l'origine, c'est-à-dire au *coude* de l'aimantation.

Lorsque le champ est alternatif, les courbes d'induction se modifient rapidement au début et ne tardent pas à prendre une forme régulière, en feuille de saule, lorsque le régime permanent est établi. M. Ewing a même imaginé un appareil qui permet de voir ou d'enregistrer par la photographie ces courbes d'aimantation. Le métal forme un circuit magnétique presque fermé, à l'exception d'un petit entrefer dans lequel

expression de la forme cF_m^n, dans laquelle c est un coefficient caractéristique de la matière, et dont la traduction en logarithmes donne une expression linéaire

$$\log S = \log c + n \log F_m = C + n \log F_m.$$

M. Steinmetz [1] indique pour l'exposant n la valeur constante 1,6. Les expériences de Lord Rayleigh donneraient $n = 3$ et celles de M. Ewing $n = 1,7$ pour les grandes aimantations. En opérant sur des alliages de fer et d'antimoine, avec des champs compris entre 0,8 et 3, M. Weiss [2] trouve que l'exposant n, d'abord égal à 2,17 pour un alliage contenant 43 °/₀ de fer, diminue progressivement vers 1,6 à mesure que la teneur en fer augmente.

Si l'on adopte la loi de Steinmetz, on peut ainsi calculer, pour chaque cycle, la perte d'énergie w_1 par unité de volume, la perte w par unité de masse et l'élévation θ de température. Pour un échantillon de fer recuit, par exemple, la valeur du coefficient c est voisine de 0,002 ; on obtient alors, en prenant 7,67 comme densité du métal,

F_m.	w_1.	w.	θ.
2 000	420	55	$12°.10^{-6}$
4 000	1 230	160	35
6 000	2 200	287	62
8 000	3 450	450	98
10 000	5 000	652	142
12 000	6 720	876	191
15 000	9 670	1261	275

S'il y a p périodes par seconde, l'élévation de température est $3600\,p\theta$ par heure et la puissance absorbée par gramme pw. Pour une fréquence égale à 100, la puissance absorbée dans le dernier cas serait de 126 000 par gramme, ou 126.10^{-4} watts, c'est-à-dire 12,6 kilowatts par tonne et l'élévation de température pendant une heure, abstraction faite des pertes dues au rayonnement, serait de 99°.

[1] STEINMETZ, *Am. Inst. of electr. eng.*, t. IX, p. 1 et 671 ; 1892.
[2] P. WEISS, *Société de Phys.*, 15 mai 1896.

Les pertes sont souvent beaucoup plus grandes. Par rapport au fer précédent, les coefficients seraient

Fil de fer étiré. . .	6,5	Corde de piano. . .	12,5
Fil d'acier recuit. .	7,6	» recuite. . . .	10,1
Acier trempé dur .	8,2	» trempée dur.	12,6

Cette absorption d'énergie par les alternatives d'aimantation a une importance particulière pour les *transformateurs* industriels (400). En outre, les fils ou les tôles n'ont jamais une section assez faible pour qu'il ne se produise pas des courants induits dans la masse de fer ; ces courants sont inutilisés localement et contribuent pour une grande part avec les courants des deux bobines, à l'échauffement de l'appareil.

821. Champs très faibles. — En opérant sur un anneau de fer doux par la méthode balistique, M. Baur [1] trouve que le coefficient k d'aimantation se représente par une droite qui ne part pas de l'origine. En unités C.G.S., ces expériences conduisent aux valeurs suivantes, au moins pour des champs compris entre 0,0158 et 0,384 :

$$k = 14,5 + 110\,\mathrm{F}, \qquad \mu = 183 + 1382\,\mathrm{F}.$$

Lord Rayleigh [2] a opéré sur des tiges dont la longueur était 100 fois le diamètre. Ces tiges étant perpendiculaires au méridien magnétique, on compense par une bobine b l'action de l'hélice magnétisante sur le déclinomètre et par une seconde bobine, située à une distance convenable, l'action due à l'aimantation de la tige. Pour des champs compris entre 0,04 et 0,00004, c'est-à-dire $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{5000}$ du champ terrestre, l'équilibre une fois établi persiste quelle que soit l'intensité du courant commun aux trois circuits ; l'expérience est particulièrement délicate quand on permute le courant d'une manière synchronique avec les oscillations du déclinomètre afin de multiplier les déviations. Il en résulte que l'aimantation reste proportionnelle au champ.

(1) C. Baur, *Wied. Ann.*, t. XI, p. 399 ; 1880.
(2) L. Rayleigh, *Phil. Mag.* [5], t. XXIII, p. 225 ; 1887.

Cette relation cesse quand le champ varie de 0,04 à 1,2; on a ainsi, avec le fer non recuit,

$$k = 6{,}4 + 5{,}1\,F, \qquad \mu = 81 + 64F.$$

Les résultats sont plus complexes quand on emploie du fer recuit. Dans un champ de 0,04 la compensation ne se maintient plus ; à la fermeture du courant, l'aiguille du déclinomètre reste d'abord immobile, puis elle prend une déviation croissante pendant 20 ou 30 secondes. Ce phénomène particulier de *trainage*, ou de *viscosité* magnétique, déjà observé par M. Ewing, se retrouve aussi dans la désaimantation, qui n'est pas instantanée quand on supprime le courant. Avec les champs de 0,02 à 0,002 le trainage paraît proportionnel au champ et atteint environ le dixième de l'aimantation instantanée.

Pour des champs plus élevés, de l'ordre du champ terrestre, l'excès d'aimantation paraît proportionnel à F^2, même quand on produit des alternances ; en outre, les phénomènes de viscosité apparaissent. Si l'échantillon étudié a une aimantation primitive, on la compense par un aimant et la même méthode s'applique ; la compensation du magnétisme ajouté reste exacte dans les mêmes limites de variation du champ.

Cette étude de la viscosité a été reprise par M. Ewing avec des tiges de 400 diamètres, disposées dans une direction verticale, pour éviter l'influence du déplacement des pôles. Quand la compensation est bien établie, l'aiguille du déclinomètre reste immobile à la fermeture du courant et se meut ensuite pendant plus d'une minute comme dans un milieu visqueux. Le trainage a été la moitié ou les deux tiers de l'aimantation instantanée dans des champs de 0,044 ou 0,084 ; le coefficient instantané d'aimantation était d'abord égal à 9,9 et augmenta jusqu'à 15 après trainage.

L'application prolongée du champ donne au métal une sorte de trempe qui augmente beaucoup, quelquefois jusqu'à une heure, la durée d'aimantation définitive.

Tous ces effets ne se manifestent plus dans le fer écroui ou l'acier ; ils s'atténuent quand on augmente le nombre de fils qui constituent le faisceau aimanté et quand on diminue leur

amètre. Il est facile de voir qu'on ne peut les expliquer par s courants induits dans le fer lui-même, car ces courants amortissent en une fraction de seconde.

Les valeurs les plus élevées obtenues par M. Ewing dans s champs de l'ordre de 0,2 ont été $\mu = 20000$ et $k = 1600$.

822. Champs très intenses. — Dans le cas extrême de champs ès intenses, MM. Ewing et Low ont employé une disposion dite *méthode de l'isthme*. Les armatures d'un électromant forment un circuit magnétique presque fermé, les pôles ant terminés par des pièces en tronc de cône dont les parties s plus minces sont rapprochées à une petite distance ; on ace dans cet intervalle un cylindre de fer, qui forme ainsi sthme d'un canal étroit de flux d'induction. On mesure l'inıction par la décharge dans une bobine qui couvre le cylindre, le champ s'évalue par différence au moyen d'une seconde bine, de diamètre plus grand, qui entoure la première ; suiınt la manière de relier ces deux bobines, les décharges du ılvanomètre balistique correspondent à la somme ou à la fférence des décharges. Les impulsions du galvanomètre observent quand on enlève le cylindre de fer ou qu'on renrse le courant d'aimantation.

Il est préférable encore de terminer les pièces polaires par s surfaces sphériques concaves dans l'intervalle desquelles t placé le cylindre muni de ses bobines. Dans ce cas, le tournement du cylindre bout pour bout donne le double de nduction totale.

L'expérience montre, comme il était à prévoir, que l'aimantion n'augmente plus quand le champ varie de 7000 à 11200 même à 24500 ; l'induction continue de croître et ses vaations sont proportionnelles à celles du champ.

M. Du Bois [1] utilise la rotation du plan de polarisation ı'éprouve la lumière réfléchie sur un des pôles de l'électromant (489), après s'être assuré que cette rotation est proortionnelle à l'aimantation, par un coefficient qui ne dépend ue de la nature du métal et de la radiation employée. Les sultats ainsi obtenus sont tout-à-fait analogues à ceux que urnissent les autres méthodes.

[1] H. Du Bois, *Ph. Mag.* [5], t. XXIX, p. 293; 1890.

823. Nickel et cobalt. — M. Rowland trouve que les phénomènes, à la grandeur près, suivent la même marche que dans le cas du fer (fig. 251). A la température ordinaire, le maximum d'aimantation serait de 500 environ pour le nickel et 800 pour le cobalt. La perméabilité maximum est environ 10 fois plus grande pour le cobalt doux que pour le métal trempé. Le nickel laminé est aussi plus coercitif que le métal fondu ; l'aimantation permanente est alors supérieure à l'aimantation temporaire [1].

Les expériences ultérieures de MM. Ewing et Low, faites sur des barres cylindriques, ont montré d'ailleurs que l'on y retrouve encore tous les effets d'hystérésis ; elles conduisent toutefois à des valeurs notablement plus faibles pour le maximum d'aimantation.

824. Influence de la température. — D'après M. Rowland, la perméabilité du *fer* varie très peu entre les températures de 0° et 280° ; les expériences de M. Berson porteraient même la limite supérieure jusqu'à 330°.

Au-delà, l'aimantation s'affaiblit rapidement ; elle serait nulle à 760° ou plutôt entre 690° et 870° suivant les échantillons [2], c'est-à-dire au voisinage du point critique où le métal éprouve un changement de constitution qui se traduit par l'ensemble de ses autres propriétés. La trempe modifie d'ailleurs beaucoup les propriétés du métal.

Toutefois, par une méthode sur laquelle nous reviendrons plus loin, M. P. Curie trouve qu'au dessus de 700° le fer passe progressivement de l'état très magnétique à celui des corps faiblement magnétiques dont le coefficient d'aimantation est constant. Ce coefficient diminue assez vite de 750° à 950°, puis lentement jusqu'à 1280°, température à laquelle il augmente brusquement de la moitié de sa valeur, pour diminuer ensuite régulièrement jusqu'à 1365°.

M. Hopkinson a constaté aussi que l'aimantation maximum s'obtient avec des champs d'autant plus faibles que la température est plus élevée. Dans un cycle de températures qui comprend le point critique, l'aimantation n'est pas la même sur

(1) G. Berson, *Ann. de Ch. et de Phys.* [6], t. VIII, p. 432 ; 1886.

(2) Ledeboer, *Journ. de Phys.* [2], t. VII, p. 199 ; 1888. — Hopkinson, *Phil. Tr. L. R. S.*; 1889, p. 443. — *Proc. L. R. S.*; 1888, 1889 et 1890.

es chemins d'aller et de retour ; il se manifeste donc une ıystérésis particulière qui semble correspondre aux effets de 'ecalescence observés par M. Osmond.

Les alliages de *fer et de nickel* présentent des particularités ;ingulières. Si l'on chauffe, par exemple, un alliage à 25 °/₀ de ıickel depuis — 50°, pour le ramener à la température primi-.ive, la susceptibilité magnétique croît d'abord, puis éprouve ın changement brusque vers 450° et diminue ensuite rapidenent pour s'annuler à 600° ; elle reste ensuite nulle pendant e refroidissement jusqu'à zéro. L'alliage est donc, suivant les :irconstances, magnétique ou non magnétique.

Pour le *nickel* (¹), l'aimantation croît d'abord avec le champ,

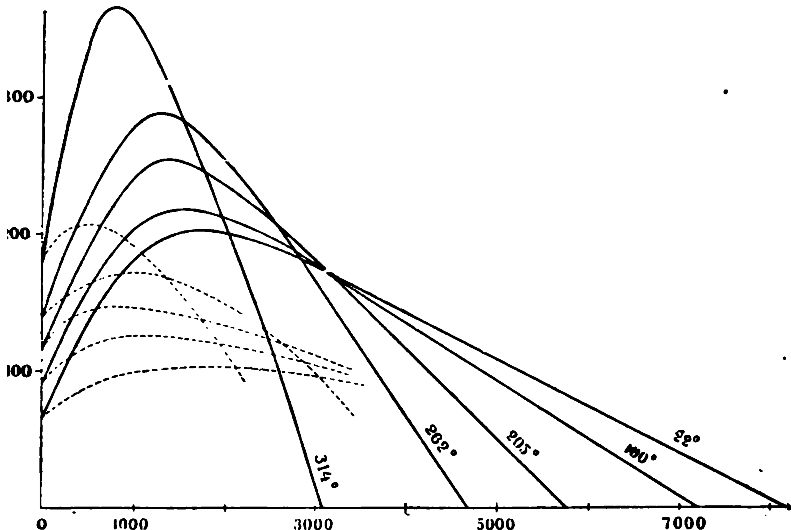


Fig. 254.

ıasse par un maximum et finit par s'annuler, mais la valeur lu maximum et le champ correspondant varient beaucoup ıvec la température, comme on le voit sur les traits pleins de .a figure 254, empruntée à M. Perkins.

Les courbes pointillées se rapportent au magnétisme temporaire ; elles ont le même caractère et partent de la même

(¹) Rowland, *Ph. Mag.* [4], t. XLVIII, p. 321 ; 1874. — Perkins, *Am. Journ. of Sc.*, t. XXX, p. 218 ; 1885.

origine que celles du magnétisme total, c'est-à-dire que l'aimantation produite par les champs très faibles est uniquement temporaire.

D'après M. Berson, l'aimantation temporaire croît de 0° jusqu'à 250° ou 260° et diminue ensuite pour s'annuler vers 340°, tandis que l'aimantation résiduelle décroît d'une manière continue à mesure que la température s'élève et s'annule vers 330°. Quant à l'aimantation totale, elle croît lentement jusqu'à 200°, puis diminue et devient nulle à 340°.

Le magnétisme d'un barreau de nickel aimanté à froid s'affaiblit graduellement quand on le chauffe et disparaît vers 330° ; mais, si l'aimantation a été produite de 200° à 290°, le magnétisme résiduel augmente d'abord par refroidissement pour diminuer ensuite, tout en restant à la température ordinaire supérieur à sa valeur primitive.

M. Curie a constaté aussi que le nickel éprouve une transformation vers 340° ; le coefficient d'aimantation devient ensuite indépendant du champ et diminue rapidement à mesure que la température s'élève.

Le *cobalt* se comporte autrement. Les aimantations temporaire et résiduelle vont toujours en croissant avec la température, entre 20° et 325°, et le magnétisme résiduel diminue toujours quand on s'éloigne de la température d'aimantation, dans un sens ou dans l'autre.

825. Aciers et fontes. — Quand un aimant d'acier trempé est arrivé à l'état permanent, les variations modérées de température ne produisent qu'une altération temporaire (229) ; l'aimantation subit un affaiblissement définitif si on l'a chauffé jusqu'à 100°, et elle disparaît entièrement vers 350°.

Les températures basses paraissent avoir un effet analogue. Dans un mélange d'acide carbonique solide et d'éther ([1]), par exemple, un aimant avait perdu les deux tiers de son magnétisme ; l'aimantation se releva à la température primitive, mais le moment magnétique avait diminué de moitié.

Les propriétés de l'*acier* et des *fontes* sont tellement variables, suivant leur constitution, le degré et le mode de trempe, les dimensions des barreaux ainsi que les aimantations suc-

([1]) J. Trowbridge, *Am. Journ.*, t. XXI, p. 316 ; 1881. — *Journ. de Phys.* [2], t. I, p. 150 ; 1882.

cessives qu'ils ont subies, dans le même sens ou en sens contraires, que le magnétisme final peut être très irrégulier; cette étude présente donc de grandes difficultés.

L'influence des substances étrangères peut se traduire par une modification profonde de l'aimantation. Ainsi, pour un acier contenant 12 °/₀ de manganèse et 1 °/₀ de carbone, la perméabilité est voisine de 1,4; elle varie peu avec le champ et le magnétisme résiduel est sensiblement nul. Le métal est donc à peine magnétique [1]. Un acier contenant 25 °/₀ de nickel se comporte de la même manière ; en outre, il présente la particularité singulière de devenir fortement magnétique à une température même peu élevée et de rester ensuite magnétique quand on le ramène à la température ordinaire.

M. Weiss a obtenu des résultats analogues avec les alliages de *fer* et d'*antimoine*. La valeur initiale du coefficient d'aimantation, c'est-à-dire pour de faibles champs, a été, suivant les proportions du fer,

Fer.	*k*.	Fer.	*k*.
26,0 °/₀	0,00009	42,7 °/₀	0,125
33,9	0,00050	51,2	0,33
38,6	0,0051	56,8	1,06

Dans tous les cas, le coefficient est beaucoup moindre que celui qui serait dû au fer contenu dans l'alliage. Il y a même une variation brusque, qui semble correspondre à la formation du composé défini Sb^3F^4.

MM. Barus et Strouhal [2] ont cherché les relations qui peuvent exister entre les qualités magnétiques et les autres propriétés des différentes variétés de *fer*, d'*acier* et de *fonte*.

La résistivité, par exemple, qui est d'environ 10 microhms pour le fer doux, s'élève à près de 100 microhms pour la fonte dure et varie de 47 à 15 pour l'acier, suivant le degré de recuit. Le coefficient de variation avec la température se modifie d'une manière continue avec la résistivité : dans la figure 255, les résistivités sont portées en abscisses, les ordonnées représentant la variation pour 1° à partir de zéro.

(1) Hopkinson, *Proced. L. R. S.*; 1889 et 1890.
(2) Barus et Strouhal, *Bull. of U. S. Geolog. Survey*, n° 14. p. 1; 1885.

Le pouvoir thermo-électrique varie aussi avec la résistance et dans le même rapport. Il serait donc équivalent de définir les qualités d'un acier par sa résistivité ou par son pouvoir thermo-électrique.

Le recuit agit également d'une manière très marquée, même pour les températures inférieures à 100°, et son influence augmente avec le temps vers une limite définie.

Des barreaux très minces d'acier, connu sous le nom de *silver steel*, étaient d'abord portés au rouge par un courant,

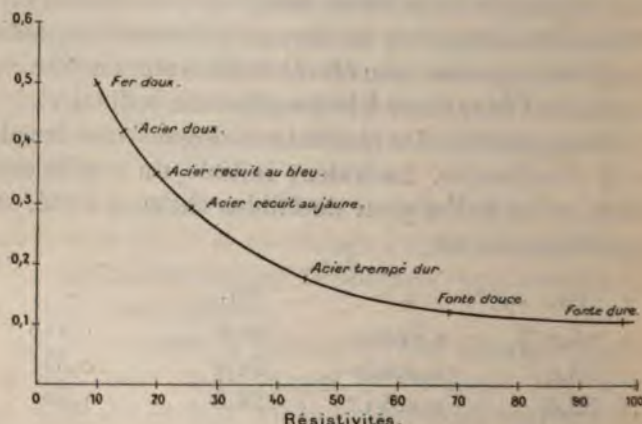


Fig. 255.

puis trempés à l'eau ; on les aimantait alors à saturation par une bobine dont on faisait croître le courant lentement jusqu'à une valeur fixe, pour l'abaisser de même, et on déterminait l'aimantation permanente. Le barreau était ensuite recuit à des températures successives, plus ou moins longtemps, puis aimanté de nouveau comme précédemment et dans le même sens. La résistivité a varié de la manière suivante :

Barreau trempé dur.	47,2 micromhs.
Recuit de 1h à 10h à 100°.	42,0 à 37,4
» de 20m à 13h à 185°.	31,5 à 24,8
» 10m à 240°	24,0
» 10m à 330°	20,0
» 1h à 420°.	17,5
» au rouge	15,7

Les courbes de la figure 256 représentent le moment magnétique par gramme, ou moment spécifique, qui correspond aux divers degrés de recuit ou de résistivité, pour des barreaux ayant le même diamètre $0^c,15$ et des longueurs respectivement égales à 10, 20, 30, 40 et 50 fois le diamètre.

On voit que le recuit commence par faire croître le moment spécifique jusqu'à un maximum qui est atteint pour un recuit d'autant plus faible que le barreau est plus long. Le

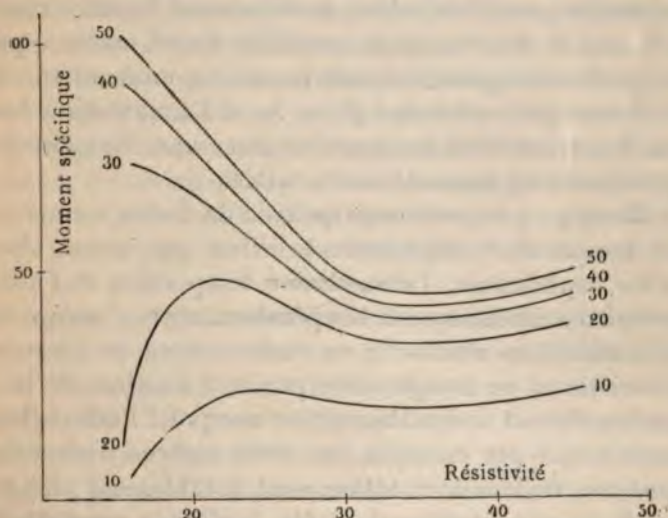


Fig. 256.

moment diminue ensuite très rapidement et retombe à une valeur très faible pour l'acier recuit au rouge ou tout à fait doux. Avec les barreaux longs recuits au bleu, on peut obtenir un moment spécifique dépassant 100 unités C.G.S, autrement dit une aimantation égale à 780 ; c'est la moitié environ de l'aimantation maximum du fer doux.

La grandeur du moment spécifique n'est pas la seule qualité à considérer dans un aimant ; il faut encore que ce moment reste aussi constant que possible et n'éprouve aucune altération permanente par l'effet des changements de température, des chocs, des vibrations et du temps.

D'autre part, si on fait recuire un barreau à une tempéra-

ture déterminée pendant un temps suffisant à des intervalles quelconques, en le réaimantant chaque fois, on finit par le rendre insensible, quant au moment permanent, à l'action de toute température inférieure à celle du recuit. On obtiendrait des aimants satisfaisant le mieux possible aux conditions de permanence, en les portant pendant 20 ou 30 heures en une ou plusieurs fois dans la vapeur d'eau à 100°, les aimantant à saturation, les soumettant de nouveau à l'action de la vapeur pendant 5 ou 6 heures et les aimantant une dernière fois. Les aimants possèdent alors la résistance limite correspondant à 100° et ne sont plus modifiés d'une manière permanente par les températures inférieures. Le moment spécifique ainsi obtenu peut atteindre 45 ou 50 et l'aimantation 300 environ. Les variations temporaires dues aux changements de température sont également très faibles.

M. Berson a constaté aussi qu'avec de l'acier trempé recuit à une température supérieure à celles qui seront atteintes dans les expériences, l'aimantation temporaire et l'aimantation totale croissent avec la température, entre 0° et 340°, tandis que l'aimantation résiduelle va constamment en décroissant. Les variations de température pendant l'action de la force magnétisante ont une influence très marquée. Pour un barreau aimanté à 290° par exemple, les trois espèces d'aimantation, temporaire, résiduelle et totale, sont notablement plus petites que si la force magnétisante a été appliquée pendant que la température s'élève de 240° à 290°.

Il se présente même des cas singuliers d'équilibre instable. Un barreau d'acier trempé et non recuit, aimanté à 240° et refroidi brusquement aussitôt après l'aimantation, garde une aimantation résiduelle notablement supérieure à celle qu'il aurait prise à froid sous l'action de la même force magnétisante. Mais le barreau est pour ainsi dire sursaturé, car cette aimantation disparait sous l'influence des chocs et des trépidations, beaucoup plus vite que celle qui serait produite dans les conditions ordinaires.

D'après M. Curie, la température de transformation magnétique de la fonte blanche est de 670° et la fusion du métal n'a aucune influence. La fonte est donc assimilable à un corps faiblement magnétique plus tôt que le fer doux.

826. Actions mécaniques. — L'influence des actions méca-iques sur l'aimantation est un fait très anciennement connu. n coup de marteau frappé à l'extrémité d'une barre de fer oux placée verticalement dans le champ terrestre rend per-ıanente l'aimantation induite; un nouveau coup sur la barre uand elle est perpendiculaire au champ lui enlève son ma-nétisme. On peut dire, en général, que toute *vibration* vient ı aide aux forces magnétiques, comme si elle facilitait l'o-entation des molécules, soit pour s'aimanter dans un champ, ›it pour obéir à leurs actions mutuelles démagnétisantes.

Les courbes d'aimantation sont alors profondément modi-ées. Si l'on soumet le fer à une force magnétisante qui croît une manière continue et qu'on donne au métal une série de ıocs, le magnétisme monte brusquement à chaque vibration; endant le retour du champ à zéro, les chocs produisent égale-ent des baisses rapides du magnétisme. Le cycle ainsi ob-nu se traduit par une courbe fermée à échelons dont la sur-ce est très petite.

La surface est encore moindre lorsque le fer est entretenu ı vibration continue; c'est ce qui a lieu en réalité dans la upart des appareils industriels, *dynamos*, *transformateurs* ı *téléphones*. La perte d'énergie que l'on doit rapporter ›écialement au phénomène d'hystérésis est donc beaucoup us faible que ne l'indiqueraient les cycles d'aimantation sur métal en repos.

Joule (1) a constaté aussi qu'un fil de fer s'allonge par l'ai-antation, sans revenir à sa longueur primitive quand on pprime le champ. Le fil s'allonge moins quand il est déjà ndu et se raccourcit lorsque la tension est voisine de celle ıi produirait la rupture.

Le cobalt se comporte comme le fer et l'effet est inverse ›ur le nickel. Avec une même force magnétisante, les varia-›ns de longueur, d'après M. Barrett (2), seraient 4.10^{-6} pour fer, $2,35.10^{-6}$ pour le cobalt et 8.10^{-6} pour le nickel.

M. Bidwell emploie les métaux sous forme de tores, en me-rant les variations de longueur d'un diamètre au moyen ın levier amplificateur et d'un miroir. Le fer se dilate pour

(1) JOULE, *Ann. of El.*, t. VIII, p, 219; 1842. — *Ph. Mag.* [3], t. XXX; 1847.
(2) BARRETT, *Nature*, t. XXVI, p. 585; 1882.

des forces magnétisantes inférieures à une certaine limite, à partir de laquelle il se contracte et tend vers une longueur définie. Le nickel se contracte d'abord rapidement, puis d'une manière très lente. Le cobalt se comporte à l'inverse du fer, contraction dans les champs faibles et dilatation dans les champs plus intenses. Le fer trempé se dilate moins que le fer doux et passe plus vite à la période de contraction. On peut même, en recuisant le fer après la trempe, l'amener à un état pour lequel la variation de longueur est toujours négative, même pour les champs faibles. Dans les différents cas, les métaux ne reprennent pas leur longueur primitive après un cycle d'aimantation (1).

Comme phénomène corrélatif, Lord Kelvin (2) montra que la *tension* augmente l'aimantation du fer et diminue celle du nickel. Pour le fer, l'accroissement d'aimantation produit par la tension augmente d'abord avec le champ, passe par un maximum, puis s'annule ; au-delà de cette valeur critique du champ, la tension diminue l'aimantation. Il paraît en être de même pour les variations inverses du nickel, mais la valeur critique du champ serait beaucoup plus élevée.

L'importance des effets de tension est d'autant plus grande que le fer est plus dur. En outre, si l'on fait varier le poids tenseur suivant un cycle fermé, l'aimantation est plus faible ou plus grande dans la période de retour, suivant qu'elle a diminué ou augmenté par la tension, mais la courbe d'aimantation ne prend une forme définitive qu'après plusieurs opérations répétées. Cette forme nouvelle d'hystérésis est statique, c'est-à-dire que chaque point de la courbe d'aimantation est indépendant du temps pendant lequel agit la charge et de l'intervalle qui sépare l'application de poids différents. La nature des modifications change aussi de caractère quand on dépasse la limite d'élasticité du métal.

La susceptibilité magnétique du fer est modifiée même si la traction a été produite avant l'aimantation, mais cette altération résiduelle disparaît par les vibrations ou par l'action des champs alternatifs.

(1) Sh. Bidwell, *Proc. L. R. S.*; 1886 et 1890. — Chree, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1890, p. 329. — N. Nagoaka, *Ph. Mag.* [5], t. XXXVII, p. 131; 1894.
(2) Sir W. Thomson, *Proc. L. R. S.*; 1875 et 1878. — *Ph. Trans.*; 1877.

La *compression* produit un effet de sens contraire ; elle augmente le magnétisme du nickel. Pour le cobalt, la compression augmente le magnétisme quand il est faible et le diminue dans les champs plus intenses. On devrait observer exactement l'inverse avec le fer.

Ces déformations qui accompagnent l'aimantation doivent intervenir pour une part dans les sons rendus par le fer ou l'acier soumis à une succession rapide de champs alternatifs, comme dans le téléphone et les transformateurs.

L'influence de la *torsion*, observée d'abord par Matteucci [1], a été particulièrement étudiée par M. Wiedemann [2]. L'aimantation du fer est réduite par la torsion dans un sens ou dans l'autre, mais elle ne reprend pas sa valeur primitive quand on ramène le fer à son état initial.

On peut en déduire (505) qu'un fil aimanté circulairement doit prendre une aimantation longitudinale si on le tord ; c'est ce que M. Wiedemann a constaté en faisant traverser le fil par un courant. De même, quand un fil est aimanté dans le sens longitudinal, il prend une aimantation circulaire par la torsion ; il est donc parcouru par un courant instantané qu'on manifestera au galvanomètre balistique. Ce courant est de sens contraire pour le nickel [3].

M. Wiedemann a reconnu également que l'aimantation longitudinale modifie la torsion d'un fil de fer. Cette torsion est toujours augmentée quel que soit le sens de l'aimantation. D'après M. Smith [4], la torsion magnétique croît d'abord avec le champ et la torsion initiale, pour diminuer ensuite ; le nickel présente le même caractère à un moindre degré.

M. Moreau [5] trouve que si une bobine magnétisante est placée au milieu d'un fil tordu, deux points du fil situés de part et d'autre à la même distance du centre éprouvent des torsions magnétiques égales et de signes contraires ; ces torsions temporaires sont d'abord proportionnelles au champ et indépendantes du diamètre pour les fils très fins. Les phéno-

(1) MATTEUCCI, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XXIV, p. 301 ; 1847.
(2) G. WIEDEMANN, *Pogg. Ann.*, t. CIII, p. 563 ; 1858.
(3) H. NAGOAKA, *Phil. Mag.* [5], t. XXIX, p. 123 ; 1890.
(4) F. J. SMITH, *Ph. Mag.* [5], t. XXXII, p. 383 ; 1891.
(5) G. MOREAU *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXXII, p. 1192 ; 1896.

mènes pourraient s'expliquer d'une manière suffisante par une dilatation longitudinale et une contraction transversale dues à la variation du champ sur l'axe de la bobine.

CORPS PEU MAGNÉTIQUES.

827. Méthodes d'observation. — Après le fer, le nickel et le cobalt, les corps les plus magnétiques sont les oxydes et les sels de fer, mais dans une proportion beaucoup moindre; l'aimantation est encore bien plus faible quand on passe aux corps diamagnétiques. L'expérience présente alors des difficultés spéciales et les moindres traces de fer dans les substances employées peuvent entraîner de graves erreurs.

Dans ce cas, la réaction qui s'exerce entre les différents éléments du corps aimanté est en général négligeable et l'on a recours, sous diverses formes, aux déplacements produits par un champ non uniforme (279). La variation d'énergie d'un petit volume v dans le champ F étant $-\frac{v}{2}k\,d\mathrm{F}^2$, la composante de l'action qu'il subit suivant l'axe des x a pour expression

$$\mathrm{X}=\frac{v}{2}k\frac{\partial \mathrm{F}^2}{\partial x}=vk\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}.$$

Lorsque l'aimantation est très faible, on doit tenir compte du milieu qui entoure les corps et, en particulier, de l'air ambiant. Dans ce cas, l'expérience donne la différence des coefficients relatifs au corps et au milieu (271).

Pour les expériences de comparaison, on fait en sorte que le champ, produit par des aimants ou des courants, reste invariable; la susceptibilité est alors proportionnelle à l'action par unité de volume.

Le procédé le plus direct consiste à placer la substance que l'on veut étudier, une petite sphère par exemple, à l'extrémité d'une aiguille suspendue par un fil métallique et à déterminer la torsion α nécessaire pour ramener l'aiguille dans sa position primitive.

En appelant l le bras de levier et C le coefficient de tor-
on du fil, la condition d'équilibre devient

$$C\alpha = Xl = vlkF\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Si l'on emploie, comme le faisait Faraday, des électro-
mants munis d'armatures symétriques par rapport à l'axe
ommun et à un plan perpendiculaire, le corps sera placé dans
plan de symétrie, en dehors du centre et autant que pos-
ble au point où la dérivée du carré du champ par rapport
la direction possible du déplacement soit maximum.

M. Curie [1] se sert de deux électro-aimants dont les axes
nt dirigés vers le même point, mais formant entre eux un
rtain angle, un peu plus grand que 90°, et dispose l'aiguille
manière que le corps soit mobile suivant la bissectrice.

L'action du champ peut encore être équilibrée par la ba-
nce [2]; cette disposition convient en particulier pour les
z ou les liquides. Un ballon contenant la substance est si-
é au-dessus des pôles de l'électro-aimant et suspendu à un
au de balance; on compense par des poids l'effet dû au
amp magnétique.

M. Becquerel a employé aussi des électro-aimants de même
e, munis d'armatures symétriques par rapport au centre
ais dissymétriques par rapport au plan perpendiculaire, et
ace dans ce champ une aiguille de la substance à étudier.
ésignant par θ l'angle que fait l'aiguille avec l'axe commun
s bobines, le couple produit sur chaque élément de volume
t $kF\frac{\partial F}{\partial \theta}dv$ et la torsion α qui équilibre le couple total a pour
pression

$$C\alpha = k\int F\frac{\partial F}{\partial \theta}dv = kM.$$

Le facteur M est une quantité constante pour des aiguilles
même forme placées dans le même champ, pourvu que la
sition d'équilibre ne soit pas modifiée.

(1) P. Curie, *Ann. de Ch. et de Phys.* [7], t. V, p. 289; 1895.
(2) Ed. Becquerel, *Ann. de Ch. et de Phys.* [3], t. XXXII, p. 68; 1851.

Enfin, si le champ normal à l'axe de rotation est symétrique par rapport à deux directions rectangulaires (282), on peut encore observer les oscillations d'une petite aiguille portée par un fil sans torsion. La durée t des oscillations simples de faible amplitude donnera encore la susceptibilité magnétique k par l'expression

$$k = \frac{\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{D}{A+B},$$

dans laquelle D désigne la densité de la substance, A et B deux constantes définies par la forme du champ dans la région où se trouve l'aiguille.

828. Corps diamagnétiques. — Les mêmes méthodes s'appliquent aux corps diamagnétiques, avec cette seule différence que le coefficient k change de signe et que toutes les actions sont de sens contraires. Pour une aiguille oscillante, par exemple, la position d'équilibre serait perpendiculaire à la direction du champ.

Au moment de la découverte du diamagnétisme, Faraday l'avait expliqué d'abord en admettant que les corps prennent une polarité inverse de celle du fer. Il parut ensuite abandonner cette première idée après avoir montré que les corps marchent vers les points de champ maximum ou minimum suivant qu'ils sont magnétiques ou diamagnétiques. Ces deux vues, en apparence différentes, sont au fond identiques, d'après l'interprétation donnée par Lord Kelvin.

Deux expériences de Tyndall (1) mettent bien en évidence la polarité inverse du bismuth.

Un barreau de bismuth est suspendu horizontalement dans une bobine magnétisante, de manière que ses extrémités soient placées respectivement au voisinage de deux pôles d'un électro-aimant situés latéralement.

Quand on fait passer le courant d'aimantation, le barreau se dévie dans une direction opposée à celle qu'on observerait avec un barreau de fer ; cette déviation change d'ailleurs de sens avec le courant d'aimantation.

Pour la seconde expérience, dont le principe est emprunté

(1) TYNDALL, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1855, p. 24.

à Weber ([1]), l'appareil se compose de deux bobines verticales A B et A'B', placées côte à côte (fig. 257). Un fil sans fin *f*, passant sur des poulies de renvoi, porte deux barreaux de bismuth *ab* et *a'b'*. Deux aiguilles aimantées *ns* et *n's'*, formant un système presque astatique, sont situées dans un même plan horizontal de part et d'autre des bobines. Les bobines A et A' sont parcourues par un courant en sens contraires ; leur action propre sur le système d'aiguilles est très

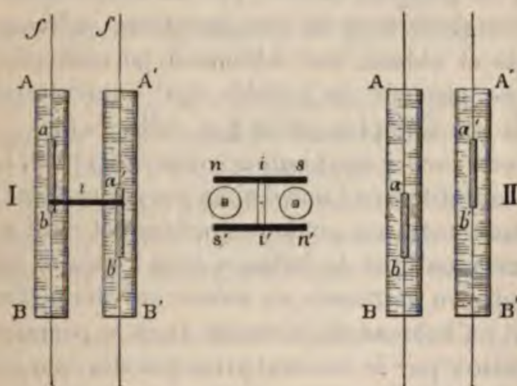


Fig. 257.

faible et on le compense par une bobine auxiliaire que traversera le courant commun.

La déviation produite par les barreaux de bismuth change de sens suivant qu'ils occupent la position I ou la position II ; l'effet produit dans les deux cas est inverse de celui qu'on obtiendrait avec un corps magnétique.

On peut encore augmenter ces déviations en imprimant aux barreaux un mouvement de va-et-vient en concordance avec les oscillations du système d'aiguilles ; ces déplacements ne produisent d'ailleurs aucun courant induit appréciable, car le champ des bobines est sensiblement uniforme et l'effet est presque nul quand on remplace les barreaux de bismuth par des barreaux de cuivre.

829. Méthodes d'induction. — Une autre disposition, due à Faraday, consiste à employer une longue bobine magnéti-

([1]) W. Weber, *El. Maasb.*, *Diamag.* — *Abh. des K. G. S.*, t. I, p. 483 ; 1852.

sante B, dans laquelle se trouve une seconde bobine b dont les deux moitiés sont enroulées en sens contraires et réunies à un galvanomètre sensible. Un barreau de bismuth occupe la partie moyenne de ces deux bobines. Quant on le déplace suivant l'axe, son aimantation ne change pas, mais les pôles développent dans les deux moitiés de la bobine b des courants induits qui s'ajoutent. Il suffit de combiner ces mouvements avec ceux de l'aiguille du galvanomètre pour multiplier les déviations ; on pourrait encore, par un mouvement rapide de va-et-vient combiné avec un commutateur, redresser les courants induits et obtenir une déviation permanente. Weber a trouvé par ce procédé qu'à poids égal l'aimantation du bismuth est 456 000 fois plus petite que celle du fer.

Considérons encore deux bobines concentriques. L'établissement d'un courant dans l'une d'elles provoque dans l'autre un courant induit, mais on peut compenser cet effet avec un second système identique de bobines dont l'induite est enroulée en sens contraire et réunie au même galvanomètre. Si alors on introduit un barreau de bismuth dans le premier système, son aimantation par le courant principal diminue l'induction; la déviation du galvanomètre indique la différence des deux effets et permet de déterminer le coefficient k.

Il est vrai qu'un noyau conducteur, sans propriétés magnétiques, donnerait aussi une diminution de même ordre par suite des courants induits dans la masse, mais il est facile de s'assurer que l'effet produit par un barreau de cuivre est beaucoup moindre que pour le bismuth. Toutefois, il y a là une cause d'erreur qui peut être notable si les corps ne sont pas mauvais conducteurs : elle tend à donner une valeur trop grande pour le coefficient de diamagnétisme.

830. Corps anisotropes. — Dans un champ qui n'est pas uniforme, l'action produite sur un corps homogène anisotrope (498) donne lieu à des phénomènes très complexes, parce que chaque élément de volume est attiré vers les régions de maximum ou de minimum, suivant qu'il est magnétique ou diamagnétique, en même temps que l'axe de plus grande aimantation tend à prendre une direction parallèle ou perpendiculaire au champ.

Considérons un corps homogène de volume v, dont les

coefficients principaux d'aimantation sont a, b et c. Dans un champ uniforme F, dont les cosinus directeurs par rapport aux axes principaux d'aimantation sont α', β' et γ', les composantes du moment magnétique sont (497)

$$M_1 = \nu a \alpha' F, \qquad M_2 = \nu b \beta' F, \qquad M_3 = \nu c \gamma' F.$$

Les couples relatifs aux trois axes ont pour expressions

$$\frac{C_1}{(b-c)\beta'\gamma'} = \frac{C_2}{(c-a)\gamma'\alpha'} = \frac{C_3}{(a-b)\alpha'\beta'} = \nu F^2.$$

Lorsque la structure est symétrique par rapport à une droite, l'axe des z par exemple, il en résulte $a = b$ et la valeur du couple C_3 relatif à cet axe est nulle.

Autour d'une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie, la composante normale H du champ est seule efficace. En appelant δ l'angle de ce champ avec l'axe de symétrie, on aura

$$C_2 = \nu H^2 (c-a) \sin\delta \cos\delta.$$

L'équilibre a lieu quand l'axe de symétrie est parallèle ou perpendiculaire à H, suivant que $c > a$ ou $c < a$.

On mesurera ce couple par une méthode de torsion, par exemple en portant le corps par un bifilaire dont le coefficient est C et que l'on a tourné de l'angle α, ce qui donne

$$c - a = \frac{2C \sin(\alpha - \delta)}{\nu H^2 \sin 2\delta}.$$

Si le corps est suspendu à un fil sans torsion et oscille librement, le couple directeur est $\nu H^2 (c-a)$. En appelant D sa densité, ρ son rayon de giration et n le nombre des oscillations simples par seconde, on aura

$$c - a = n^2 \pi^2 \frac{D\rho^2}{H^2}.$$

Tel est le cas du *bismuth* [1], dont la forme cristalline est

[1] FARADAY. *Exp. Researches*, XXIIe série ; 1848.

font avec l'axe z de plus petite aimantation est

$$\operatorname{tang}^2 A = \frac{x^2}{z^2} = \frac{b-c}{a-b}.$$

Les coefficients a, b et c jouent le même rôle que les carrés des vitesses principales de propagation des ondes planes dans un milieu biréfringent à deux axes et tous les phénomènes d'optique ont leurs analogues dans l'aimantation. On peut donc aussi considérer des cristaux à un axe ou à deux axes magnétiques.

De même, les corps magnétiques uniaxes seront dits positifs ou négatifs, suivant que le coefficient d'aimantation dans la direction de l'axe de symétrie est le plus grand ou le plus petit en valeur absolue.

Pour les biaxes, le signe du cristal serait positif ou négatif suivant que le demi-angle A des axes optiques est inférieur ou supérieur à 45°, c'est-à-dire que l'on a

$$b - c \lesseqgtr a - b, \qquad 2b \lesseqgtr a + c.$$

La direction que prend le cristal dans un champ uniforme ne dépend que de la différence des coefficients ; on peut donc ajouter à chacun d'eux une valeur constante sans modifier les phénomènes. Il résulte de là que les conditions d'équilibre ne changent pas quand le corps est plongé dans un milieu quelconque, magnétique ou diamagnétique (1).

S'il existait des corps dont les coefficients principaux ne fussent pas tous de même signe, le corps étant magnétique dans certaines directions et diamagnétique dans d'autres, les propriétés pourraient encore se représenter par un ellipsoïde d'induction qne l'on obtiendrait en ajoutant une quantité constante à tous les coefficients.

Cette indifférence du milieu n'existe plus pour un champ non uniforme, puisqu'un élément de volume est attiré vers les points de maximum ou de minimum suivant que le coefficient d'aimantation apparente est positif ou négatif. Faraday a reconnu, par exemple, qu'un cristal de *cyanure rouge*, verni

(1) FARADAY, *Exp. researches*, séries XXII et XXX ; 1855.

à sa surface pour éviter la dissolution, est entraîné vers les maxima quand il est plongé dans l'eau et, au contraire, vers les minima quand il est plongé dans une dissolution concentrée de sulfate de fer. Si le liquide est formé par 15 volumes de la dissolution concentrée et 6 volumes d'eau, le cristal se montre magnétique ou diamagnétique, suivant que son axe de symétrie est parallèle ou perpendiculaire aux lignes de force; il tend à se déplacer vers les maxima du champ dans le premier cas et, dans le second, vers les minima.

Tyndall et Knoblauch ont obtenu des phénomènes analogues avec des corps en poudre comprimés dans une direction déterminée, ou des systèmes formés de couches superposées. La direction de plus grande densité tend toujours à se diriger parallèlement aux lignes de force, quand il s'agit de corps magnétiques, et normalement à ces lignes pour les corps diamagnétiques. On réalise, par exemple, ces expériences avec une pâte de gomme dans laquelle on a incorporé du bismuth réduit en poudre ou des grains de carbonate de fer.

En comprimant une série de feuilles de papier qu'on découpe ensuite sous forme de cylindre, l'axe du cylindre est magnétique pour du papier d'émeri et diamagnétique pour du papier recouvert de poudre de bismuth.

De même, un cube de bismuth qui a été comprimé se dirige de manière que la ligne de pression soit axiale.

Ces expériences sembleraient indiquer que les phénomènes de magnétisme cristallin sont dus en partie aux inégalités de pression qui résultent de la structure moléculaire, plutôt qu'aux molécules elles-mêmes.

831. Corps isotropes de différentes formes. — Les considérations qui précèdent cessent de s'appliquer lorsque les coefficients d'aimantation ont des valeurs notables, parce que l'aimantation induite n'est plus uniforme, mais on obtient encore des résultats analogues avec les corps isotropes.

Supposons qu'un ellipsoïde de substance isotrope soit placé dans un champ uniforme et que le coefficient k soit constant. Les aimantations parallèles aux trois axes (**276**) sont respectivement proportionnelles à

$$\frac{k}{1+kL}, \quad \frac{k}{1+kM} \quad \text{et} \quad \frac{k}{1+kN}.$$

Ces trois facteurs, que nous désignerons par f_1, f_2 et f_3, sont des coefficients d'aimantation moyenne et jouent le même rôle que les coefficients principaux d'un corps anisotrope. En particulier les couples relatifs aux axes sont proportionnels respectivement aux différences $f_1 - f_2, f_2 - f_3$ et $f_1 - f_3$.

Quelle que soit d'ailleurs la forme d'un corps isotrope, placé dans un champ uniforme, il existe toujours trois directions rectangulaires pour lesquelles l'aimantation induite est parallèle au champ et peut être définie par des coefficients f_1, f_2 et f_3. Les phénomènes seront encore représentés, comme pour les corps anisotropes, par l'ellipsoïde

$$f_1 x^2 + f_2 y^2 + f_3 z^2 = 1.$$

On a vu, par exemple (804), que le couple directeur produit sur un aimant que l'on fait osciller dans le champ terrestre est augmenté d'un terme proportionnel à la différence $f_1 - f_2$ des coefficients moyens d'aimantation relatifs aux directions longitudinale et transversale.

832. Liquides et gaz. — On doit alors renfermer ces corps dans des vases, ballons ou ampoules de verre, et tenir compte de l'influence du vase par une expérience préalable.

Pour l'air, par exemple, on emploiera une ampoule pleine de gaz, puis vide, en observant la différence des actions. C'est ainsi que Faraday et Ed. Becquerel ont démontré que l'air est magnétique par l'oxygène seul.

Dans le cas des liquides, on peut encore utiliser la méthode d'induction (829), comme l'a fait M. Silow [1], en plaçant le liquide dans un tube cylindrique suivant l'axe d'une bobine.

Quincke [2] s'est servi également d'une méthode ingénieuse. Le liquide est placé dans un tube en U dont une des branches est soumise au champ magnétique F. L'excitation du champ produit une élévation de niveau si le liquide est magnétique et une dépression s'il est diamagnétique. La différence de niveau h des deux branches, qui atteint quelquefois

(1) SILOW, *Wied. Ann.* t. XI, p. 324; 1880.

(2) QUINCKE, *Wied. Ann.*, t. XXIV, p. 347; 1885 et t. XXXIV, p. 401: 1888. — ADLER, *ibid.* t, XXVII, p. 509; 1886. — *J. de Phys.* [2], t. IV, p. 40 et t. V, p. 465.

gal à — $0{,}79.10^{-6}$, valeur un peu différente de celles qui ont té obtenues par d'autres observateurs.

L'*antimoine* présente des particularités spéciales suivant on mode de préparation. Pour le *bismuth* solide, le coeffiient diminue linéairement à mesure que la température s'é-ève et peut être représenté par

$$-k.10^6 = 1{,}38(1 - 0{,}00113\,t).$$

A la température de fusion, il diminue brusquement pour onserver ensuite une valeur constante 25 fois moindre.

Le *quartz* et le *soufre* à ses différents états ont des coeffiients constants, qui ne paraissent pas dépendre de la forme ristalline. M. Tumlirz (1) a trouvé cependant que le quartz, oumis à un champ énergique, conserve ensuite une polarité ; que dans un champ uniforme l'aimantation est plus faible iivant la direction de l'axe.

La température a, au contraire, une grande influence sur s propriétés des corps magnétiques.

Dans le cas des gaz, le coefficient d'aimantation *spécifique*, est-à-dire la valeur expérimentale divisée par la densité, ne épend pas de la pression, et il est en raison inverse de la mpérature absolue.

On aurait $\frac{33700}{T}.10^{-6}$ pour l'*oxygène*, et $\frac{7830}{T}10^{-6}$ pour *air*, en négligeant dans le dernier cas l'influence de l'azote ii est diamagnétique.

Le coefficient d'aimantation de l'oxygène à la température e 0° et à la pression de 76^c, serait ainsi de $0{,}176.10^{-6}$; Faraday ait obtenu $0{,}143.10^{-6}$. En opérant sur l'oxygène liquide, ır la mesure du flux d'induction dans un transformateur en rme de tore, MM. Fleming et Dewar (2) ont trouvé des nom-es qui conduisent pour les mêmes conditions à $0{,}173.10^{-6}$. 'air liquide a donné à peu près le même résultat : la per-éabilité observée fut 1,0024 au lieu de 1,0027, sans doute ırce que l'azote s'était évaporé en grande partie et que le juide ne renfermait guère que de l'oxygène.

(1) Tumlirz, *Wied. Ann.*, t. XXVII, p. 133 ; 1886.
(2) J. H. Fleming and J. Dewar, *Proc. L. R. S.*, t. LX, p. 283 ; 1896.

CHAPITRE DEUXIÈME

CHAMPS MAGNÉTIQUES.

MÉTHODES GÉNÉRALES.

834. Oscillations. — Les oscillations d'un barreau dans un champ H permettent de déterminer le couple directeur MH et, par suite, de comparer deux champs. Les nombres d'oscillations n et n' pendant le même temps donnent

$$\frac{n^2}{n'^2} = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{M'H'}}. \tag{1}$$

Cette méthode a été souvent employée pour étudier les rapports de la composante horizontale du champ terrestre en divers lieux et doit être discutée avec soin.

Une première difficulté tient aux modifications du moment magnétique par la variation de température, l'influence du temps et celle des accidents divers.

Pour la température, on peut écrire $\mathrm{M} = \mathrm{M}_0(1 - at)$. On déterminera le coefficient a par deux observations pour lesquelles l'aimant est placé dans des enceintes à températures différentes t et t' ; on a alors

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M'}} = \frac{1 - at}{1 - at'} = \frac{n^2}{n'^2} \cdot \frac{\mathrm{H'}}{\mathrm{H}} = 1 + a(t' - t). \tag{2}$$

On pourra disposer l'expérience de manière que les deux

n relation directe avec la déviation α et on a

$$\frac{M_0}{R^3} a(t'-t) = H \tang\alpha, \qquad a = \frac{1}{t'-t} \frac{R^3 H}{M_0} \tang\alpha.$$

Il suffit, pour cet usage, de déterminer d'une manière ap-
rochée le rapport $\frac{R^3 H}{M_0}$.

Les valeurs du coefficient a sont très différentes suivant la
ıture et la trempe de l'acier. On peut profiter de cette cir-
›nstance (¹) pour constituer un système formé de deux ai-
ants opposés M et M' dont les coefficients a et a' sont très
ifférents. Dans ce cas, le moment magnétique du système,

$$M_0(1-at) - M'_0(1-a't) = M_0 - M'_0 + (M'_0 a' - M_0 a)t,$$

t indépendant de la température si les aimantations ont été
ıoisies de manière que le coefficient du dernier terme soit
ıl, mais la compensation exacte est difficile à réaliser.

L'influence du temps est plus grave. Le magnétisme d'un
ırreau diminue d'abord assez rapidement dans les premières
maines qui suivent l'aimantation et ensuite d'une manière
us lente.

On atténue beaucoup cette cause d'erreur en soumettant
ıimant à une série de chocs qui font disparaître la plus
'ande partie du magnétisme variable. Dans le voyage de la
echerche, par exemple (), l'affaiblissement du magnétisme
:s aiguilles pendant une année a varié de 0,0025 à 0,0486;
ı fait la correction correspondante, pour les observations
termédiaires, en admettant que cette diminution est pro-
›rtionnelle au temps, de sorte qu'au bout du temps T le mo-
ent serait devenu $M' = M(1-bT)$.

Le rapport des champs donné par l'équation (²) serait alors

$$\frac{H'}{H} = \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{M}{M'} = \frac{n'^2}{n^2}[1 + a(t'-t) + bT].$$

Quant aux variations accidentelles, on les élimine en grande

(¹) LAMONT, *Handbuch des Magnetismus*, p. 402; 1867.

(²) VOYAGE DE LA RECHERCHE. — *Magnétisme*, t. II, p. 326.

Une bobine plate de surface S, faisant partie d'un circuit de résistance R, est placée dans un champ magnétique. On lui donne successivement deux positions pour lesquelles les valeurs moyennes du champ normal à la surface S sont X_1 et X_2; la décharge induite q est $Rq = S(X_2 - X_1)$. Si on retourne la bobine face pour face, $X_1 = -X_2$ et, par suite,

$$X_2 = \frac{S}{2R} q.$$

C'est la méthode employée par Verdet dans ses recherches sur le pouvoir rotatoire magnétique (479). Le rapport des décharges induites, ou des impulsions correspondantes du galvanomètre, donne ainsi le rapport des deux champs. La bobine induite peut être de dimensions assez petites pour permettre l'étude par points de la distribution du champ.

Cette disposition s'applique aux champs de toute grandeur, suivant les dimensions de la bobine ; elle convient surtout pour les champs très intenses, comme ceux des appareils industriels : il est utile alors d'avoir un champ de même ordre, comme terme de comparaison, qui permette le tarage de l'instrument. Pour cet usage, M. Hilbert [1] munit un aimant d'armatures en fer doux qui relient l'un des poles à l'autre et constituent un circuit magnétique fermé, à l'exception de deux entailles ou entre-fer. La bobine étant intercalée dans un entre-fer, on l'enlève brusquement; la comparaison de la décharge induite avec celle qu'on obtient par retournement de la même bobine dans le champ terrestre montre que le champ de cet appareil reste invariable, à 0,005 près, pendant plusieurs années.

Si l'on considère un conducteur de longueur L, parcouru par le courant I, dans un champ dont la composante normale est H, l'action latérale du champ est LHI ; c'est le principe du galvanomètre de M. Lippmann (632). M. Leduc [2] a construit ainsi un petit appareil, où la chambre à mercure a 10^{mm} de hauteur et $0^{mm},5$ d'épaisseur e, et le changement de niveau est amplifié par une colonne d'eau. En appelant p

(1) W. Hilbert, *Ph. Mag.* [5], t. XXXIII, p. 307; 1892.
(2) A. Leduc, *Journ. de Phys.* [2], t. VI, p. 184; 1887.

Joule (1) indique une méthode qui paraît d'abord plus satisfaisante. Deux barreaux à peu près identiques M_1 et M'_1 sont montés ensemble sur le même équipage et à une distance telle que le champ de chacun d'eux sur le milieu de l'autre soit sensiblement égal au champ terrestre. Pour la position d'équilibre, le système ne conserve que son magnétisme rigide, mais l'aimantation transversale intervient encore dans les oscillations (804). En appelant K le moment d'inertie du système total, K_1 et K_2 les moments d'inertie qui correspondent aux barreaux observés isolément, n, n_1 et n_2 les nombres d'oscillations par seconde et prenant les mêmes valeurs pour les aimantations rigide et induite dans les termes de correction, on aurait alors

$$n^2\pi^2 K = (M_1 + M_0) H \left(1 - f_2 \frac{H}{A}\right),$$

$$n_1^2 \pi^2 K_1 = M_1 H \left(1 + f \frac{H}{A}\right),$$

$$n_2^2 \pi^2 K_2 = M_2 H \left(1 + f \frac{H}{A}\right);$$

$$\frac{n_1^2 K_1 + n_2^2 K_2}{n^2 K} = \frac{1 + f\frac{H}{A}}{1 - f_2 \frac{H}{A}} = 1 + (f + f_2)\frac{H}{A} = 1 + f_1 \frac{H}{A}.$$

Il faut encore admettre un certain rapport, par exemple 5, entre les coefficients f_1 et f_2, pour en déduire la correction relative aux oscillations de chaque aimant, qui est

$$f\frac{H}{A} = \frac{f_1 - f_2}{f_1} f_1 \frac{H}{A} = \frac{4}{5}\left(\frac{n_1^2 K_1 + n_2^2 K_2}{n^2 K} - 1\right).$$

Le procédé le plus correct consiste à faire osciller le barreau et à déterminer ensuite le couple directeur MH relatif à l'aimantation rigide par un système de torsion.

835. Propriétés diverses. — On fait souvent usage des décharges induites observées au galvanomètre balistique (643).

(1) JOULE, *Proced. of the Manch, Lit. and Phil. Soc.*, t. VI, p. 129; 1867.

Lorsque les déviations α_1 et α_2 relatives à des torsions égales $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ sont très peu différentes, l'angle α_0 est lui-même très petit ; on peut alors prendre la moyenne α des angles α_1 et α_2 et écrire simplement

$$(4) \qquad C(\theta - \alpha) = HM \sin\alpha.$$

Une suspension bifilaire donnerait des résultats analogues Il est d'ailleurs facile de s'assurer, dans chaque cas, que les angles α_0 et θ_0 sont nuls en vérifiant si la position d'équilibre ne change pas quand on remplace l'aimant par un barreau de cuivre de même poids.

Le produit HM étant ainsi déterminé, deux expériences comparatives avec le même aimant donneront le rapport des deux champs, sans qu'il soit nécessaire de connaître le coefficient C de torsion.

Comme l'action du champ ne correspond alors qu'au magnétisme rigide quand la déviation est voisine de 90°, cette expérience fournit la meilleure méthode pour déterminer le terme de correction x relatif à l'aimantation induite dans les oscillations (834). On a alors, avec un bifilaire,

$$n^2\pi^2 K = MH(1 + x),$$
$$MH \sin\alpha = C \sin(\theta - \alpha);$$
$$1 + x = \frac{n^2\pi^2 k}{C} \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

La même disposition permet de suivre les variations du champ. Supposons, pour plus de généralité, qu'avec une suspension bifilaire, les angles θ et α soient comptés à partir d'une direction fixe, telle que le méridien géographique, la déclinaison étant D.

L'équation d'équilibre est

$$(5) \qquad C \sin(\theta - \alpha) = HM \sin(\alpha - D).$$

Si toutes les quantités varient à la fois, à l'exception de l'angle θ qui est défini par la position donnée au bifilaire, il en résulte

$$\frac{dC}{C} - \cot(\theta - \alpha)\, d\alpha = \frac{dH}{H} + \frac{dM}{M} + \cot(\alpha - D)(d\alpha - dD).$$

837. Cadres mobiles. — Si l'on substitue à l'aimant dans les expériences précédentes un cadre mobile de surface totale S parcouru par le courant I, on déterminera ainsi le couple directeur HSI, soit par la déviation δ qu'éprouve le cadre à partir d'une position pour laquelle la surface S est parallèle au champ (**628**), soit par la torsion nécessaire pour le maintenir dans sa position primitive.

On peut même construire sur ce principe des appareils portatifs [1] de très petites dimensions, qui permettent de mesurer des champs intenses avec une approximation de 2 °/₀ et d'étudier leur distribution dans les machines industrielles. Le courant I est donné par un ampèremètre et le rapport du coefficient de torsion à la surface de la bobine est une constante empirique.

Pour les mesures de précision, il est nécessaire de connaître avec une exactitude suffisante le coefficient de torsion du système, que l'on déterminera en général par le moment d'inertie de la partie mobile et la durée des oscillations. Si la suspension est unifilaire, on l'utilise pour conduire le courant dans la bobine, et l'autre prise de courant se fait par un fil flexible ou une hélice de torsion négligeable; avec un bifilaire, les deux fils servent naturellement d'électrodes.

Dans la suspension unifilaire le coefficient de torsion est à peu près indépendant de la charge, sans que cette loi puisse être considérée comme absolument rigoureuse; en outre, l'influence de la viscosité des métaux (**549**) et celle de la température (**550**) sont des causes d'erreur qu'il est difficile d'éliminer complètement.

La suspension bifilaire ne présente pas les mêmes inconvénients. Le couple est alors exactement proportionnel au poids tenseur et au sinus de la torsion; l'influence de la température est aussi mieux définie et, avec les précautions employées par Kohlrausch (**552**), le coefficient de torsion peut être déterminé par la mesure directe de la longueur des fils et de la distance de leurs points d'attache.

[1] E. Edder et H. Stansfield, *Phil. Mag.* [5], t. XXXIV, p. 186; 1892.

$$- f\left(\frac{H}{A}\right).$$

... dans le m...
... ait sur l'...

$$- f\left(\frac{H}{A}\right)$$

... de cett...
... nombres...
... des ch...

$$\frac{H - F}{H}$$

$$\frac{M}{HR^2}(1 -$$

... et (2)

$$- f\left(\frac{H}{A}\right) -$$

... comparativ...
... comme consta...

des métaux et restent inférieures à 0,0002 quand la variation de température ne dépasse pas 10°.

Pour les mesures absolues, on déterminera la distance R par deux expériences faites en plaçant le barreau de part et d'autre de l'aiguille. Il faut ensuite évaluer le terme p du second ordre et les corrections relatives aux aimantations induites. La plus grande difficulté tient à ce que le champ F de l'aimant est en général plus petit que H et que leur rapport est donné par la différence des carrés $m^2 - m_0^2$ de nombres d'oscillations peu différents l'un de l'autre; outre que l'expérience est très longue, cette circonstance diminue beaucoup la précision des résultats.

839. Méthode de Gauss ([1]). — La déviation produite sur un déclinomètre (**807**), quand le barreau déviant est dans une des positions principales, a l'avantage de donner une quantité directement proportionnelle au rapport des champs F et H.

On a d'abord l'équation (1) par les oscillations du barreau. Pour les déviations, l'aimantation induite n'intervient pas d'une manière appréciable. Le barreau étant supposé dans la première position principale, c'est-à-dire dirigé vers le déclinomètre, on aura donc, en posant $u = \tang\theta$ ou $u = \sin\delta$, suivant qu'on emploie la méthode des sinus ou la méthode des tangentes,

$$Hu = \frac{2M}{R^3}(1+p),$$

$$H^2 u = \frac{2n^2\pi^2 K}{R^3}(1+p)\left(1 - f\frac{H}{A}\right).$$

Si la correction relative à l'aimantation induite est inférieure à 0,004, ce qui a lieu généralement, elle n'intervient que pour une quantité moitié moindre dans la valeur de H et peut être connue avec une exactitude suffisante.

D'autre part, on a vu (**808**) combien il est difficile de déterminer le terme p du second ordre; c'est là l'obstacle principal et l'on peut considérer comme très douteux que la méthode permette d'évaluer par des aimants la composante

([1]) Gauss, *Intensitas vis mag.* — *Comm. S. R. Gott*, t. VIII. — *Ann. de Ch. et de Phys.* [2], t. LVII, p. 5; 1834.

Le rapport des courants I et I′ peut être évalué par un galvanomètre quelconque. Si les deux observations sont faites en même temps et que l'action du déclinomètre sur le cadre soit négligeable, les courants I et I′ sont égaux, mais on doit tenir compte de la rotation du cadre (**629**) pour calculer son action sur l'aiguille.

Avec cette méthode, l'erreur relative des mesures sur la composante H peut être inférieure à 0,0001.

841. Déclinaison. — Pour connaître la déclinaison, il faut déterminer d'abord le méridien géographique, puis l'azimut dans lequel se place l'axe magnétique d'un aimant mobile. Comme la direction de cet axe n'est pas connue, on corrige l'erreur par le retournement de l'aimant face pour face, en observant dans chaque position la direction d'une ligne de foi et prenant la moyenne des deux azimuts.

La ligne de foi est formée soit par les extrémités d'une aiguille taillée en losange aigu, soit par deux croisées de fils portées aux extrémités d'un barreau, comme dans la boussole de Gambey, soit par deux traits tracés sur les faces terminales de l'aimant et que l'on vise avec un microscope. On peut encore employer des barreaux creux transformés en collimateurs par un objectif encastré dans l'un des bouts et une échelle divisée sur verre ou un réticule à l'autre bout.

Une boussole de déclinaison, ou *déclinomètre*, est un véritable théodolite muni de pièces accessoires pour les observations magnétiques.

Dans les instruments de construction ancienne, tels que ceux de Gambey et de Gauss, l'aimant était en général d'une grande longueur, ce qui présente beaucoup d'inconvénients dont le principal est la durée des oscillations. En effet, pour une même aimantation moyenne et des barreaux semblables, le moment magnétique est proportionnel au volume et le moment d'inertie au produit du volume par le carré de la longueur; la durée des oscillations est donc proportionnelle à la longueur. L'équilibre est difficile à établir et les observations sont très longues.

Nous indiquerons, comme exemple, le dernier modèle de boussole construit par Brunner (fig. 258). L'aimant est un prisme à section carrée muni de deux goupilles au milieu; il

Le rapport des courants I et I' peut être évalué par un galvanomètre quelconque. Si les deux observations sont faites en même temps et que l'action du déclinomètre sur le cadre soit négligeable, les courants I et I' sont égaux, mais on doit tenir compte de la rotation du cadre (629) pour calculer son action sur l'aiguille.

Avec cette méthode, l'erreur relative des mesures sur la composante H peut être inférieure à 0,0001.

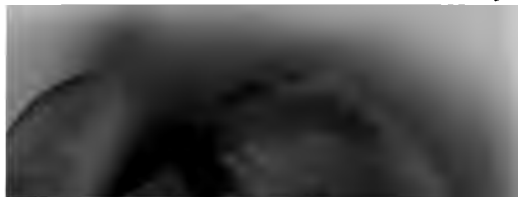
841. Déclinaison. — Pour connaître la déclinaison, il faut déterminer d'abord le méridien géographique, puis l'azimut dans lequel se place l'axe magnétique d'un aimant mobile. Comme la direction de cet axe n'est pas connue, on corrige l'erreur par le retournement de l'aimant face pour face, en observant dans chaque position la direction d'une ligne de foi et prenant la moyenne des deux azimuts.

La ligne de foi est formée soit par les extrémités d'une aiguille taillée en losange aigu, soit par deux croisées de fils portées aux extrémités d'un barreau, comme dans la boussole de Gambey, soit par deux traits tracés sur les faces terminales de l'aimant et que l'on vise avec un microscope. On peut encore employer des barreaux creux transformés en collimateurs par un objectif encastré dans l'un des bouts et une échelle divisée sur verre ou un réticule à l'autre bout.

Une boussole de déclinaison, ou *déclinomètre*, est [illegible] able théodolite muni de pièces accessoires [illegible] vations magnétiques.

Dans les instruments de construction [illegible] ceux de Gambey et de Gauss, l'aimant éta[illegible] grande longueur, ce qui présente bea[illegible] dont le principal est la durée des oscillations [illegible] une même aimantation moyenne et des [illegible] le moment magnétique est proportionnel [illegible] moment d'inertie au produit du volume [illegible] longueur; la durée des oscillations est don[illegible] à la longueur. L'équilibre est difficile à éta[illegible] vations sont très longues.

Nous indiquerons, comme exemple, le [illegible] boussole construit par Brunner (fig. [illegible]) [illegible] prisme à section carrée muni de deux [illegible]





Enfin, le treuil est monté sur un cercle divisé et des boutons latéraux permettent de centrer le fil de suspension, de manière que, pour une position de l'aimant, le microscope pointe alternativement sur les traits médians des divisions.

Le théodolite étant réglé à la manière ordinaire, on détermine d'abord le méridien géographique, soit par l'étoile polaire, soit par les hauteurs correspondantes d'une étoile ou du soleil, etc. ; le soleil est observé à l'aide d'un verre noir et, au lieu de viser un des bords, il est plus avantageux d'employer un réticule qui permette d'encadrer l'image entre quatre fils tangents rectangulaires.

Supposons par exemple, que l'on connaisse seulement la latitude du lieu. Soit OP (fig. 259) l'axe du monde, OA la

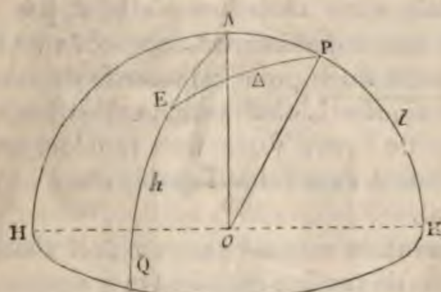


Fig. 259.

verticale, OE la direction de l'astre au moment de l'observation, l la latitude du lieu ou la hauteur du pôle, h la hauteur EQ de l'astre.

Dans le triangle sphérique APE, le côté PA est égal à $90° - l$, le côté AE à $90° - h$, et le côté EP est la distance polaire Δ de l'astre, ou le complément de sa déclinaison. L'angle h est donné par le cercle vertical et on fait la lecture correspondante des verniers sur le cercle horizontal.

En posant $h + l + \Delta = 2S$, les angles A et P seront déterminés par les formules

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin S \cos(S-\Delta)}{\cos l \cos h}},$$

$$\sin\frac{P}{2} = \sqrt{\frac{\sin S \cos(S-h)}{\cos l \sin \Delta}}$$

des perturbations considérables ; les précautions que l'on prend sous ce rapport sont rarement suffisantes.

L'instrument lui-même doit être en cuivre ou en bronze, exempt de fer, car il n'existe aucune méthode de correction qui permette d'éliminer cette cause d'erreur. On peut bien retourner l'aimant bout par bout et répéter les observations, mais la concordance des résultats n'est pas une garantie absolue et la moyenne ne corrige par l'erreur si elle existe.

La série des quatre observations étant d'assez longue durée, la déclinaison magnétique a pu varier dans l'intervalle des lectures ; les indications d'un appareil de variations observé en même temps, ou plutôt d'un enregistreur, permettraient de corriger chacune des lectures pour les ramener à la même époque. Dans tous les cas, il est avantageux de faire les observations au moment où la déclinaison passe par un maximum ou un minimum ; cette précaution est surtout importante en été, lorsque l'amplitude de la variation diurne est la plus grande.

Au lieu de faire coïncider, dans chaque pointé, le trait médian des divisions avec le fil central du réticule, on peut déterminer la valeur angulaire des divisions et celle de la distance des fils, ce qui permettrait quelquefois de faire les observations d'une manière plus rapide, en déterminant chaque fois la division qui correspond au fil central.

Enfin, il est bon d'évaluer le coefficient C de torsion du fil en observant la déviation δ produite par une torsion notable, par exemple d'une demi-circonférence ; on a alors

$$C\pi = HM \sin\delta, \qquad \text{ou} \qquad \frac{C}{HM} = \frac{\sin\delta}{\pi}.$$

Le mode de suspension doit être modifié si ce rapport n'est pas très petit.

Des formes très différentes ont été données aux boussoles de déclinaison ; quel que soit le mode de construction, l'appareil doit comporter les corrections nécessaires, et la marche des observations est toujours la même. Avec un bon appareil, la déclinaison se mesure au dixième de minute.

Dans la boussole qu'on vient de décrire, le point d'attache

843. Corrections. — Les causes d'erreur sont ici encore plus nombreuses que dans la boussole de déclinaison. En effet, pour que l'inclinaison puisse être déterminée par une seule lecture, il est nécessaire : 1° de connaître la ligne d'horizon sur le cercle vertical ; 2° que l'aiguille soit centrée sur ce cercle ; 3° que l'axe magnétique de l'aiguille soit parallèle à la ligne des pointes ; 4° que le centre de gravité de l'aiguille

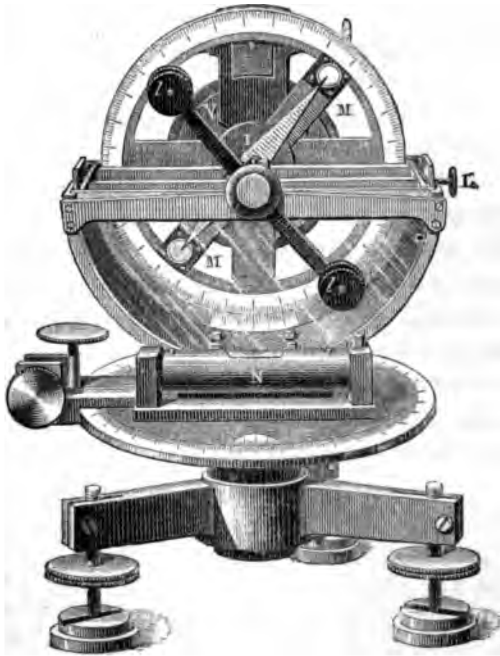


Fig. 260.

soit sur l'axe de rotation ; 5° enfin que le plan des agates soit horizontal. Toutes ces conditions ne peuvent être réalisées que d'une manière approximative.

1° Pour connaître la ligne d'horizon ou la verticale, on remplace l'aiguille par un fil à plomb situé dans le même plan et on observe ce fil successivement haut et bas dans les deux miroirs ; la moyenne des lectures donne la division qui se trouve au zéro du vernier quand le plan qui passe par les axes des deux miroirs est vertical. Cette détermination serait utile dans certains cas, mais il suffit, pour l'observation ordi-

Avec une bonne aiguille, il suffit de prendre la direction moyenne des deux azimuts dans lesquels l'aiguille est verticale avant et après un retournement face pour face. On peut même viser une pointe dans un azimut quelconque, puis tourner l'équipage jusqu'à ce que cette pointe se retrouve dans la même position, par rapport au cercle vertical. Les plans bissecteurs correspondants déterminent le méridien et le plan perpendiculaire. Il est facile de trouver rapidement par cette méthode, sauf quand l'inclinaison dépasse 70°, la direction du méridien à moins de quelques minutes, et il suffit que l'écart reste inférieur à 1°.

La disposition mécanique des boussoles ne permet pas en général d'observer des inclinaisons très petites. Au voisinage de l'équateur il est donc préférable de faire l'observation dans deux azimuts quelconques situés de part et d'autre à la même distance du méridien.

Dans ce dernier cas, il n'est pas nécessaire encore de connaître exactement la direction du méridien. Si les inclinaisons sont peu différentes dans deux plans dont l'angle est 2α, la moyenne des observations représente l'inclinaison I_α que l'on obtiendrait dans l'azimut α à partir du méridien. On en déduit l'inclinaison réelle par la relation

$$\tang I = \tang I_\alpha \cos\alpha.$$

La mesure de l'inclinaison est toujours le résultat d'un assez grand nombre de lectures différentes ; il est important de disposer les observations dans un ordre méthodique pour simplifier la manœuvre et toucher le moins possible à l'aiguille. L'une des faces de l'aiguille porte d'un côté une marque distinctive, par exemple un point gravé sur la monture près de l'axe, qui permet de définir la position qu'elle occupe dans chaque cas.

Supposons par exemple, qu'on fasse les observations dans deux azimuts rectangulaires, à peu près à 45° de part et d'autre du méridien.

Pour aimanter l'aiguille, on la place sur une planchette dans une cavité un peu plus profonde que l'épaisseur de l'aiguille et on l'y maintient par une vis de pression. Avec

Enfin, si les moments
dans les deux cas, on rempl
cette équation par l'unité,
cond ordre près,

(4) $I_u - I_1$ I_2

En réalité, l'angle I
relatives aux deux poin
tures correspondant a
angles I_1 et I_2 sont do
l'inclinaison I_u est ain
la moyenne des seize
pour face et au chang

Le retournement
connaissance exacte
qu'il élimine le défa

Si les aimantatio
miner le rapport
d'oscillation de l'a
alors, par l'équati

(3)'

On a toujours
sont notablemen
rection nouvelle

Lorsque le ret
et la rotation d
degrés dans le
diocre, et aucun
boussoles de B
ne dépassent pa
perfection est r

844. Modes d
directement, on
cette propriété
se place dans u

décharges induites dans un cadre qui tourne de 180° autour d'une verticale à partir d'un plan perpendiculaire au méridien, puis autour d'une horizontale parallèle au méridien à partir d'un plan horizontal [1].

Avec cette disposition, il est nécessaire de mesurer les impulsions du galvanomètre balistique qui correspondent aux deux décharges induites et l'erreur relative sur l'inclinaison est de même ordre que celle des deux lectures.

L'approximation est plus grande quand on cherche par tâtonnements quelle doit être la position initiale du cadre dans le second cas pour que la décharge soit la même que dans le premier [2]. D'une manière plus générale, le cadre étant rendu mobile autour d'un axe perpendiculaire au méridien, on peut déterminer par tâtonnements deux positions initiales telles que la déviation du galvanomètre balistique soit la même pour une rotation de 180°; la bissectrice donne la direction de l'aiguille d'inclinaison.

On élimine même toute mesure de décharge, ainsi que le réglage des positions initiale et finale du cadre, en déterminant par expérience la droite autour de laquelle doit avoir lieu la rotation, pour qu'il n'y ait aucun courant induit [3]. L'appareil est entièrement analogue à une boussole d'inclinaison ; l'axe de rotation du cadre peut se déplacer sur un cercle vertical mobile lui-même par rapport à un cercle horizontal.

Un bouton permet de donner au cadre des déplacements de 180° à droite et à gauche, limités par des butoirs. En observant les déviations dans un galvanomètre balistique, on arrive aisément, par une série d'opérations méthodiques, à mettre d'abord l'axe de rotation dans le méridien, puis dans la direction de l'aiguille d'inclinaison. La précision est ainsi beaucoup augmentée parce qu'on peut, dans le voisinage du courant nul, combiner les mouvements du cadre avec les oscillations de l'aiguille du galvanomètre et multiplier les angles d'impulsion.

Le réglage relatif au méridien magnétique est même assez précis pour que l'appareil soit propre à servir comme boussole

(1) W. Weber, *Pogg. Ann.*, t. XLIII, p. 293; 1838.
(2) H. Wild, *Bull. de l'Acad. des Sc. de St.-Pétersb.*, t. XXVII, p. 320; 1881.
(3) E. Mascart, *C. R. de l'Acad.. des Sc.*, t. XCVII, p. 1191; 1883.

goupilles d'arrêt qui permettent de les retourner de 180° autour de leur axe.

Pour déterminer la composante horizontale, on observe

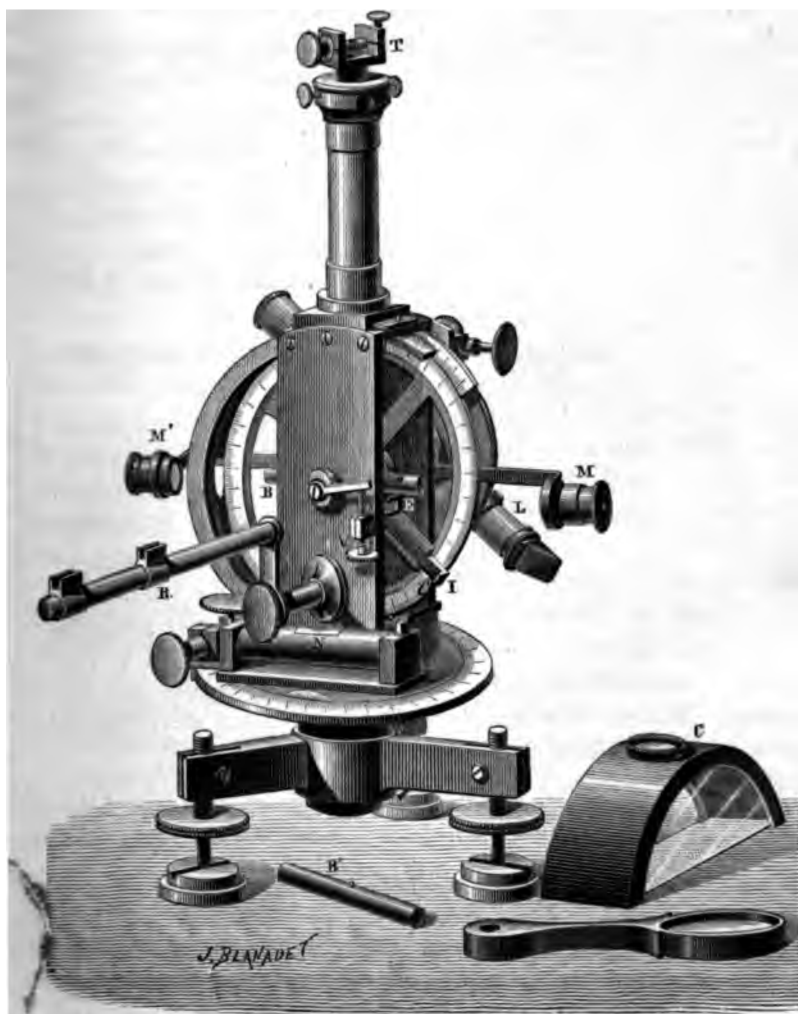


Fig. 262.

d'abord les oscillations de l'un des barreaux et on l'emploie ensuite comme barreau déviant, en le plaçant sur une tige latérale dans des montures R et R' (fig. 258 et 262). Il est bon que cette tige puisse être installée des deux côtés, pour que

La constante C_t relative à la température t est évaluée par ›mparaison dans un observatoire.

Cette méthode n'offre pas de garanties suffisantes parce que ıimantation du barreau peut subir des changements brus-ıes et on devrait en outre tenir compte des aimantations in-ıites par le champ terrestre.

Le théodolite permet encore de déterminer l'inclinaison si ›n remplace l'aimant par un barreau de fer doux [1].

Pour plus de symétrie, Lamont installe sur le théodolite ux barreaux situés de part et d'autre, de manière que le ›ut supérieur de l'un et le bout inférieur de l'autre soient ıns le plan horizontal du déclinomètre. Le champ ainsi pro-ıit est proportionnel à la composante verticale Z, par emple BZ. Après une série de retournements et d'inversions s deux barreaux, pour éliminer les défauts de symétrie, la viation moyenne α donnera encore

$$\sin\alpha = \frac{CZ}{H} = C \operatorname{tang} I.$$

Si le coefficient C est déterminé par comparaison, on aura ısi la valeur de I. Toutefois, les propriétés du fer sont mo-liées par tant de causes, physiques ou mécaniques, qu'on peut pas être assuré que le barreau reste toujours identique ui-même ; l'expérience montre, en effet, que cette mesure l'inclinaison ne donne que des valeurs approchées.

Lloyd [2] applique les déflecteurs à la boussole d'inclinaison ur déterminer la valeur totale T du champ terrestre.

Outre les aiguilles A_1 et A_2, qui servent pour les observa-ıns ordinaires, on emploie deux aiguilles spéciales A_3 et A_4, nt l'aimantation n'est jamais renversée. La première A_3 est :n équilibrée, et la seconde A_4 munie d'un contrepoids con-nable qui met le centre de gravité en dehors de l'axe.

L'observation est d'abord faite avec la dernière aiguille ns le méridien magnétique. L'inclinaison correspondante I' nne alors (843)

$$\varpi \cos I' = TM \sin(I - I').$$

) Lloyd. *Account of the Mag. observatory of Dublin*; 1842.

) *Admiralty Manual of Scient. enquiry*, 4e édit. p. 105 ; 1871

les distances moyennes à l'axe de suspension ... sur l'alidade déterminées avec plus d'exactitude. Afin de se p... aiguille A, meilleures conditions, on prend alors comme d... son appa- barreau de longueur moitié moindre, prol... axe nouvelle d'autre par des parties en cuivre pour qu... déviation de fassent de la même manière. Les déviations ... par la méthode des sinus.

On a ainsi tous les éléments nécessaire... tions aux deux distances, mais il est pré... la seconde série comme un contrôle et ... nante est pro- second ordre par comparaison dans un ... l'axe de l'ai-

M. Moureaux ([1]) a fait un excellent ... : la con- ments légers dans un grand nombre ... nœuvre est si rapide que deux heur... les observations répétées en doubl... soleil, déclinaison et composante h...

847. Déflecteurs. — On peut auss... prendre pour déflecteur, comme d... un barreau aimanté vertical, qui ... liée à l'équipage azimutal, et ... constante B a ét des pôles soit dans le plan hori... mesures absolues.

Le champ moyen ainsi produ... veut faire des observ culaire à sa direction pour la p... permettent guèr tionnel à la masse du pôle, où ... sur des plans d' barreau, et peut être représ... terminé par de servée α donne alors ... en rubis.

$$\sin\alpha = \frac{AM}{H}.$$

... facilite les oscilla ... frottement d'un disqu On élimine autant que pos... les chape en retournant le barreau ... à droite et pôle supérieur en bas, ... changer les point déviant. L'angle α étant ... lectures, si l'on a déterm... on ne peut plu la température, on aura ... son aimantation; on ... état aussi invariable

$$H = AM_t \frac{1}{\cdots}$$

... de recourir à des opéra-

([1]) Th. Moureaux, *Ann.* ...

sur laquelle est enroulé un fil
suspendra des poids inégaux.
. la moyenne I' des observa-
magnétique en visant les deux
droite et gauche des pivots, et re-
, ce qui compense en même temps
ligne d'horizon, donne d'abord

$\frac{\varpi}{M}$ - B étant déterminé par compa-

...ations à terre aussi souvent que pos-
. changements d'aimantation, on en
. fonction de I' et du champ total T.
. fil de poids dont le moment par rap-
première observation donne une incli-
la condition d'equilibre devient

$$\varpi \cos I_1 = TM \sin(I - I_1).$$

est portée à l'autre extrémité du fil, la dé-
signe et l'on a

$$\varpi \cos I_2 = TM \sin(I_2 - I).$$

par addition et soustraction, en appelant i la
des angles I_1 et I_2, et δ la déviation moyenne,

$$\varpi' + \varpi \sin i \sin\delta = TM \sin\delta \cos(I - i),$$

$$\varpi \cos i = TM \sin(I - i).$$

la dernière équation avec (5), on voit qu'il en
condition $i = I'$.

...ons $I - I_1$ et $I_2 - I$ étant très peu différentes de
. on peut remplacer $\cos(I - i)$ par l'unité dans
équation et il reste

$$\sin\delta = \frac{\varpi'}{M} + \frac{\varpi}{M} \sin i \sin\delta = A + B \sin i \sin\delta.$$

...erait encore le dernier terme en opérant avec des

Pour la composante horizontale, on emploie habituellement un barreau porté par une suspension bifilaire (**836**), réglée de manière que l'équilibre ait lieu dans une direction voisine de la normale au méridien. Les indications de l'appareil sont alors indépendantes des changements de déclinaison et la variation relative de la composante est proportionnelle aux déviations observées, à part des termes qui dépendent de la température et des modifications que peut éprouver le magnétisme du barreau.

Une autre méthode consiste à se servir d'un déclinomètre en plaçant dans le voisinage un barreau déviant dont le champ moyen F est à peu près perpendiculaire au méridien.

Soient, d'une manière générale, α et θ les angles que fait la direction fixe du champ auxiliaire F avec la normale au méridien et avec la direction de l'aimant dévié. La condition d'équilibre est

$$H\cos(\theta+\alpha)=F\sin\theta,$$

et les variations simultanées donnent

$$\frac{dH}{H}-\operatorname{tang}(\theta+\alpha)(d\theta+d\alpha)=\frac{dF}{F}+\cot\theta\, d\theta.$$

La quantité $d\alpha$ représente la variation dD de déclinaison. Si l'erreur de réglage α est très petite et l'angle θ voisin de 45°, comme on le fait habituellement, on peut écrire

$$\frac{dH}{H}=\frac{dF}{F}-2\,d\theta+d\mathrm{D},$$

ou en tenant compte des changements qu'éprouve l'aimantation du déflecteur avec la température et avec le temps,

$$\frac{dH}{H}=-a(t'-t)-b\mathrm{T}+2\,d\theta+d\mathrm{D}.$$

Les indications doivent alors être corrigées par celles d'un déclinomètre de variations. Dans les deux cas, la plus grande difficulté est de connaître le coefficient b d'affaiblissement graduel; il est nécessaire de faire un contrôle fréquent par des déterminations directes de H.

axe de rotation est parallèle au méridien, $\cot I' = 0$. Dans ce dernier cas, la formule est plus simple, mais l'action de la barre tend à faire tourner le couteau sur les plans, et la marche de l'instrument peut être moins régulière.

Le couple qui tend à ramener le barreau dans sa position d'équilibre, quand il est dévié d'un angle très petit δ, est

$$[\varpi \cos(\beta + \theta) + H'M \cos\theta + ZM \sin\theta]\,\delta.$$

Comme l'angle θ est très petit, l'expression du couple directeur peut se réduire à

$$C = \varpi \cos\beta + H'M = \varpi \cos\beta + ZM \cot I.$$

Remplaçant la quantité $\varpi \sin\beta$ par sa valeur approchée ZM tirée de l'équation (7), on a sensiblement

$$C = ZM(\cot\beta + \cot I').$$

D'autre part, le couple directeur du barreau soutenu par un fil vertical est $HM = ZM \cot I$.

Si n et n' désignent les nombres d'oscillations effectuées par la balance dans le méridien et dans un plan perpendiculaire, et N le nombre relatif aux oscillations autour d'un axe vertical, on aura

$$\frac{n^2}{\cot\beta + \cot I} = \frac{n'^2}{\cot\beta} = \frac{N^2}{\cot I}.$$

La première équation détermine $\cot\beta$; il en résulte alors, comme vérification, $N^2 = n'^2 - n^2$.

Il est préférable de déterminer les constantes des trois instruments de variations par une comparaison directe. A part les effets de température, les variations des deux composantes sont données par des expressions telles que

$$\frac{dH}{H} = A\,d\theta, \qquad \text{et} \qquad \frac{dZ}{Z} = B\,d\theta,$$

les angles $d\theta$ étant d'ailleurs évalués de part et d'autre avec des échelles arbitraires.

:riger ou de compenser. La théorie de la correction des :npas a été donnée par Poisson ([1]).

Les masses d'acier ou de fer dur qui ont été aimantées ndant la construction se comportent comme des aimants; appelle quelquefois ce magnétisme *sous-permanent*, parce e sa valeur, qui dépend de la position du navire en chanr, diminue lentement à la mer et ne devient définitive 'après un certain temps de navigation. D'autre part, le fer ux s'aimante par le champ terrestre; le magnétisme temraire ainsi produit varie avec l'orientation du navire et sa sition géographique. On doit donc considérer deux espèces ıctions perturbatrices, les unes constantes, les autres varia:s avec la position du navire.

Supposons d'abord le navire droit. On appelle *cap* la di:tion du plan de symétrie comptée de l'arrière à l'avant; par tension, on désigne souvent par le même nom l'azimut de plan avec un autre plan vertical. Soient

ζ l'azimut du cap avec le méridien magnétique, ou le *cap ıgnétique*, cet angle étant compté vers l'est;

ζ' l'azimut du cap avec la direction du compas, ou la *route : compas*;

$\delta = \zeta - \zeta'$ la *déviation* du compas.

On appelle *variation* l'angle V, compté aussi vers l'est, que t le compas avec le méridien géographique, ou la déclison apparente. Si Δ est la déclinaison réelle, on a

$$V = \Delta + \delta.$$

Nous admettrons que le magnétisme du navire, tant peranent que sous-permanent, est indépendant de la tempéture; les variations qu'il pourrait éprouver de ce chef sont :gligeables par rapport aux autres causes d'erreur.

Pour les pièces de fer doux, on admettra que l'aimantation duite est proportionnelle à la force magnétisante et que les mantations produites par différentes causes se superposent; s deux hypothèses peuvent être considérées comme suffimment exactes lorsqu'il s'agit d'actions de même ordre que lles de la terre.

[1]) POISSON, *Mém. de l'Institut*, t. V, p. 521; 1824.

a le même signe sur toute la terre et la même valeur en tous les points d'un parallèle magnétique.

Pour le champ terrestre, nous remarquerons d'abord que la composante verticale Z produit une aimantation indépendante de l'orientation du navire et que son action sur le compas donne une composante située sensiblement dans le plan de symétrie. La déviation correspondante est donc aussi *semi-circulaire* ; elle devient nulle à l'équateur et change de signe quand on passe d'un hémisphère à l'autre.

Pour calculer l'effet de la composante horizontale H, nous la remplacerons par ses deux projections

$$X = H\cos\zeta, \qquad Y = -H\sin\zeta.$$

L'aimantation produite par la première donne une action dont la composante horizontale F_2 est dirigée dans le plan de symétrie. Si on pose

$$F_2 = aH\cos\zeta,$$

et qu'on appelle H_2 la résultante de H et F_2, la déviation δ_2 due à l'action de la composante horizontale serait déterminée par les équations

$$\frac{\sin\zeta}{H_2} = \frac{\sin\delta_2}{F_2} = \frac{\sin(\zeta-\delta_2)}{H},$$

qui donnent, au moins d'une manière très approchée,

$$(2) \qquad \sin\delta_2 = \frac{a}{2}\sin 2\zeta.$$

Cette déviation est nulle quand le cap est dirigé vers l'un des quatre points cardinaux magnétiques, et elle prend des valeurs de signes contraires dans deux quadrants voisins ; c'est une déviation *quadrantale*.

La projection $Y = -H\sin\zeta$ donne, de même, une composante horizontale

$$F'_2 = -eH\sin\zeta;$$

la déviation correspondante δ'_2 est encore *quadrantale* et dé-

.I

elatifs à
enthèses
et dans les

amp résul-

tang I.

ns les expressions

$b \sin\zeta$,
$n\zeta + d\cos\zeta$,
$\cot I \sin\zeta$.

du champ résultant
gnétisme permanent.

n ajoute les deux pre-
pliées respectivement
seconde de la première
ent par $\cos\zeta$ et $\sin\zeta$,
le sinus et le cosinus

ne dépasse pas 20°, mais qu'il devient très difficile à appliquer lorsque les déviations sont considérables, comme il arrive souvent pour les navires actuels qui renferment de grandes masses de fer et d'acier.

852. Compensation des compas. — L'action du navire sur le compas équivaut en réalité à celle d'un aimant qui produirait les composantes P, Q, R et d'une masse de fer doux placée au voisinage du compas dans une direction déterminée et à une distance convenable, à la condition toutefois que l'action du compas lui-même sur cette masse de fer doux ne produise pas une aimantation induite capable de donner une perturbation notable par réaction sur le compas.

Il est donc possible de compenser exactement l'action du navire en plaçant à poste fixe, dans le voisinage du compas, un aimant dont le champ ait pour composantes $-P, -Q$ et $-R$, et une masse de fer doux qui fasse équilibre à l'aimantation du navire par la terre ; la déviation serait annulée. Toutefois il serait très difficile de régler la compensation de cette manière par des tâtonnements méthodiques ; il est plus pratique d'avoir recours à plusieurs aimants qui permettent d'annuler séparément les différents termes de la déviation.

C'est surtout à sir G. Airy (¹) que l'on doit l'emploi de ce mode de correction. On peut remarquer d'abord que la composante verticale Z et les paramètres g, h, k n'interviennent pas dans la déviation du navire droit ; il suffit donc d'annuler les composantes P et Q et les autres paramètres. On installe sur le pont, à des distances convenables, des aimants longitudinaux et des aimants transversaux qui annulent séparément P et Q, puis des barres de fer doux ou des boîtes de chaînes qui compensent l'aimantation induite par la terre.

Les compas ordinaires ont des aiguilles longues et très aimantées, de sorte qu'il est nécessaire d'éloigner beaucoup les organes de correction pour qu'ils produisent sur l'aiguille un champ à peu près uniforme et pour éviter la réaction de l'aimantation induite. Les corrections exigent alors des aimants très puissants et des masses de fer considérables.

Pour se rapprocher davantage de la théorie, Lord Kelvin

(¹) G Airy, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1856

la déviation *quadrantale* par les masses fois réalisée, reste exacte sous toutes les ...tudes.

...as de même pour la déviation *semi-circulaire* ... aimants. L'expérience faite en un même ... pas de séparer, dans les coefficients B et C, le ...ous-permanent de l'aimantation produite par la ...rticale de la terre. Comme cette dernière varie ...ude, la correction qui convient pour un lieu dé... ...se d'être exacte à mesure qu'on s'en éloigne.

...n remédie à ce défaut en corrigeant la déviation ...re à la fois avec des aimants et avec une pièce ...er doux appelée *barreau de Flinders* : on fait au ... correction approchée et on la modifie au cours de ...on en variant le rapport des actions du barreau et ...ts. Quand on a trouvé ainsi par tâtonnements la ...nvenable de ce rapport, la correction reste bonne ...s les déplacements ultérieurs.

...emarque analogue s'appliquerait à la correction de ...mais on n'y a pas égard dans la pratique.

...sque la correction est complète, le compas n'est plus ...is qu'à l'action du champ terrestre. On vérifie alors, ...n aimant *déflecteur*, posé sur le couvercle du compas ... une position déterminée, que la déviation produite ...ue le déflecteur est à angle droit avec l'aiguille est indé...iante de la direction du navire.

...erreur de bande est elle-même corrigée, si l'on a $Z' = Z$, ...à-dire si l'inclinaison apparente déterminée à bord est ...e à l'inclinaison magnétique du lieu.

...s deux modes de vérification donnent le moyen de réta... les corrections même en pleine mer et en supposant que ...t du ciel ne permette pas de déterminer la direction du ...idien géographique par des observaiions astronomiques. ...ffit, en effet, que la déviation produite par le déflecteur ... indépendante du cap et que l'inclinaison mesurée à bord ... égale à l'inclinaison réelle que l'on connaît par la posi... approximative du navire.

...3. **Correction des observations à bord.** — Pour étudier le ...mp magnétique terrestre sur toute la surface du globe, il

CHAPITRE PREMIER

CTRICITÉ INDUSTRIELLE

TRANSMISSIONS TÉLÉGRAPHIQUES

ctères **généraux.** — Au point de vue industriel, ons si variées de l'électricité présentent des ca-ez distincts, qui permettent de les classer en deux fférents.

grand nombre de cas, tels que les sonneries, les signaux de chemins de fer et les télégraphes, on e surtout de mettre à profit la rapidité avec laquelle omènes électriques se transmettent par les conduc-ut organe mis en mouvement sur la ligne absorbe ent un travail, mais la dépense correspondante est très faible. On réduit d'ailleurs ce travail dans beau-cas en utilisant l'électricité pour mettre en jeu des xiliaires, par une sorte de déclic, telle que l'action ls, d'un ressort, d'une pile locale.

es progrès à réaliser dans ce genre d'appareils ont et d'assurer la marche des organes et, quand il s'agit missions télégraphiques, de réduire le temps néces-traduction de chacun des signaux, afin d'augmenter

lante z et peut s'écrire

$$\frac{d^2V}{dx^2} + 2z\frac{dV}{dz} = 0. \tag{3}$$

Le rapport v du potentiel V au potentiel V_0 à l'origine est alors une simple fonction de z

$$v = \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}dz, \tag{4}$$

et l'intensité correspondante du courant est

$$I = \frac{V_0}{\rho}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\frac{z}{x} = \frac{V_0 x}{\rho\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a}{t}}\,e^{-\frac{a}{t}}. \tag{5}$$

Pour une distance déterminée, la quantité a est une cons-

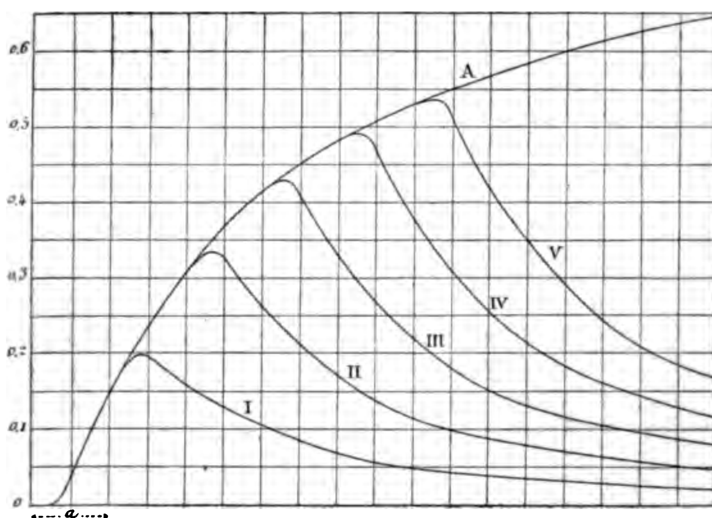


Fig. 263.

ante. La valeur de v est d'abord nulle ; elle ne devient sensi-
ɔle qu'à partir de l'époque $4t = a$ et tend ensuite vers l'unité ; ɩa marche est figurée par la courbe A (fig. 263). Pour une nême valeur de z, le courant I est en raison inverse de la dis-

$2a, \ldots, 5a$. Il se forme ainsi une *onde électrique* qui se transporte suivant une loi assez complexe et s'étale de plus en plus à mesure qu'elle se propage.

Si l'intervalle τ des deux contacts à la source et au sol est assez petit, on peut écrire

$$U = V(t) - V(t-\tau) = \tau \frac{\partial V}{\partial t} = \tau \frac{dV}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t},$$

ou, en tenant compte des équations (2) et (4),

$$(6) \qquad \frac{U}{V_0} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \frac{z}{t} e^{-z^2} = \frac{\tau}{a\sqrt{\pi}} z^3 e^{-z^2}.$$

La valeur du potentiel résultant U ne dépend plus seulement de z et varie, toutes choses égales, en raison inverse du carré de la distance par la quantité a.

En un point déterminé, l'époque t_1 à laquelle se produit le maximum est définie par la condition $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ ou $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$, qui donne $2z^2 = 3$, c'est-à-dire

$$t_1 = \frac{a}{z^2} = \frac{2a}{3} = \frac{t_m}{3}.$$

C'est le tiers du temps au bout duquel le courant I (fig. 264) atteint son maximum ; il correspond au point d'inflexion de courbe A (fig. 263) du potentiel pour une communication permanente avec la source. Le temps t_1 peut être considéré comme la *durée de propagation* d'une onde électrique instantanée ; il est proportionnel au coefficient $\alpha^2 = \gamma\rho$ et au carré de la distance.

Par la même raison, le courant J relatif à une communication de durée τ avec la source sera $I(t) - I(t-\tau)$ et on pourra le déterminer graphiquement. Les courbes I, II, III (fig. 264) représentent la loi des intensités en un point pour des contacts de durée a, $2a$ et $3a$. Comme la valeur de I passe par un maximum, les courants J ne tendent finalement vers zéro qu'après avoir changé de signe.

ient ainsi une onde beaucoup plus courte et le fil est ramené rapidement à l'état neutre après son passage.

Supposons que le potentiel à l'origine ait des valeurs alter-

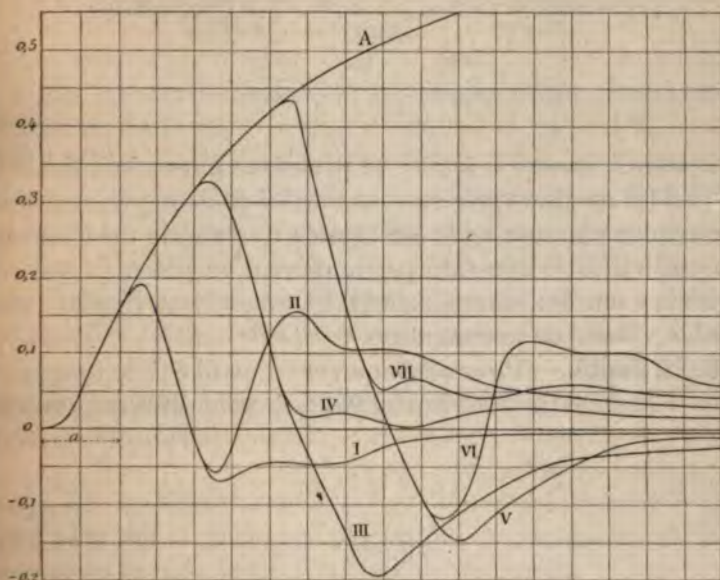


Fig. 265.

natives $+V_0$ et $-V_0$, pendant des temps très petits τ, et que l'opération soit répétée un certain nombre de fois.

Pour deux courants successifs d'ordres $2p+1$ et $2p+2$, le potentiel transmis est

$$U(t-2p\tau)-U[t-(2p+1)\tau]=\tau\frac{\partial}{\partial t}U(t-2p\tau)=\tau\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Si le nombre total des contacts est pair et égal à $2n$, le potentiel U_n à la distance x a pour expression

$$U_n=n\tau\frac{\partial U}{\partial t}=n\tau\frac{\tau V_0}{a\sqrt{\pi}}z^2(3-2z^2)e^{-z^2}\frac{\partial z}{\partial t},$$

$$(8)\qquad U_n=n\tau\frac{\tau V_0}{2a^2\sqrt{\pi}}z^5(2z^2-3)e^{-z^2}.$$

Ce potentiel U_n est proportionnel au nombre des opérations et en raison inverse de la quatrième puissance de la distance. L'époque t_n du maximum a lieu pour la condition

$$4z^4 - 20z^2 + 15 = 0, \qquad 2z^2 = 5 + \sqrt{10} = 8,16;$$

$$t_n = \frac{2a}{8,16} = \frac{t_m}{8,16} = \frac{t_1}{2,72}.$$

Il resterait encore à traiter le problème plus général où le potentiel à l'origine varie suivant une loi quelconque, que l'on représentera par une suite de termes de la série de Fourier. On a traité déjà la question particulière d'un potentiel qui varie suivant une loi sinusoïdale (**170**), auquel cas il existe une véritable vitesse de propagation.

858. Fil limité. — Pour passer au cas d'un fil OE de longueur limitée l (fig. 266), dont l'extrémité E communique avec le sol, considérons un fil indéfini X'X sur lequel on supposera deux séries de sources, à des distances successives égales à $2l$; les premières O_1, O_2, ... sont identiques à la source donnée qui existe au point O, et les autres O', O'', O''', ... ont la même valeur numérique changée de signe.



Fig. 266.

Toutes ces sources, O et O', O_1 et O'', ..., étant deux à deux symétriques par rapport au point E et de signes contraires, le potentiel en E sera toujours égal à zéro. De même, toutes les sources ajoutées, O_1 et O', O_2 et O'', ... sont deux à deux symétriques par rapport au point O et de signes contraires : le potentiel en ce point ne dépendra que de la source qui s'y trouve. La portion OE du fil indéfini est donc dans le même état que si elle était seule.

L'intensité du courant au point P, situé sur le fil OE à la distance x de l'origine O, est la somme algébrique des intensités qui seraient produites en ce point par toutes les sources supposées sur un fil indéfini.

Si toutes les sources sont portées au potentiel constant V_0, la portion i du courant due à la source O et pour l'époque t peut s'écrire, d'après l'équation (5),

$$i = \frac{2V_0}{\rho\sqrt{\pi}} \frac{z}{x} e^{-z^2} = \frac{V_0 \alpha}{\rho\sqrt{\pi t}} e^{-z^2} = \frac{V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi t}} f(x).$$

Pour les sources situées à gauche, il suffira dans cette expression d'attribuer successivement à x les valeurs $x+2l$, $x+4l, \ldots\, x+2nl$. Les sources O', O'', O''', ... donneraient des courants de sens contraires aux précédentes si elles étaient au potentiel V_0, mais comme elles ont été changées de signe, les flux d'électricité qu'elles produisent sont encore de même sens ; on devra donc aussi remplacer x par $2l-x\ldots, 2nl-x$. L'intensité totale I est alors

$$I = \frac{V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi t}} [\ldots + f(4l+x) + f(2l+x) + f(x) + f(2l-x) + f(4l-x) + \ldots)].$$

Si l'on fait $x = l$, pour considérer le phénomène à l'extrémité E du fil non isolée, l'expression se simplifie ; l'intensité est double de celle que donneraient toutes les sources de gauche. La valeur de x dans z^2 devant être remplacée successivement par l, $3l$, $5l$, ..., on aura donc, en posant

$$e^{-\frac{\alpha^2 l^2}{4t}} = \varphi,$$

$$(9) \qquad I = \frac{2V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi t}} [\varphi + \varphi^{3^2} + \varphi^{5^2} + \varphi^{7^2} + \ldots + \varphi^{(2n+1)^2} + \ldots].$$

L'intensité est nulle d'abord, puisque φ s'annule avec t ; elle croît ensuite vers la valeur limite $\frac{V_0}{\rho l}$. La courbe représentée par cette série serait assez facile à calculer parce que les termes vont rapidement en décroissant lorsque φ diffère sensiblement de l'unité.

Lord Kelvin a résolu le problème à l'aide d'une autre série plus facile à discuter qui se déduit directement de l'équation générale de Fourier (167).

$$I = \frac{V_0}{\rho l} \left[1 + 2 \sum_{n=1} e^{-\frac{}{\alpha^2 l^2} t} \cos n\pi \right.$$

En donnant à n les valeurs successives 1, 2,
nus prennent alternativement des valeurs égales
On peut donc écrire, en posant

$$u = e^{-\frac{\pi^2 t}{\alpha^2 l^2}},$$

$$(10) \qquad I = \frac{V_0}{\rho l} \left[1 - 2 (u - u^4 + u^9 - \ldots \mp u^{n^2} \ldots) \right]$$

La série comprise entre parenthèses est con
que la variable u reste toujours inférieure à l'
le temps t a des valeurs très petites, u tend v
série est égale à 0,5 ; l'intensité du courant es
nulle. A mesure que le temps augmente, u dim
tend vers zéro, de sorte que l'intensité du coura
la valeur limite $\frac{V_0}{\rho l}$.

Cette série est d'ailleurs facile à calculer;
d'une manière appréciable de sa valeur maxim
rant ne devient appréciable, qu'à partir du
quantité $4u$ est supérieure à 3. En appelant a'
quelle cette valeur est atteinte, on a

$$a' = \frac{\alpha^2 l^2}{\pi^2} \mathfrak{L}. \frac{4}{3};$$

on peut écrire alors

emps et l'intensité finale pour unité, l'intensité du cou- produite à l'extrémité du fil qui communique au sol par otentiel constant établi à l'autre extrémité.

our obtenir l'intensité qui correspond à la communication fil avec une source à potentiel constant V_0 pendant un ps τ, il suffirait encore de calculer $F(t) - F(t-\tau)$, ou de struire géométriquement la courbe dont l'ordonnée en que point est égale à la différence des ordonnées des courbes $F(t)$ et $F(t-\tau)$.

es courbes I, II, III, IV, V, VI, VII (fig. 267), représ- ent ainsi les intensités qui proviennent d'une série de

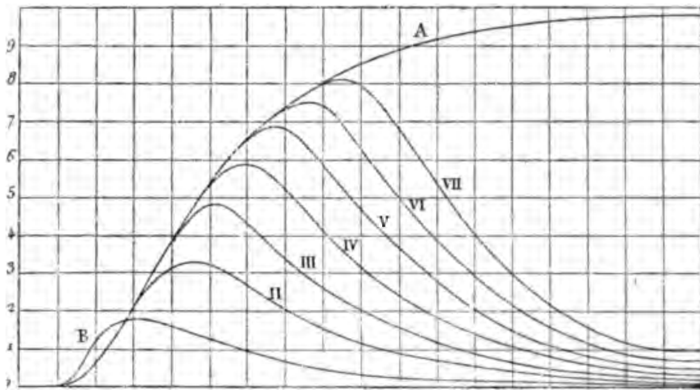


Fig. 267.

acts différents, dont les durées sont respectivement égales a', $3a'$....., $7a'$; le phénomène se présente encore comme onde électrique.

la durée du contact est infiniment petite, l'intensité à la nce x est donnée par l'équation

$$J = \tau \frac{dF}{dt} = \tau \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dt},$$

$$J = \tau \frac{2V_0}{\rho l} \cdot \frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} (u - 4u^4 + 9u^9 - \ldots \mp n^2 u^{n^2} \pm \ldots).$$

tte intensité est représentée par la courbe B; elle est

maximum lorsqu'on a

$$1 - 16u^3 + 81u^8 \ldots \mp n^4 u n^2 - 1 \ldots = 0,$$

équation qui donne sensiblement

$$u = \left(\frac{3}{4}\right)^3, \qquad \text{ou} \qquad t = 3a'.$$

Enfin, si l'on veut réduire l'amplitude des ondes à l rivée et décharger le fil, on pourra encore mettre l'origine fil alternativement à des potentiels égaux et de signes c traires, pendant des temps égaux ou inégaux, en la rel avec l'un des pôles d'une pile.

Les courbes I, II et III de la figure 268 représentent

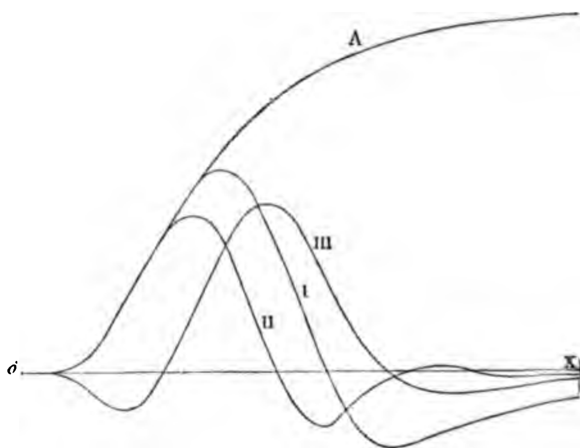


Fig. 268.

ondes d'intensité, pour une suite de contacts alternatifs (les durées respectives sont :

Courbes.	Durées des contacts.			
	+	—	+	—
I	$4a'$	$4a'$		
II	$3a'$	$3a'$	a'	
III		a'	$4a'$	$2a'$

...tions ([1]) conduit à des résultats
...obtenus déjà pour la forme des
...iste alors une vitesse de propa-
...mensions du conducteur.
...et ses dérivées croissent graduel-
...our un potentiel initial V_0 établi
...toujours, sur le front de l'onde.

...quation (10), qui devient alors

$$\gamma\lambda \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

...front de l'onde est une fonction de

...es, ce front se propage avec une

...verse est $\sqrt{\gamma\lambda}$. Or, on a vu précé-
...efficient de self-induction λ, au
...superficiels, est l'inverse de la ca-
...respondante. La vitesse de propa-
...est donc la racine carrée du rapport
...longueur de fil, en mesures électro-
...électromagnétiques, c'est-à-dire le
...(9) ou la vitesse de la lumière. Tout
...partie de l'électricité se mouvait avec
...mière, pendant que le reste suit avec
...s variable avec les conditions de la
..., au moins pour le début des manifes-
...ème résultat que dans les expériences
...s hertziennes.
...e directement cette propriété pour les
...c'est-à-dire dans des conditions qui se
...de la pratique. Considérons un con-
...défini : soit s l'abscisse d'une section
...latif à un élément de contour, $I = \Sigma i$ le
...cisse d'un point intérieur pris sur une
...ices.

...lectr. et de Magn., t. II, p. 54; 1890. — H. POINCARÉ,
..., p. 182; 1894.
...Acad. des Sc., t. CXVIII, p. 227; 1894.

La discussion de ces équations [1] conduit à des résultats analogues à ceux qu'on a obtenus déjà pour la forme des ondes transmises, mais il existe alors une vitesse de propagation indépendante des dimensions du conducteur.

En effet, si le potentiel V et ses dérivées croissent graduellement à partir de zéro, pour un potentiel initial V_0 établi à l'origine du fil, on aura toujours, sur le front de l'onde, $V = 0$, $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. L'équation (10), qui devient alors

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \gamma\lambda \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \tag{11}$$

montre que le potentiel du front de l'onde est une fonction de $x \pm \frac{t}{\sqrt{\gamma\lambda}}$. En d'autres termes, ce front se propage avec une vitesse constante dont l'inverse est $\sqrt{\gamma\lambda}$. Or, on a vu précédemment (**410**) que le coefficient de self-induction λ, au moins pour les courants superficiels, est l'inverse de la capacité électrostatique correspondante. La vitesse de propagation du front de l'onde est donc la racine carrée du rapport des capacités de la même longueur de fil, en mesures électrostatiques et en mesures électromagnétiques, c'est-à-dire le rapport **v** des unités (**419**) ou la vitesse de la lumière. Tout se passe comme si une partie de l'électricité se mouvait avec la vitesse même de la lumière, pendant que le reste suit avec une vitesse moindre, très variable avec les conditions de la ligne. On retrouve ainsi, au moins pour le début des manifestations électriques, le même résultat que dans les expériences relatives aux oscillations hertziennes.

M. Potier [2] démontre directement cette propriété pour les courants superficiels, c'est-à-dire dans des conditions qui se rapprochent beaucoup de la pratique. Considérons un conducteur cylindrique indéfini : soit s l'abscisse d'une section droite, i le courant relatif à un élément de contour, $I = \Sigma i$ le courant total, x l'abscisse d'un point intérieur pris sur une parallèle aux génératrices.

[1] A. Vaschy, *Traité d'Électr. et de Magn.*, t. II, p. 54; 1890. — H. Poincaré, *Les Oscillations électriques*, p. 182; 1894.

[2] A. Potier, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CXVIII, p. 227; 1894.

En appelant r la distance des éléments ids et dx, la force électromotrice par unité de longueur, sur la droite considérée, peut s'exprimer par la formule de Neumann ou par la variation du potentiel V, ce qui donne

$$-\frac{\partial}{\partial t}\sum\int\frac{i\,ds}{r}=\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-\frac{\partial}{\partial t}\sum\int i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)ds.$$

Or, pour chaque élément du contour, l'inverse de la distance r est une fonction de $x-s$; il en résulte

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)=0,$$

$$-\int i\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)ds=\int i\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)ds=\left[\frac{i}{r}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int\frac{1}{r}\frac{\partial i}{\partial s}ds,$$

et le terme $\frac{i}{r}$ est nul aux deux limites.

D'autre part, si $q\,ds$ est la charge d'un élément, on a

$$ds\frac{\partial q}{\partial t}dt=i\,dt-\left(i+\frac{\partial i}{\partial s}ds\right)dt=-\frac{\partial i}{\partial s}ds\,dt,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial i}{\partial s}=0,$$

$$-\int\frac{1}{r}\frac{\partial i}{\partial s}ds=\int\frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial t}ds=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{q\,ds}{r},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum\int\frac{q\,ds}{r}.$$

Exprimant le potentiel électromagnétique V en fonction des masses, on en déduit finalement

$$V=v^2\sum\int\frac{q\,ds}{r},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

On retrouve ainsi la même vitesse de propagation **v** pour potentiel électrique V et, par conséquent, pour le champ gnétique qui en résulte.

361. **Expériences.** — Il résulte de ces considérations que tentatives faites pour mesurer la propagation de l'électri-é doivent conduire à des résultats différents, suivant la thode d'observation, la vitesse se rapprochant d'autant is de celle de la lumière que l'on déterminera plus exacte-nt celle qui correspond au front de l'onde.

C'est à Wheatstone ([1]) qu'est due la première expérience ns laquelle a été rendue manifeste la durée de la propaga-n des décharges d'une bouteille de Leyde. Un circuit de ande longueur, terminé par des conducteurs A et B, est errompu en trois points *a*, *b* et *c*, les deux premiers voi-is des extrémités et le troisième vers le milieu de la ligne nérale; ces interruptions sont d'ailleurs rapprochées les unes s autres sur une même ligne droite verticale. Quand on ie les conducteurs A et B aux armatures d'une bouteille de yde chargée, des étincelles se produisent aux trois inter-ptions *a*, *b* et *c* du circuit. Pour vérifier si elles sont simul-iées, Wheatstone a imaginé de les observer dans un miroir irnant, méthode dont on a fait depuis un si fréquent usage. s étincelles apparaissent comme des trainées lumineuses ine certaine longueur; les images extrêmes restent sur la ème verticale, tandis que l'image intermédiaire *c* se montre inifestement en retard.

En déterminant la largeur angulaire des images, ainsi que cart de la troisième, et la vitesse de rotation du miroir par son d'une carte frappée à chaque tour, on en déduit les in-valles de temps correspondants. Les conducteurs inter-édiaires *ac* et *bc* étant formés par des fils de cuivre de $0^c,17$ diamètre et 732 mètres de longueur, Wheatstone conclut ses observations que la durée des étincelles était d'environ $\frac{1}{00}$ de seconde, et la vitesse de propagation de 460 000 kilo-tres. L'existence d'une propagation était ainsi démontrée, is la méthode ne permettait pas d'évaluer la vitesse avec e exactitude suffisante.

(1) CH. WHEATSTONE, *Phil. Trans., L. R. S.*; 1835, p. 583.

Les recherches de Fizeau et Gounelle [1], relatives à la propagation des signaux dans les fils télégraphiques, reposent sur le principe célèbre de la roue dentée qui avait permis à Fizeau de mesurer la vitesse de la lumière.

Une roue en bois portait sur sa circonférence 36 divisions égales, munies de lames alternativement en platine et en bois. Des balais de platine, disposés par paires, s'appuyaient sur les divisions de manière à produire une interruption pour chaque passage sur une lame de bois.

Plusieurs paires de balais, ab, $a'b'$, $a''b''$..., formant des interrupteurs A, A′, A″,.., sont montés à différentes distances; le balai a de la première communique avec une pile, le balai b avec une ligne télégraphique qui revient au balai b' de la paire suivante, et le balai a' est finalement réuni au sol par un galvanomètre G′. Si, pendant la rotation de la roue, l'intervalle de fermeture des interrupteurs A et A′ correspond au temps que met le signal électrique à parcourir la ligne, le galvanomètre G′ sera dévié ; dans le cas contraire, l'aiguille doit rester immobile.

La meilleure disposition a été de joindre la ligne de retour à deux interrupteurs A′ et A″, les balais correspondants a' et a'' étant reliés aux cadres d'un galvanomètre différentiel. L'aiguille dévie d'un côté ou de l'autre suivant que le courant de retour passe par l'un ou l'autre des interrupteurs.

L'expérience a été faite sur la ligne de Paris à Amiens, comprenant 314 kilomètres d'un fil de fer de 4^{mm} de diamètre, et sur la ligne de Paris à Rouen, ayant 288 kilomètres, partie en fer et partie en cuivre de $2^{mm},5$ de diamètre. La propagation se traduit par des changements périodiques d'intensité d'ailleurs très différente; les courants discontinus éprouvent une sorte de *diffusion* qui en prolonge la durée au poste de retour. En admettant que la propagation soit uniforme, la vitesse a été de 100 000 kilomètres dans le fer, et 180 000 kilomètres dans le cuivre.

Cette différence pour les deux métaux peut s'expliquer par les propriétés magnétiques du fer, qui augmentent l'induction propre, et par sa plus grande résistivité.

(1) H. Fizeau et E. Gounelle, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XXX, p. 437; 1850.

En tous cas, le mode d'observation ne correspond pas au ›nt de l'onde, mais au maximum des ondes résultantes dues x contacts successifs.

Des expériences analogues, faites aux États-Unis sur les ;nes aériennes par Walker et par Gould, ont donné des vi- sses beaucoup plus faibles, de 18 000 à 40 000 kilomètres par conde; les conditions étaient très différentes et les procédés observation semblent avoir laissé beaucoup à désirer.

Faraday [1] a mis en évidence les causes assez complexes ıi font varier, dans de si grandes proportions, la vitesse ›parente de propagation.

Après avoir constaté d'abord par diverses épreuves que les bles garnis de gutta-percha, et plongés dans le sol ou dans :au, ont une capacité électrique considérable, il mit à profit ligne télégraphique souterraine de Londres à Manchester, rmée de 4 fils différents, chacun d'environ 600 kilomètres. ɜs fils 1 et 2, 3 et 4, étant réunis à Manchester, on avait sposé, à la station de Londres, un galvanomètre G_1 à l'ori- ne du fil 1, un autre G_2 entre les fils 2 et 3, puis un troi- ème G_3 entre le fil 4 et le sol.

Quand on fait communiquer l'origine A du câble avec l'un :s pôles d'une pile non isolée, le courant doit parcourir s quatre fils et les trois galvanomètres avant le retour au ıl. En fermant ainsi le circuit, l'aiguille du galvanomètre G_1 ;vie aussitôt, celle du deuxième G_2 au bout d'une seconde ıviron, puis celle du troisième G_3 après deux secondes; en ıtre, chacune d'elles met quelque temps pour atteindre la ;viation permanente.

Si on sépare l'extrémité A de la pile, l'aiguille du galva- ›mètre G_1 se rapproche d'abord de zéro, puis successive- ent celles des galvanomètres G_2 et G_3. Si on isole l'extré- ité B et qu'on établisse avec la pile un contact momentané, ıiguille du galvanomètre G_1 est d'abord déviée dans un cer- in sens, puis en sens contraire sous l'action du courant de tour. Les différents caractères des ondes transmises sont nsi manifestes. Faraday et Latimer Clark ont ensuite obtenu ɜs résultats analogues, en substituant aux galvanomètres

(1) FARADAY, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. XLI, p. 123; 1854. — *Phil. ıg.* [4], t. VII, p. 396; 1854 et t. IX, p. 162; 1855.

[illegible]

point de vue, la disposition employée par M. Siemens (2)
[illegible] une des plus ingénieuses. Un cylindre d'acier couv
[illegible] de fumée est animé d'un mouvement de rotation;
pointes métalliques P et P' situées près de la surface sont
liées, la première par un fil court à l'armature intérieu
d'une bouteille de Leyde, la seconde à l'armature A d
autre bouteille par l'intermédiaire d'un fil télégraphique.
deux bouteilles sont isolées et réunies par leurs armat
extérieures. L'appareil étant électrisé, on le décharge en
tant au sol l'armature commune.

La décharge en P est unique et ne laisse qu'une trace s
cylindre; la pointe P' donne une série de traces se succé
à des intervalles plus ou moins réguliers. Cette apparenc
tient pas à l'existence d'un phénomène oscillatoire, parce
la résistance du circuit est trop grande; on peut l'expli
en admettant que le chemin dans l'air, échauffé d'abord
le passage de la première étincelle, augmente de plus en
et devient assez résistant pour interrompre la décharge
qu'à ce qu'un nouvel afflux d'électricité provoque une a
étincelle. Comme la production de la première étincelle
exige un certain potentiel explosif, le temps qui la sépar

(1) W[illegible], Phil. Mag. [4], t. X, p. [illegible]; 1855. — Ann. de Chim. et de [illegible] t. XLVI, p. [illegible]; 1856.
(2) W. Siemens, Pogg. Ann. t. CLVIII, p. [illegible]; 1876.

; étincelles en P' se rapproche d'autant plus de la durée la propagation du front de l'onde, que la pointe est ›ine du cylindre et le potentiel explosif correspon- ns élevé. Les vitesses obtenues ont varié de 202 000 kilomètres, pour différents fils de fer ayant de 7 mètres de longueur.

APPLICATIONS DIVERSES.

achines électrostatiques. — Dans les appareils pro- d'électricité statique, comme les machines à frotte- à multiplication (**145**), le mouvement des organes fait ›ort continu d'électricité entre les collecteurs. Si les ıt réunis entre eux par un conducteur, le jeu de la y entretient un courant continu, et la différence de des pôles reste très faible. Si le conducteur intermé- , interrompu par un excitateur, il s'y produit une série rges, et la différence de potentiel des pôles augmente ıement pour s'annuler à chaque étincelle.

tance explosive, qui croît avec la différence de po- 'est limitée que par la dimension des organes et la des collecteurs.

it d'électricité est à peu près indépendant de la dis- ›losive, tant que celle-ci reste très petite par rapport ance explosive maximum, c'est-à-dire de quelques 'es dans les machines ordinaires, mais il diminue ssez rapidement. Toutes choses égales, le débit est ›nnel à la vitesse de rotation, ou plus exactement à de la surface des plateaux ou cylindres qui sont uti- les peignes pendant l'unité de temps. Le rapport du ette surface utilisée paraît plus grand pour les ma- réaction que pour les machines à frottement, et varie ent avec la nature des verres employés.

ntéressant d'évaluer l'énergie électrique ainsi pro- e machine de Holtz à deux plateaux tournants de 60ᶜ tre [1] a été employée pour charger une batterie dont té électrostatique était de 22 500ᶜ.

[1] ·CART, *Traité d'électricité statique*, t. II, p. 324.

Avec 7 tours de la machine, la charge de la batterie était suffisante pour provoquer une étincelle de $0^c,1$ dans un excitateur à boules de $2^c,2$ de diamètre, auquel cas le potentiel explosif est d'environ 15 unités électrostatiques (780).

La charge de la batterie était donc $2,25.10^4.15 = 3,375.10^5$, ce qui correspond à une production par tour de $0,482.10^5$ ou

$$\frac{0,482.10^6}{3.10^{10}} = 1,61.10^{-5} \text{ coulombs.}$$

Si la machine faisait 10 tours par seconde, le courant serait donc voisin de 0,0002 ampère ; c'est à peu près le résultat auquel on arrive en réunissant les pôles par un galvanomètre dont les fils sont convenablement isolés.

Le travail utilisé par la décharge de la batterie est

$$\frac{3,375.10^5.15}{2} = 2,53.10^6 \text{ ergs} = 0,253 \text{ joule.}$$

Le travail par tour est donc 0,036 joule. Pour une vitesse de 10 tours et en supposant la différence de potentiel constante, la puissance utilisée serait de 0,72 watt.

Toutefois le travail électrique qui correspond au jeu de la machine augmente beaucoup avec la distance explosive. Pour en avoir une idée, nous pouvons supposer que le débit reste constant et que les pôles sont écartés de manière à maintenir invariable, comme elle le serait avec des aigrettes, la différence de potentiel qui donne le maximum de distance explosive (782). Dans ce cas, la puissance électrique de la machine pour une vitesse de 10 tours par seconde deviendrait 23,3 fois grande ou 16,56 watts.

Ces considérations suffisent pour montrer que l'énergie utilisée par les machines électrostatiques est en réalité très petite ; on constate bien, avec les machines à réaction, que le travail nécessaire pour entretenir leur mouvement augmente quand elles sont amorcées, mais la plus grande partie du travail dépensé est absorbée dans les frottements et dans les pertes d'électricité.

863. Piles et accumulateurs. — Dans ces appareils l'énergie est empruntée aux actions chimiques. Supposons que la pile

renferme N couples identiques, de force électromotrice e et de résistance r, associés en q séries parallèles de n couples chacune ; la force électromotrice de la pile est $E = ne$, et sa résistance intérieure $R_0 = \frac{nr}{q}$.

Si le courant est I, la force électromotrice aux bornes est $E' = E - IR_0$, la puissance fournie par les actions chimiques $W = EI$, la puissance utilisable à l'extérieur $U = E'I$ et le rendement u de l'appareil

$$u = \frac{U}{W} = \frac{E'}{E} = 1 - \frac{R_0 I}{E}.$$

En appelant I_0 le courant $(E = R_0 I_0)$ qui correspondrait à un travail extérieur nul, on peut écrire

$$U = R_0 I (I_0 - I), \qquad u = 1 - \frac{I}{I_0} = \frac{I_0 - I}{I_0}.$$

Lorsque le courant diminue depuis le maximum I_0 jusqu'à zéro, la valeur de U augmente d'abord, pour diminuer ensuite, tandis que le rendement u croît toujours et tend vers l'unité à mesure que U tend vers zéro.

La puissance utile atteint son maximum U_m pour $I_0 = 2I$. Le rendement est alors de 50 p. 100 et on a

$$U_m = \frac{R_0 I_0^2}{4} = \frac{E^2}{4R_0} = nq\frac{e^2}{4r} = N\frac{e^2}{4r}.$$

Le maximum de puissance utilisable est proportionnel au nombre des couples, quel que soit leur arrangement.

Dans les couples usuels, la force électromotrice e atteint rarement 2 volts. La résistance r varie, au contraire, dans de larges limites ; c'est avec les couples Bunsen qu'on obtient les valeurs les plus faibles, aussi les emploie-t-on toutes les fois que la pile doit fournir un travail important.

Si p désigne l'équivalent électro-chimique de l'un des corps, la quantité de ce corps mise en jeu par le courant I pendant l'unité de temps, dans chacune des séries parallèles, est égale à pI, ce qui donne, pour le temps t, $P = npIt$; l'énergie chimique correspondante est $EIt = e\frac{P}{p}$.

Cette énergie dépensée est indépendante du temps de l'opération, de la disposition des couples et de leur nombre; elle est simplement le produit de la force électromotrice de chaque couple par le nombre d'équivalents mis en jeu.

Comme chaque coulomb dégage $1^{gr},036.10^{-5}$ d'hydrogène, la quantité d'hydrogène P par seconde qui correspond à la puissance d'un kilowatt est

$$P = \frac{0^{gr},01036}{e}, \quad \text{ou} \quad \frac{37^{gr},3}{e} \text{ par heure.}$$

On en déduira les quantités correspondantes des différents corps, pourvu que les réactions soient bien connues, mais il arrive souvent que les effets sont assez complexes. Tel est le cas de l'acide azotique qui sert comme dépolarisant dans la pile Bunsen. Le passage d'un coulomb détruit alors un équivalent ou seulement un tiers d'équivalent, suivant que l'acide est transformé en acide hypoazotique ou en bioxyde d'azote; on peut prendre comme moyenne la moitié d'un équivalent. On trouve ainsi, pour les deux couples les plus employés :

Consommation pour un kilowatt-heure.

Daniell ($e = 1^v$).		Bunsen ($e = 1^v,8$).	
Zinc	$1^k,23$	Zinc..........	$0^k,68$
Acide sulfurique.	$1^k,83$	Acide sulfurique.	$1^k,02$
Sulfate de cuivre.	$4^k,65$	Acide azotique. .	$0^k,68$

Le sulfate de zinc doit être considéré comme un produit inutilisable dans les deux cas. Il est possible, au contraire dans le couple Daniell, de reconstituer le sulfate de cuivr avec le cuivre déposé, de sorte que la dépense se réduirait celle de l'acide sulfurique correspondant.

On peut estimer le prix du kilogramme de ces différente substances à $0^{fr},50$ pour le zinc et l'acide azotique et $0^{fr},1$ pour l'acide sulfurique; mais l'amalgamation nécessaire d zinc est bien près de doubler le prix du métal. Le prix d kilowatt-heure serait alors de $1^{fr},42$ avec les couples Danie et [illegible] avec les couples Bunsen.

Il est important de remarquer encore qu'une fraction seulement de cette énergie est utilisable à l'extérieur. Dans les conditions de travail maximum, il faudrait doubler tous les nombres qui précèdent.

La comparaison de cette dépense avec celle des machines à feu montre qu'il serait illusoire de chercher aucune économie dans l'emploi des piles comme sources d'énergie, surtout si l'on fait intervenir le travail qu'exigent les manipulations. En outre, les liquides ne peuvent plus servir utilement lorsqu'ils n'ont plus la concentration convenable, ou qu'ils sont trop chargés d'autres corps en dissolution, et il se produit toujours sur les électrodes des actions locales qui représentent une énergie dépensée sans profit; ces deux causes contribuent encore à augmenter le prix de l'énergie électrique.

Les conditions sont plus favorables pour les accumulateurs (**753**), puisqu'ils n'exigent aucune manipulation, après la première installation, et que les corps se reconstituent dans les différentes réactions.

Le travail demandé au courant consiste à vaincre, soit une résistance R', soit une force électromotrice E', soit les deux à la fois; la puissance utilisée est alors $R'I^2$, $E'I$ ou $R'I^2+E'I$, suivant les cas. En outre, des fils de communication de résistance R_1 sont nécessaires pour relier l'électromoteur avec les points où le travail s'effectue, de sorte que la résistance R_0 doit être remplacée par

$$R=R_0+R_1=\frac{nr}{q}\left(1+R_1\frac{q}{n}\right).$$

La puissance utile $E'I+R'I^2=(E'+IR')I$ équivaut à celle qui serait absorbée par une force électromotrice $E_1=E'+IR'$ ou par une résistance $x=R'+\frac{E'}{I}$ simplement métallique, et l'on peut écrire

$$W=EI=(R+x)I^2,$$

$$U=EI-RI^2=xI^2=E_1I,$$

$$u=\frac{U}{W}=\frac{E_1}{E}=\frac{x}{R+x}.$$

Cette énergie dépensée est indépendante du te
pération, de la disposition des couples et de le
elle est simplement le produit de la force électr
chaque couple par le nombre d'équivalents mis e

Comme chaque coulomb dégage $1^{gr},036.10$
la quantité d'hydrogène P par seconde qui co
puissance d'un kilowatt est

$$P = \frac{0^{gr},01036}{e}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{37^{gr},3}{e} \text{ pa}$$

On en déduira les quantités correspond
corps, pourvu que les réactions soient bi
arrive souvent que les effets sont asse
le cas de l'acide azotique qui sert comm
pile Bunsen. Le passage d'un coulomb
valent ou seulement un tiers d'équivale
est transformé en acide hypoazotique
on peut prendre comme moyenne la
On trouve ainsi, pour les deux coupl

Consommation pour un

Daniell ($e = 1^v$).	
Zinc	$1^k,23$
Acide sulfurique.	$1^k,83$
Sulfate de cuivre.	$4^k,65$

Le sulfate de zinc doit êtr
inutilisable dans les deux ca
dans le couple Daniell, de
avec le cuivre déposé, de s
celle de l'acide sulfurique c

On peut estimer le prix
substances à $0^{fr},50$ pour l
pour l'acide sulfurique;
zinc est bien près de d
kilowatt-heure serait alo
et $1^{fr},12$ avec les couples

Désignons, en effet, par

- P le prix de l'unité de travail dans l'électromoteur;
- n le nombre de secondes par jour (86400);
- f la fraction du temps total utilisée par le courant;
- Q le prix de l'unité de volume du métal;
- t le taux d'amortissement;
- N le nombre de jours de l'année (365).

Le travail d'échauffement des conducteurs, par jour et par unité de longueur, est égal à $fn\frac{\rho}{S}I^2$ et la dépense $Pfn\frac{\rho}{S}I^2$. D'autre part, le prix du métal correspondant est QS et les frais par jour $QS\frac{t}{100N}$. Le total de la dépense D, évaluée par jour et par unité de longueur, est donc

$$D = QS\frac{t}{100N} + Pfn\frac{\rho}{S}I^2.$$

La section du conducteur qui convient pour réduire cette dépense au minimum est déterminée par la condition que la dérivée du second membre soit nulle, c'est-à-dire que les deux termes soient égaux. Dans ce cas, les frais d'amortissement égalent la dépense relative à l'énergie perdue et l'on a

$$i^2 = \frac{I^2}{S^2} = \frac{t}{100}\frac{Q}{NnP}\frac{1}{f\rho},$$

$$D^2 = 4I^2\frac{ftn}{100N}PQ\rho.$$

Pour une dépense totale minimum, la densité i du courant ne dépend donc que du choix du métal et du prix de l'énergie, tandis que la dépense relative à un même courant est indépendante de la section du fil.

Avec deux métaux différents, dont les prix par kilogramme sont respectivement K et K′, les densités d et d', d'où $Q = Kd$ et $Q' = K'd'$, et les taux d'amortissement t et t', le rapport des densités i et i' du courant et celui des dépenses D et D′ correspondantes sont

$$\frac{i^2}{i'^2} = \frac{Kd}{K'd'}\frac{t}{t'}\frac{\rho'}{\rho}, \qquad \frac{D^2}{D'^2} = \frac{Kd}{K'd'}\frac{t}{t'}\frac{\rho}{\rho'}.$$

On peut estimer, qu'à volume égal, le prix du cuivre vaut 10 fois le prix du fer et que sa résistivité est 6 fois moindre. En faisant $Q = 10\,Q'$, $\rho' = 6\rho$, et supposant le même l'amortissement dans les deux cas, on trouve

$$\frac{i}{i'} = 7,74 \qquad \text{et} \qquad \frac{D}{D'} = 1,29.$$

La densité du courant serait donc beaucoup plus grande avec le cuivre qu'avec le fer et la dépense un peu supérieure. On doit remarquer encore que, pour un même courant, les sections des fils sont en raison inverse des valeurs de i et de i' : le poids du fer est donc plus élevé, ce qui augmente les frais d'établissement, et le métal se détériore plus vite, ce qui obligerait à élever le taux d'amortissement. Ces considérations suffisent pour justifier le choix du cuivre. En outre, lorsque les fils sont recouverts de matières isolantes, les frais d'isolement en augmentent beaucoup la valeur et il y a tout intérêt à employer les meilleurs conducteurs.

Pour déterminer la densité du courant, il faut évaluer le prix de l'énergie. Appelant C la dépense annuelle pour un électromoteur d'un kilowatt fonctionnant d'une manière continue, ou $C.10^{-3}$ la dépense du watt, on a

$$NnP = C.10^{-3}.10^{-7} = C.10^{-10}.$$

La densité du courant la plus avantageuse devient alors

$$i^2 = \frac{t}{100} \cdot \frac{Q}{C} \cdot \frac{10^{10}}{f\rho} = \frac{t}{f\rho}\,\frac{Q}{C}\,10^8.$$

La résistivité du cuivre est environ 1600. Admettons que le prix de ce métal soit de $1^{fr},75$ le kilogramme ou $0^{fr},0156$ le centimètre cube, et que la dépense C du kilowatt soit de 300 fr. L'électromoteur étant produit par des moyens mécaniques, supposons que le courant est employé sans interruption et que l'amortissement soit de 10 p. 100; on fera alors $t = 10$, et $f = 1$, ce qui donne

$$i^2 = \frac{10}{1600} \cdot \frac{0,0156}{300}\,10^8 = 32,5 \qquad \text{et} \qquad i = 5,61.$$

Le courant serait donc de 56 ampères par centimètre carré, c'est-à-dire de 0,56 ampère par millimètre carré.

Ajoutons encore que ces résultats ne s'appliquent pas aux conditions habituelles, car les frais d'installation et surtout l'emploi des isolants conduisent à élever beaucoup le prix Q de l'unité de volume du métal. En outre, le facteur f est plus petit que l'unité quand le jeu des appareils n'est pas continu, circonstance qui se présente dans la plupart des cas, par exemple pour l'éclairage. En réalité on emploie dans la pratique des courants beaucoup plus denses, qui vont jusqu'à 3 ou 4 ampères par millimètre carré.

865. Éclairage par incandescence. — L'énergie calorifique du courant est alors utilisée pour porter à une température très élevée un fil de charbon placé dans le vide.

L'éclat lumineux augmente rapidement avec la température, mais il est nécessaire en pratique de maintenir l'échauffement notablement au-dessous de la température à laquelle le fil se brise ou se détériore rapidement.

Lorsque l'équilibre de température est atteint, l'énergie du courant est compensée par le rayonnement. Le rapport de la quantité de lumière émise par la lampe à l'énergie dépensée est une fonction de la température seule et ne dépend pas de la forme des filaments de charbon, à la condition qu'ils aient tous le même pouvoir émissif.

L'expérience indique, par exemple, que l'on obtient aujourd'hui de bonnes conditions de lumière et de durée avec des lampes, dites de 20 bougies, équivalant à 1,71 carcel environ, quand elles sont traversées par un courant de 0,6 ampère avec une différence de potentiel aux bornes de 100 volts ; la puissance absorbée par bougie est alors de 3 watts.

Avec la pile Bunsen (**863**), le prix du watt-heure serait $1^{fr},12.10^{-3}$ et la lampe de 20 bougies, avec un rendement de 80 p. 100, coûterait

$$\frac{60}{0,8}\,1^{fr},12.10^{-3}=0^{fr},084.$$

Les lampes à incandescence fournissent beaucoup plus de lumière, pour la même dépense d'énergie, quand on augmente la différence de potentiel V aux bornes, mais l'usure

...s voisines de la p...
...ionnel à V^n, et l'usu...

...e une lampe. L son i...
...e nécessaire ; on peu...
... que ces différentes quan...
... expressions de la forme

$$W = CV^n.$$

... et Q le prix de l'unité de
... des produits consommés
... par heure et par unité de
...ampe et $q = \frac{QW}{L}$ du fait de

$$\frac{QC}{A} V^{...}$$

... second membre par rapport
... ondition

$$... = ... q.$$

...retien des lampes à la dé-

... résistance du charbon étant
... grand et on aura une limite
.... Dans cette hypothèse,
..., on obtient

$$... 0,174.$$

... prix de l'électromoteur. l'...
...mpensation.

... 1885.

M. Janet (¹) a proposé une méthode qui permet d'évaluer la température θ des filaments. Après avoir mesuré, à divers régimes, la force électromotrice E aux bornes de la lampe et le courant I, ce qui donne la résistance R, on traduit par une courbe la puissance $EI = f(R)$. Le courant étant supprimé quand la lampe est en pleine lumière, on traduit encore, en fonction du temps t, la courbe $R = \varphi(t)$ pendant le refroidissement. Ces deux courbes font connaître la puissance perdue à chaque instant $f(R) = \psi(t)$; la chaleur totale Q correspond à l'aire $\int \psi(t)\,dt$ depuis θ jusqu'à la température ordinaire. Si p est la masse du filament, en adoptant pour chaleur spécifique moyenne du charbon la valeur obtenue par M. Violle (²), la température θ sera donnée par l'équation

$$JQ = Jp(0,355 + 0,00006\,\theta) = \int \psi(t)\,dt.$$

866. Arc électrique. — Entre les charbons qui produisent l'arc électrique il existe une chute de potentiel variable avec les conditions et généralement comprise entre 40 et 70 volts. Edlund (³) a montré que la plus grande partie de cette chute est représentée par une force électromotrice inverse; le reste est dû à la résistance de la couche gazeuse interposée, résistance qui dépend de la longueur de l'arc, de sa température et de la largeur des charbons.

Pour des charbons de même section et un arc de longueur l, la chute totale de potentiel V serait, en désignant par a et b deux constantes, de la forme

$$V = a + blI.$$

Toutes les expériences ultérieures ont confirmé l'existence d'un terme constant et d'un autre proportionnel à la longueur de l'arc, de sorte qu'on peut écrire $V = a + l f(I)$, mais on n'est pas d'accord sur la loi qu'il convient d'admettre pour $f(I)$. La nature des électrodes joue d'ailleurs un rôle important, aussi bien sur la force électromotrice inverse que sur la résistance propre de l'arc, laquelle diminue beaucoup quand les électrodes dégagent des vapeurs métalliques.

(¹) P. Janet, *C. R. de l'Acad. des sc.*, t. CXXIII, p. 690; 1896.
(²) J. Violle, *C. R. de l'Acad. des sc.* t. CXX, p. 869; 1895.
(³) Edlund, *Ann. de Chim. et de Phys.*, t. XIII, XIV et XV; 1868.

D'après M. Lecher [1], la valeur totale de V serait indépendante du courant et représentée par $a + bl$. En exprimant V en volts et la longueur l en centimètres, on aurait ainsi :

Électrodes.	*a.*	*b.*
Charbons horizontaux. . .	33	45
» verticaux.	35,5	57
Platine (0^c,5 diamètre). . .	28	41
Fer (0^c,55 »). . .	20	50
Argent (0^c,49 »). . .	8	60

Il semble plutôt que la fonction $f(\mathrm{I})$ est à peu près en raison inverse du courant, sans doute parce que l'arc s'élargit à mesure que le courant augmente. MM. Rowland, Duncan et Todd [2] arrivent à l'expression $f(\mathrm{I}) = b\mathrm{I}^{-0,7}$. Avec un arc de 3^{mm},18 et des charbons ayant 9^{mm},54 de diamètre, la chute de potentiel a varié de 65 à 46,5 volts, quand le courant passait de 3,1 à 12,75 ampères et la résistance apparente de l'arc, c'est-à-dire le quotient de la chute de potentiel par le courant, variait de 21 à 3,65 volts. Dans ce cas, la constante a était voisine de 36 volts.

Cette force électromotrice inverse paraît devoir s'expliquer par deux causes différentes, la volatilisation du charbon, qui produirait un terme indépendant de la longueur de l'arc et du courant, et un effet thermoélectrique au contact des électrodes avec les vapeurs dégagées, lequel dépend de toutes les circonstances qui modifient l'arc. On conçoit alors que les déterminations exactes présentent de grandes difficultés. La pression augmente d'ailleurs la valeur de a et n'influe pas sensiblement sur la résistance propre de l'arc.

La température est manifestement plus élevée sur l'anode, qui s'use plus rapidement et se creuse en forme de *cratère*. C'est aussi au voisinage de l'anode que la chute de potentiel est plus rapide dans l'arc, comme on le reconnaît par l'emploi de sondes en charbon.

D'après les expériences de M. Violle, la température du cratère serait constante et voisine de 3500°; elle correspon-

(1) Lecher, *Wied. Ann.*, t. XXXIII, p. 625; 1888.
(2) Rowland, Duncan et Todd, *Electr. World*, t. XXII, p. 101; 1893.

lrait au phénomène physique de la volatilisation du carbone. La température de l'arc, au contraire, n'est pas limitée par les conditions analogues et augmente toujours avec l'énergie lu courant. Le *four électrique*, dont M. Moissan a tiré un si grand profit, permet ainsi de fondre les substances les plus réfractaires et de produire un certain nombre de corps nouveaux, en particulier le carbure de calcium.

Pour les applications à l'éclairage, il est important que la distance des charbons soit maintenue invariable, afin que la lumière conserve une assez grande fixité. Cette condition est réalisée par construction dans les bougies Jablochkoff, mais on y arrive généralement au moyen de régulateurs, dont le jeu est commandé par le courant lui-même, qui rapprochent ou éloignent les charbons suivant les variations du courant.

L'expérience montre que ces régulateurs fonctionnent mal quand le circuit ne renferme pas une résistance assez grande, ce qui oblige quelquefois à ajouter des résistances auxiliaires et à consommer ainsi une partie du courant sans profit. On peut en rendre compte de la manière suivante. Si E est la force électromotrice de la source et R la résistance extérieure à l'arc, le courant I est donné par la relation

$$\mathrm{RI} = \mathrm{E} - \mathrm{V} = \mathrm{E} - a - lf(\mathrm{I}).$$

Lorsque l'arc éprouve une variation de longueur dl, laquelle est toujours assez lente pour que l'on puisse négliger les effets d'induction, on a

$$\mathrm{R}\,d\mathrm{I} = -f(\mathrm{I})\,dl - lf'(\mathrm{I})\,d\mathrm{I},$$

$$d\mathrm{I} = -\frac{f(\mathrm{I})}{\mathrm{R} + lf'(\mathrm{I})}\,dl.$$

Les variations du courant sont trop brusques et le régulateur marche par soubresauts, dépassant chaque fois sa position d'équilibre, si la résistance R est trop faible.

Le résultat est moins simple si l'on tient compte des courants induits et le problème se complique encore lorsque l'arc est entretenu par des courants alternatifs; le calcul du courant et de la puissance absorbée ne pourrait être abordé uti-

lement que si l'on connaissait les lois suivant lesquelles varient la force contre-électromotrice et la résistance de l'arc.

La quantité de lumière varie beaucoup avec la densité du courant et la longueur de l'arc. On peut admettre, comme donnée approximative, que l'arc produit par un courant de 15 ampères avec une chute de potentiel de 50 volts, équivaut à 100 lampes Carcel ou environ 1000 bougies. La puissance dépensée par bougie serait de $\frac{15 \times 50}{1000} = 0,75$ watt, ou quatre fois moindre qu'avec les meilleures lampes à incandescence.

La supériorité de l'arc, à ce point de vue, s'exagère beaucoup à mesure que l'on a recours à des courants plus intenses. Le prix des charbons et les manipulations nécessaires pour les remplacer interviennent d'ailleurs dans la valeur industrielle de la lumière.

La combustion par l'oxygène de l'air joue un grand rôle dans l'usure des charbons ; on obtient des résultats plus avantageux en maintenant l'arc dans des globes presque fermés, où l'afflux de l'air est ménagé de manière à enlever les gaz hydrocarbonés dont la décomposition ultérieure pourrait déposer du charbon sur les parois du verre.

MACHINES D'INDUCTION.

867. Principe des électromoteurs à induction. — Peu de temps après la découverte de Faraday, qui a été communiquée à l'Académie des sciences le 26 décembre 1831, Pixii construisait sous la direction d'Ampère (¹) une machine destinée à obtenir des courants induits par la rotation d'un aimant en face d'un électro-aimant. Le courant produit dans le fil de l'électro-aimant est naturellement alternatif, mais un commutateur installé sur l'axe de rotation permettait de redresser les courants induits dans le circuit extérieur.

Cette première machine de Pixii a été modifiée de bien des manières. Clarke (²) laissant l'aimant immobile faisait tourner l'électro-aimant ; Page (³) entourait l'aimant d'un fil conduc-

(¹) AMPÈRE, *Ann. de Chim. et de Phys.* [2], t. LI, p. 71 ; 1832.
(²) CLARKE, *Phil. Mag.* 3ᵉ, t. IX, p. 262 ; 1836.
(³) PAGE, *Ann. of electricity, magn. and chemistry*, t. III, p. 389 ; 1838-39.

teur et faisait tourner devant lui un morceau de fer doux, etc. Enfin les recherches de Masson et Bréguet [1] ont été l'origine des bobines d'induction à courants interrompus.

Depuis quelques années, ces machines sont sorties des laboratoires et ont pris une place importante dans l'industrie. On peut les diviser en deux groupes, suivant que le courant qu'elles produisent est sensiblement *uniforme*, c'est-à-dire conserve toujours le même sens avec de petites variations d'intensité, ou *non uniforme*, le courant pouvant changer de sens ou éprouver de brusques variations.

Les machines qui donnent un courant uniforme, au moins un courant de direction constante, quand on entretient leur mouvement par une force extérieure, deviennent des moteurs si on les excite par un courant extérieur.

Considérons d'abord le cas d'une machine parfaite, comme le disque de Faraday, que l'on supposera mobile dans un champ produit par le courant lui-même I. La force électromotrice d'induction E est alors proportionnelle à la vitesse, c'est-à-dire au nombre n de tours par seconde, et à une fonction $\varphi(I)$ dont la forme dépend du mode de construction ; on peut donc écrire

$$E = n\varphi(I).$$

Si la machine sert comme moteur, en l'excitant par une source de force électromotrice constante E_0 sur un circuit de résistance totale R, le courant est donné par l'équation

$$IR = E_0 - E = E_0 - n\varphi(I).$$

La puissance utile serait encore maximum (**863**) et le rendement électrique égal à 0,50 s'il était possible que le courant I fut la moitié du courant relatif au moteur en repos.

Si la machine est abandonnée à elle-même, en supposant que tous les frottements soient supprimés, la vitesse va croissant jusqu'à ce que le courant devienne nul; la force électromotrice de la machine est alors égale à celle de la source et le rendement égal à l'unité. Le nombre maximum N de tours

[1] MASSON et BREGUET, *Ann. de Chim. et de Phys.* [3], t. IV, p. 129; 1842.

par seconde est donné par la condition $N\varphi(0) = E_0$, qui correspond à une vitesse finie ou infinie suivant la nature de la fonction $\varphi(I)$.

Lorsque la machine est employée comme électromoteur, le courant ne peut s'entretenir (**389**) que si $n\varphi(I) > IR$, et l'amorçage spontané exige que cette inégalité soit satisfaite par un courant infiniment petit.

Si le travail consommé se réduit à la chaleur dégagée dans la résistance R, l'équilibre a lieu pour un courant I_0 défini par la condition $n\varphi(I_0) = I_0 R$, qui détermine généralement une valeur finie pour I_0.

De même que dans les piles, la puissance utilisable U d'un électromoteur mécanique, abstraction faite de pertes accessoires, est l'excès $EI - RI^2$ de la puissance dépensée sur la perte qui correspond à la chaleur dégagée dans la résistance R de la machine seule. On a donc

$$U = EI - RI^2 = I[n\varphi(I) - IR],$$

et le maximum de puissance utile correspond à la condition

$$\frac{dU}{dI} = 0 \qquad \text{ou} \qquad n[\varphi(I) + I\varphi'(I)] = 2IR.$$

Supposons enfin deux machines parcourues par le même courant I, dont l'une sert d'électromoteur et l'autre de moteur, la première absorbant la puissance $nI\varphi(I)$ et la seconde utilisant $n_1 I\varphi_1(I)$. Le rendement a pour expression

$$u = \frac{n_1\varphi_1(I)}{n\varphi(I)};$$

il est simplement égal au rapport des vitesses lorsque la fonction $\varphi(I)$ est la même dans les deux machines.

868. Divers types de machines. — La fonction $\varphi(I)$ pourra servir à classer les différents types de machines à courant uniforme. Nous remarquerons que le produit $I\varphi(I)$ représente le travail W_1 relatif à chaque période.

1° Les machines *électrodynamiques* sont uniquement composées de fils, pour l'inducteur et l'induit, et parcourues par le

:me courant. Le travail W_1 est alors proportionnel au carré courant, d'où $\varphi(I) = CI$.

2° Dans les machines *magnétiques*, l'induction se produit r le mouvement relatif d'un circuit et d'un champ magné-ue invariable. Le travail W_1 est alors proportionnel au cou-ıt, ce qui donne $\varphi(I) = A$.

3° Dans les machines *magnéto-électriques*, l'inducteur et ıduit sont des bobines renfermant du fer doux, ou des :ctro-aimants, les deux systèmes de fils étant traversés par même courant, ou par des fractions déterminées du même urant. Le travail W_1 comprend différents termes : l'un CI^2 à l'action des deux systèmes de fils ; un autre $C_1 MI$, latif à l'action du fer aimanté de chacun des systèmes sur fils de l'autre, proportionnel au magnétisme M ; un troi-:me $C_2 M^2$ dû à l'action de deux systèmes d'aimants.

Si les courants sont faibles, le magnétisme M des arma-res est sensiblement proportionnel au courant et on peut rire $\varphi(I) = (C + C_1 + C_2)I$. A mesure que le courant aug-:nte, l'intensité d'aimantation du fer tend vers un maxi-ım ; les produits $C_1 M$ et $C_2 M^2$ tendent à devenir des cons-ıtes C' et C'', d'où $\varphi(I) = CI + C' + \frac{C''}{I}$.

4° Enfin, on peut appeler *mixtes* des machines dans les-elles l'inducteur est un champ magnétique invariable et ıduit un électro-aimant. Le travail W_1 comprend alors deux ·mes $AI + A_1 M$, relatifs à l'action du champ sur le fil et r le fer aimanté de l'induit. Pour des courants faibles, la ıction $\varphi(I)$ est encore constante et, lorsque les courants ıt assez intenses pour produire le maximum d'aimantation fer, $\varphi(I) = A + \frac{A'}{I}$.

Les machines électrodynamiques, où $E = nCI$, ne présentent s d'intérêt pratique, parce qu'elles ne sont capables de ›duire un travail notable que pour des vitesses excessives. Si les emploie comme moteurs, avec une source constante E_0, courant est donné par l'équation

$$E_0 - nCI = IR, \qquad I = \frac{E_0}{R + nC}.$$

Dans ce cas, les effets d'induction équivalent à une résistance proportionnelle à la vitesse et le rendement est

$$u = \frac{nCI}{E_0} = \frac{nC}{R + nC} = \frac{1}{1 + \frac{R}{nC}}.$$

Abstraction faite des frottements, la vitesse irait donc en croissant sans limite.

Si la machine sert comme électromoteur, elle ne peut s'amorcer que pour la condition $nC > R$.

Pour une vitesse inférieure à la limite $nC = R$, la machine s'éteint, quel que soit le courant. Pour une vitesse supérieure, la puissance absorbée nCI^2 est plus grande que RI^2; le circuit s'échauffe, quels que soient les moyens de refroidissement, jusqu'à ce que la résistance, qui varie avec la température, satisfasse à la condition $R = nC$.

Si la machine avec son circuit est maintenue dans un bain qui égalise les températures, l'équilibre n'est possible que pour une température déterminée qui varie avec la vitesse. Le courant est défini par l'énergie calorifique Q_1 perdue pendant chaque unité de temps, laquelle dépend du mode de refroidissement; on a alors

$$I^2 = \frac{Q_1}{R} = \frac{Q_1}{nC}.$$

Certaines machines industrielles à aimants permanents peuvent être considérées comme purement magnétiques, mais elles ne sont généralement utilisées que pour des courants alternatifs. Lorsque $\varphi(I)$ est une constante, la force électromotrice d'induction est simplement proportionnelle à la vitesse et l'appareil est comparable à une pile.

La plupart des machines actuelles sont magnéto-électriques, et on les désigne souvent par le nom de *dynamos*. Le terme CI, qui correspond aux actions réciproques des courants, est très petit par rapport à ceux qui proviennent des pièces aimantées. La fonction $\varphi(I)$ est d'abord proportionnelle à I pour des courants faibles et tend à devenir constante pour des courants très intenses.

Enfin les machines anciennes sont généralement mixtes;

les courants produits sont naturellement alternatifs et l'emploi d'un commutateur, pour les redresser, ne donne que des courants fortement ondulés.

C'est surtout à M. Gramme que l'on doit les machines à courant presque uniforme; elles sont mixtes lorsque le champ est produit par des aimants ou par un courant étranger et magnéto-électriques lorsque le même courant est utilisé pour l'inducteur et l'induit.

Les résultats qui précèdent se vérifient d'une manière très approchée ([1]) pour les machines Gramme, par la mesure des forces électromotrices ou du rendement. Toutefois plusieurs causes contribuent à compliquer les effets.

2° Les petites variations d'intensité du courant exigent que l'on tienne compte des extra-courants qui en résultent.

2° Les phénomènes d'hystérésis dans les électro-aimants donnent lieu à une perte d'effet utile.

3° Pour les aimants eux-mêmes, il se produit des changements d'aimantation dans un sens ou dans l'autre et d'une manière inégale, suivant que les machines sont répulsives ou attractives, ce qui cause encore une perte analogue.

4° Enfin les aimants ou les armatures, et même les fils, sont le siège de courants parasites, dits *courants de Foucault*, qui les échauffent au détriment du travail utile.

On peut représenter l'influence de toutes ces réactions, au moins d'une manière approximative, en ajoutant au circuit une résistance *fictive* qui serait sensiblement proportionnelle à la vitesse de la machine.

869. Exemples. — Considérons, pour fixer les idées, un conducteur rectiligne AB (fig. 269), de longueur $2a$, mobile

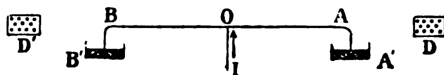


Fig. 269.

autour d'un axe vertical passant par son milieu O, et dont les extrémités recourbées plongent dans un bain de mercure

([1]) Mascart et Angot, *Jour. de Phys.*, t. VII, p. 79 et 363; 1878.

annulaire A'B'; le mercure communique avec le point O par u autre conducteur et le circuit a une résistance R.

Si l'appareil n'est soumis qu'au champ terrestre et tourn d'une manière uniforme, à raison de n tours par seconde, l composante verticale Z du champ étant seule efficace, le flu de force coupé par chaque branche dans l'unité de temp est $n\pi a^2 Z$, soit pour les deux $2n\pi a^2 Z$.

Si le courant total est I, ou la moitié sur chaque branche, la puissance nécessaire pour entretenir le mouvement est $n\pi a^2 Z I$, et la force électromotrice $E = n\pi a^2 Z$. La machine rentre dans le type que nous avons appelé magnétique.

Comme la valeur de Z à Paris est environ 0,422 (G. G. S.), on a, en supposant $a = 1$ mètre $= 10^2$,

$$E = n\pi . 10^4 \times 0,422 = n\, 1,33 . 10^4 = n\, 1,33 . 10^{-4} \text{ volts.}$$

Pour obtenir un volt, la vitesse devrait être $n\, 1,33 . 10^{-4} = 1$, ou de 7474 tours par seconde.

Le même appareil peut être transformé en machine électrodynamique. Supposons que le circuit comprenne une bobine DD', dont le plan moyen passe par le conducteur AB et dont l'axe coïncide avec l'axe de rotation. L'action moyenne de la bobine sur le cercle de rayon a étant F_m pour l'unité de courant, la force électromotrice relative au courant I serait, abstraction faite du champ terrestre,

$$E = n\pi a^2 F_m I.$$

Employée comme électromoteur, la machine ne peut produire un courant que si l'on a $n\pi a^2 F_m > R$. Si la bobine renferme N spires de rayon moyen A, et qu'on prenne $F_m = \frac{2N\pi}{A}$ comme valeur approchée de l'action moyenne, il en résulte $n > \frac{RA}{2N\pi^2 a^2}$. La longueur totale du circuit est $2N\pi A$; en appelant S la section du fil et ρ sa résistivité, la résistance R est égale à $\frac{\rho}{S} 2N\pi A$, ce qui donne $n > \frac{\rho}{S} \frac{A^2}{\pi a^2}$.

Cette condition ne dépend que du rapport des carrés des

rayons A et a et, par conséquent, du rapport des surfaces correspondantes. La résistivité du cuivre est d'environ 1 600; si on emploie des fils dont la section soit de 1^{cq}, et en supposant $A^2 = 2\pi a^2$, il vient $n > 3\,200$.

870. Anneau Gramme. — Dès l'année 1860, M. Pacinotti [1] avait réalisé le principe de cet organe ingénieux, mais son invention était restée presque inconnue; M. Gramme [2] retrouva plus tard la même idée et eut le mérite de l'appliquer à la construction de véritables machines industrielles.

L'*anneau Gramme* est formé par un anneau A de fer doux (fig. 270) sur lequel un conducteur, couvert d'une enveloppe isolante, s'enroule en un circuit fermé contenant N spires. Différents points équidistants de ce conducteur sont réunis à une série de lames conductrices, ou de *touches*, isolées les unes

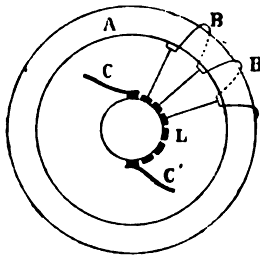


Fig. 270.

des autres et distribuées à la surface d'un cylindre L, qui constitue le *collecteur :* la bobine est ainsi partagée en un certain nombre de sections B contenant chacune une spire ou s spires. Deux balais C et C′ appuient sur des touches diamétralement opposées et forment les pôles de la machine. Si l'on fait entrer un courant I par l'un des balais C, par exemple, ce courant se partage entre les deux moitiés de la bobine pour sortir par le balai C′.

Lorsque l'anneau tourne dans un champ magnétique, une force électromotrice se produit entre les deux balais.

Soit r la résistance d'une spire. Si les balais appuient sur une touche seulement, la résistance de chaque moitié de l'an-

(1) A. Pacinotti, *Nuovo Cimento*, t. XIX, p. 378; 1864.
(2) Z. Gramme, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. LXXIII, p. 175; 1871.

neau est $\frac{Nr}{2}$ et la résistance totale $\frac{Nr}{4}$. S'ils appuient sur deux touches consécutives, une section de part et d'autre est séparée du circuit général; la résistance devient $\frac{1}{2}\left(\frac{N}{2}-s\right)r$. On peut admettre que la résistance de la bobine, entre les balais, est la moyenne de celles qui correspondent aux deux cas, c'est-à-dire $(N-s)\frac{r}{4}$.

Nous supposerons d'abord que le champ extérieur est invariable, symétrique par rapport à un plan CD (fig. 271) passant par l'axe de rotation et symétrique, au signe près, par rapport au plan transversal AB, c'est-à-dire que le champ F

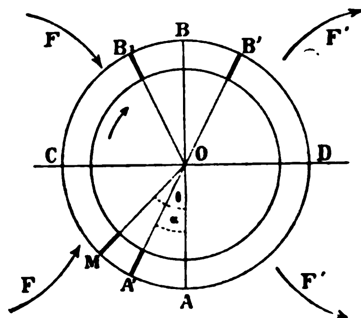


Fig. 271.

est dirigé d'un côté vers le plan transversal, et que le champ symétrique F' s'en éloigne.

L'anneau est parcouru de C en D par un flux d'induction magnétique qui se propage dans le fer; c'est l'excès du flux de force entrant par la face extérieure ABC sur celui qui va directement d'une moitié de l'anneau à l'autre par le vide intérieur. Le spectre donné par la limaille de fer montre bien cette distribution du champ.

On admettra d'abord que l'aimantation de l'anneau est la même dans le mouvement qu'à l'état de repos, c'est-à-dire qu'on néglige les effets d'hystérésis.

Nous verrons aussi que les balais, au lieu de correspondre aux sections situées dans le plan transversal, doivent être déplacés d'un certain angle α, qu'on appelle *angle de calage*,

dans le sens du mouvement; les sections correspondantes se trouvent alors en A′ et B′.

Soit $f(\theta)$ le flux d'induction magnétique coupé par une spire qui décrit l'angle $AOM = \theta$. Le flux coupé par une spire qui va de A′ en B′, entre les contacts des balais, comprend deux parties symétriques, B_1B et BB′, qui donnent des flux égaux et de signes contraires; il ne reste, pour l'effet utile, que le flux relatif à l'angle $A'OB_1 = \pi - 2\alpha$, c'est-à-dire $f(\pi) - 2f(\alpha)$. L'induction rend le balai B′ positif, par exemple, et le balai A′ négatif; quand la spire va ensuite de B′ en A′, l'induction en sens contraire dans la seconde moitié du chemin donne les mêmes signes respectivement aux deux balais.

Si n est le nombre de tours par seconde, la force électromotrice moyenne a pour expression

$$E = n.2N[f(\pi) - 2f(\alpha)]. \tag{1}$$

Cette quantité n'est pas absolument invariable pendant la rotation. En effet, la force électromotrice produite par une section située dans l'azimut θ est

$$s\frac{d}{dt}f(\theta) = sf'(\theta)\frac{d\theta}{dt} = 2n\pi s f'(\theta)$$

et la force électromotrice totale s'obtiendra par la somme $\Sigma f'(\theta)$ étendue à toutes les spires qui se trouvent dans l'angle $\pi - 2\alpha$. D'autre part, la résistance de la bobine induite est modifiée d'une manière périodique par le passage des balais d'une touche à la suivante.

Ces deux espèces de variations se reproduisent à chaque tour un nombre $\frac{N}{s}$ de fois; en posant $\omega = \frac{N}{s}2n\pi$, le courant extérieur dans un circuit qui réunit les deux balais peut être représenté par une expression de la forme $I + B\sin(\omega t + \beta)$, où I et B sont des constantes. Le courant moyen I est modifié par des ondulations d'autant plus faibles que le nombre des sections ou des touches du collecteur, est plus grand. On les mettrait facilement en évidence par un téléphone installé en dérivation sur le circuit, ou placé sur un circuit secondaire qui ne traduirait que les variations du courant principal.

En réalité l'anneau reçoit une aimantation nouvelle par le courant qui l'entoure, de sorte que le champ ne conserve plus sa symétrie et prend une *torsion* particulière. Si l'on admet, d'une manière approchée, que cette aimantation se superpose à la première, elle ne modifie pas la force électromotrice, puisque la somme correspondante des flux d'induction coupés par une spire en passant d'un balai à l'autre est nulle.

D'un autre côté, le courant $\frac{I}{2}$ s'annule sur lui-même dans chaque section au passage d'un balai sur deux touches voisines; la perte qui en résulte peut être représentée par l'énergie intrinsèque (374) du courant, c'est-à-dire $\frac{l}{2}\frac{I^2}{4}$, en désignant par l le coefficient de self-induction d'une section. Comme elle a lieu aux deux balais et pour toutes les sections, la perte d'énergie par seconde est $n\frac{N}{s}2\frac{l}{2}\frac{I^2}{4} = nN\frac{lI^2}{4s}$.

Le coefficient l est proportionnel à s^2; on peut le représenter par $4\lambda s^2$ et l'effet total par $nNs\lambda I^2 = a_1 I^2$, c'est-à-dire qu'il équivaut à une résistance fictive a_1 proportionnelle à la vitesse et au nombre de spires dans chaque section ([1]).

Le meilleur angle de calage pour les balais est déterminé pratiquement par la condition de supprimer les étincelles ou de les réduire au minimum. Or ces étincelles se produisent quand une touche échappe au balai; la condition à réaliser est donc que cette touche et celle qui reste ensuite sous le balai soient au même potentiel.

Dans la région voisine des balais le flux d'induction relatif au courant de l'anneau est à peu près uniforme, proportionnel à l'aimantation M due au courant et de sens contraire à celui du champ. La force électromotrice est de la forme

$$e = s[f'(\theta) - kM]\frac{d\theta}{dt} = 2n\pi s[f'(\theta) - CM].$$

Si deux touches voisines sont ainsi réunies et que le courant dans la section correspondante soit arrivé au régime de l'induit, la touche qui échappe au balai n'éprouvera aucune varia-

([1]) J. Joubert, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. XCVI, p. 641; 1883.

tion de potentiel et ne produira pas d'étincelles; l'angle de calage α serait donc déterminé par la condition

$$e = sr\frac{I}{2} = 2n\pi s[f'(\alpha) - CM],$$

$$f'(\alpha) = CM + \frac{r}{2n\pi}\frac{I}{2}.$$

Comme le premier terme du second membre est de beaucoup le plus important, on peut dire que l'angle de calage ne dépend que du champ, par la fonction $f(\theta)$, et du courant dans l'induit par la quantité M.

Si l'aimantation est proportionnelle au courant, ou plutôt au produit NI, on peut écrire, en posant $2CM = r'NI$,

$$(2) \qquad f'(\alpha) = \frac{I}{2}\left(\frac{r}{2n\pi} + r'N\right) = \frac{I}{4n\pi}(r + 2n\pi N r').$$

A partir du point A, le flux d'induction magnétique $f(\theta)$ croît d'abord rapidement; la fonction $f'(\theta)$ reste alors positive et tend vers zéro; les étincelles ne sont supprimées d'une manière efficace que si l'équation (2) donne pour l'angle α une valeur comprise dans la première région.

Le circuit extérieur équivaut à une résistance x, qui représente les résistances utiles et les forces électromotrices vaincues. En désignant par a la résistance effective de l'anneau jusqu'aux balais, le courant est alors

$$I = \frac{E}{a + x} = 2nN[f(\pi) - 2f(\alpha)].$$

Ce calcul n'est qu'une première approximation, car on doit encore faire intervenir d'autres pertes d'énergie dues aux courants parasites, aux frottements, à l'hystérésis et à la réaction de l'anneau sur le champ extérieur; ces différents effets sont sensiblement proportionnels à la vitesse et peuvent être compris dans la résistance fictive a_1.

Plusieurs méthodes expérimentales permettent de déterminer la fonction $f(\theta)$, par exemple :

1° En appliquant sur l'anneau une bobine plate (**835**), la dé-

charge induite donnera le flux de force normal correspondant. La même épreuve répétée sur la surface interne déterminera la partie de ce flux qui traverse la cavité de l'anneau.

2° Les extrémités d'une section étant reliées à un galvanomètre balistique, on déplace l'anneau de manière que l'azimut moyen de la section passe de l'angle θ_1 à l'angle θ_2; la décharge induite est proportionnelle à $s[f(\theta_2) - f(\theta_1)]$, ce qui donne la fonction $f(\theta)$ par accroissements successifs.

3° Les balais étant dans le plan transversal, on les relie au galvanomètre balistique. En faisant tourner l'anneau de l'angle formé par deux touches successives, la décharge induite est la même que si une seule boucle avait tourné d'une demi-circonférence; on obtient ainsi $sf(\pi)$.

4° Enfin si les balais sont décalés de l'angle α, la même opération donne $s[f(\pi) - 2f(\alpha)]$.

871. Cas particulier. — L'anneau est habituellement une sorte de cylindre creux formé par des plaques de tôle mince isolées ou par un faisceau de fils de fer circulaires. On évite ainsi, autant que possible, les courants induits qui tendent à naître sans profit dans la section méridienne.

Supposons le champ F uniforme; l'aimantation A de l'anneau, si son épaisseur est suffisante et la longueur notable, est à peu près la même que celle d'un cylindre indéfini (**276**), c'est-à-dire $\frac{k}{1+2\pi k}$F, ou sensiblement $2\pi A = F$, comme pour un cylindre conducteur dans un champ électrique.

Dans l'azimut θ, la densité de la couche superficielle est $\sigma = A\cos(90° - \theta) = A\sin\theta$: le champ résultant est normal à la surface et a pour expression

$$4\pi\sigma = 4\pi A\sin\theta = 2F\sin\theta,$$

ou le double de la composante normale du champ primitif.

En appelant D le diamètre et L la longueur axiale de l'anneau, il en résulte

$$f(\theta) = \int_0^\theta 4\pi\sigma . L\frac{D}{2}\,d\theta = LDF\int\sin\theta\,d\theta = LDF(1-\cos\theta).$$

Le produit LDF est le flux de force φ_0 émis par le champ

primitif dans l'espace occupé par l'anneau. On a donc

$$f(\theta) = \varphi_0(1 - \cos\theta),$$
$$E = 2nN[f(\pi) - 2f(\alpha)] = 4nN\varphi_0\cos\alpha,$$
$$I = 4nN\frac{\varphi_0\cos\alpha}{a+x}.$$

L'angle de calage est défini par la condition

$$\varphi_0\sin\alpha = CM + \frac{r}{2n\pi}\frac{I}{2},$$

et, pour une aimantation M proportionnelle au courant,

$$\varphi_0\sin\alpha = \left(\frac{r}{2n\pi} + Nr'\right)\frac{I}{2}.$$

A vitesse constante, le sinus de l'angle de calage est donc proportionnel au courant et cet angle doit diminuer un peu, toutes choses égales, à mesure que la vitesse augmente.

En fonction du circuit extérieur, on aurait

$$\tang\alpha = \frac{N}{\pi}\frac{r + 2n\pi Nr'}{a+x}.$$

872. Différentes formes d'induits. — L'enroulement du fil sur l'anneau présente des difficultés pratiques, outre l'inconvénient que les parties latérales n'interviennent pas dans la production de la force électromotrice et que les fils intérieurs, nécessaires pour compléter le circuit, produisent une force électromotrice inverse; on emploie souvent d'autres dispositions, en particulier l'enroulement dit *en tambour*.

L'armature, constituée par une série de disques de fer superposés, forme un cylindre plein. Les disques sont percés d'une cavité centrale pour se monter sur l'arbre; ils portent des dentures correspondantes de manière à constituer à la surface des rainures longitudinales, ou une série de trous voisins de la circonférence, pour y loger les barres du fil induit entourées de leurs enveloppes isolantes. Ce fil forme encore

un circuit fermé ; il suit dans un certain ordre les différente sections de la surface cylindrique, et les parties qui relien deux sections différentes, sur une des bases du tambour, com muniquent aux touches du collecteur.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait 16 sections, numérotées de 1 à 16 (fig. 272). Si l'on parcourt le circuit dans un sens déterminé, tous les retours d'arrière à l'avant se font par les barres d'ordre impair, par exemple, et les chemins d'aller par les barres d'ordre pair, de sorte que les jonctions

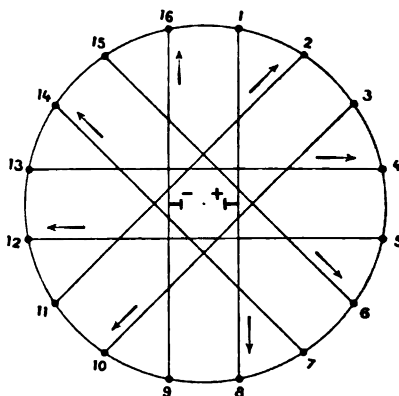


Fig. 272.

sur les bases, telles que 1 et 8, laisseront à part un nombre impair de sections. Partant de la section 1, le fil sera enroulé dans l'ordre suivant, la ligne supérieure indiquant les jonctions d'avant et la ligne inférieure celles d'arrière :

1 → 8 15 → 6 13 → 4 11 → 2 9 → 16 7 → 14 5 → 12 3 → 10 1
↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑
8 → 15 6 → 13 4 → 11 2 → 9 16 → 7 14 → 5 12 → 3 10 → 1

Si le conducteur formait un circuit fermé, parcouru par un courant dans le sens des flèches, il est clair que l'aimantation ne produirait pas de champ extérieur.

Lorsque le tambour tourne dans un champ magnétique, les barres 1 et 8, presque opposées, sont le siège de forces électromotrices contraires qui toutes deux tendent à donner le même signe à la jonction antérieure 1-8.

Si la touche correspondante est au balai positif et la tou-

che de 9-16 au balai négatif, on voit aisément que toutes les barres de 1 à 7 sont parcourues par un courant d'arrière à l'avant, conforme à l'action du champ, et toutes les autres, de 9 à 16, par un courant d'avant en arrière. On évite l'enchevêtrement des fils de jonction sur les bases par des raccords obliques en développantes de cercle.

Pour les machines puissantes, il est plus avantageux d'entourer l'induit par un nombre pair de pôles magnétiques, alternativement de signes contraires, avec un nombre égal de balais sur le collecteur. Le flux magnétique passe alors d'un pôle à l'autre par l'armature de l'induit ; entre deux balais consécutifs, le jeu des forces électromotrices est le même que pour une machine à deux pôles.

Dans la machine Desroziers, l'induit n'a pas de fer. Les fils sont disposés radialement sur un disque qui tourne entre deux couronnes d'électro-aimants ; ils sont réunis à leurs extrémités périphériques et centrales par des jonctions analogues à celles de l'enroulement en tambour, de manière que le système équivaut à un anneau Gramme.

873. Des dynamos. — Dans la plupart des cas, le champ magnétique est produit par des électroaimants et on désigne alors les machines sous le nom de *dynamos*.

Réduite à ses éléments essentiels, la machine comprend : 1° l'anneau *induit* A muni de son collecteur sur lequel appuient les balais C et C′ (fig. 273) ; 2° un *inducteur* formé par un électroaimant double BB′ dont les noyaux sont réunis par une *culasse* en fer K et terminés par des *pièces polaires* P et P′ qui embrassent une partie de l'anneau.

Si Φ_0 est le flux d'induction magnétique dans l'anneau, déduction faite du flux qui traverse le vide intérieur, le maximum de force électromotrice, pour des balais situés dans le plan transversal, serait $2nN\Phi_0$.

En réalité, par suite du déplacement des balais et de diverses causes accessoires, on n'utilise qu'une partie Φ du flux total et la force électromotrice est

$$E = 2nN\Phi.$$

La différence $\Phi_0 - \Phi$, qui tient à l'existence du courant dans l'anneau, est la *réaction d'induit*.

La force magnétomotrice dans le circuit formé par les armatures des inducteurs et de l'induit (361) est définie par le courant total inducteur. S'il y a m tours de fil, parcourus par i ampères, la force magnétomotrice est $4\pi mi.10^{-1}$; pour un enroulement qui contient plusieurs systèmes de courants les ampère-tours inducteurs seraient Σmi.

Le flux d'induction Φ ne dépend que des ampère-tours inducteurs et de la distribution du fer dans le circuit magnétique. En exprimant les forces électromotrices en volts, on a

$$E = nE_1 = n2N\Phi.10^{-8} = \varphi(mi).$$

On peut traduire cette force électromotrice, en fonction des ampère-tours inducteurs, par une courbe (¹) que M. Marcel Deprez appelle *caractéristique* de la machine à vitesse cons-

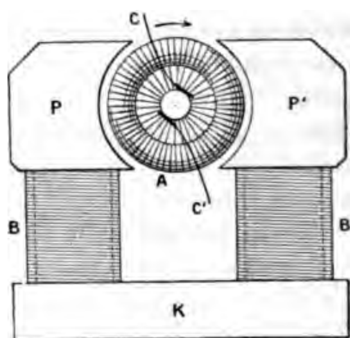


Fig. 273.

tante. La valeur de E_1 est la caractéristique ramenée à la vitesse d'un tour par seconde.

Le flux d'induction efficace Φ est d'abord proportionnel au courant inducteur, à part le magnétisme rémanent, et devient ensuite à peu près constant lorsque l'aimantation des armatures tend vers son maximum. La courbe ainsi obtenue présente quelquefois, dans l'intervalle, un changement de direction assez brusque; c'est le *coude* de la caractéristique.

La puissance nécessaire pour faire tourner la machine, ab-

(¹) HOPKINSON, *Mec. Engin. Instit. Proc.*; 1879, p 246 et 1880, p. 266.

traction faite des frottements, est EI. A chaque tour d'anneau, l'énergie absorbée est $W_1 = 2N\Phi I$. Le *couple moteur* est égal à $\frac{W_1}{2\pi}$; ce couple pourrait être produit par une force, de même valeur numérique, agissant à l'extrémité d'un levier de longueur égale à l'unité. M. Marcel Deprez donne encore à la quantité W_1 le nom d'*effort statique* ; c'est, en effet, la force qui donnerait le même couple avec un levier de longueur $\frac{1}{2\pi}$, correspondant à la circonférence d'unité de longueur.

L'excitation des inducteurs exige une dépense que l'on doit chercher à rendre minimum. Si l'on emploie des fils recouverts d'une couche isolante proportionnelle à leur épaisseur et occupant un volume déterminé, la puissance absorbée pour produire un même champ magnétique ne dépend que de la *densité* moyenne du courant (559) dans la section occupée par le fil; on devra donc chercher l'économie dans le choix du fer, la forme des noyaux et des pièces polaires, et le mode de distribution des courants.

Toutes choses égales, la chaleur dégagée dans les inducteurs est proportionnelle au carré du courant, tandis que l'aimantation croît plus lentement et tend vers un maximum; il y a donc un degré d'aimantation qu'il n'est pas avantageux de dépasser dans la pratique. La puissance perdue de ce chef ne dépend d'ailleurs que des ampère-tours inducteurs.

D'autre part, le champ étant déterminé, le couple moteur est proportionnel au produit NI, c'est-à-dire au courant total par unité de section de l'ensemble des fils qui entourent l'anneau, ou à la densité du courant. Là encore, en négligeant les effets de self-induction qui se manifestent au passage des balais, l'énergie calorifique correspondante ne change pas si ce produit reste le même.

Sauf une réserve relative aux phénomènes d'induction mutuelle ou de self-induction, on peut donc dire, avec M. Marcel Deprez, que l'énergie nécessaire pour obtenir une valeur déterminée du couple moteur (ou de l'effort statique), est indépendante de la résistance des fils enroulés sur les inducteurs et sur l'anneau, pourvu que le volume occupé respectivement par ces deux systèmes de fils ne change pas.

874. Caractéristiques. — Les courbes caractéristiques peuvent s'obtenir par différents procédés, en supposant d'abord que les courants inducteurs et la position des balais aient été réglés pour le régime normal.

1° Si l'on a déterminé la fonction $f(\theta)$ par les méthodes indiquées précédemment (870), on aura d'abord

$$\Phi = f(\pi) - 2f(\alpha).$$

2° Faisant tourner la machine, on mesure la force électromotrice E par une méthode d'opposition.

Dans ces deux cas, l'intensité du courant induit est sensiblement nulle, de sorte qu'on laisse à part les effets dus à l'aimantation de l'anneau.

3° La machine en marche produisant le courant I, on appuie sur le collecteur, dans l'azimut θ, un contact en fourche formé de deux branches maintenues par une lame isolante à la distance de deux touches consécutives, et communiquant avec un galvanomètre par un circuit de résistance g. La différence de potentiel des touches est l'excès de la force électromotrice de la section correspondante sur la chute de potentiel relative au courant normal dans la section; le courant i observé donne

$$ig = e - sr\frac{I}{2}, \qquad e = ig + sr\frac{I}{2}.$$

Partant de l'un des balais, par une suite de déplacements angulaires égaux à l'intervalle des touches, on aura ainsi par addition la force électromotrice totale.

Il est encore plus simple d'appuyer près du balai l'une des extrémités du fil du galvanomètre et de déplacer l'autre d'une manière progressive; le courant dérivé donnera la force électromotrice entre deux touches quelconques.

4° On se borne souvent à mesurer la résistance extérieure x nécessaire pour produire le courant I, en appliquant la formule simple $E = I(a + x)$. Toutefois, la résistance a de l'anneau ne peut pas être déterminée directement entre les balais sur la machine en repos, parce qu'elle comprend un terme fictif correspondant aux effets de self-induction. On éliminera

e quantité inconnue par deux expériences faites avec des stances extérieures différentes x et x', d'où l'on déduit

$$E = I(a+x) = I'(a+x') = \frac{II'}{I-I'}(x'-x)$$

. Frœlich donne à la quantité Φ le nom de *magnétisme actif*. trouvé que pour une excitation *directe*, le courant de l'an- ı servant à exciter les inducteurs, et pour une position fixe balais, on a sensiblement, en désignant par A et B des stantes particulières à chaque machine,

$$E_1 = \frac{I}{A+BI}.$$

ette expression se traduit par une hyperbole passant par gine et ayant une asymptote horizontale.

orsque la machine agit comme électromoteur, le courant en appelant b la résistance du circuit inducteur,

$$I = \frac{nI}{(A+BI)(a+b+x)}, \qquad BI = \frac{n}{a+b+x} - A.$$

our que la machine puisse s'amorcer, il faut donc qu'on a condition $n > A(a+b+x)$.

a formule de M. Frœlich ne correspond pas assez exacte- t aux conditions pratiques, mais elle conduit à une consé- nce intéressante.

i le champ magnétique avait sa valeur maximum, le cou- serait $I_1 = \frac{n}{B(a+b+x)}$; d'autre part, le courant I_2 ca- e de donner au champ une valeur moitié moindre est

$$\frac{I_2}{A+BI_2} = \frac{1}{2B}, \qquad I_2 = \frac{A}{B}.$$

en résulte

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{B}\left(\frac{n}{a+b+x} - A\right) = I.$$

omme le courant I_1 ne dépend que de l'anneau et le cou- I_2 de l'inducteur, le courant réel I se trouverait ainsi

qu'on modifie l'enroulement ; la force électromotrice reste la même pour $mi=m'i'$. L'ordonnée primitive pour le courant i convient cette fois pour le courant $i'=\frac{m}{m'}i$; on obtiendra donc la nouvelle caractéristique en altérant les abscisses dans un rapport constant, ce qui revient à changer leur échelle.

De même, si on modifie le nombre de tours et l'enroulement de l'induit, la nouvelle caractéristique E′ sera, toutes choses égales pour l'inducteur,

$$\frac{E'}{E}=\frac{n'N'}{nN}, \qquad E'=\frac{n'N'}{nN}E.$$

L'opération revient encore à multiplier les ordonnées par un facteur constant ou à changer l'échelle correspondante.

Considérons d'abord le cas d'une excitation directe, ou en *série*, l'un des balais communiquant au fil inducteur ; les pôles de la machine sont alors formés par l'autre balai et par l'extrémité opposée du fil inducteur. La caractéristique *interne* est $E=\varphi(I)$ et la force électromotrice disponible aux pôles, ou la caractéristique *externe*, est

$$e=E-(a+b)I.$$

Les différentes grandeurs étant exprimées par leurs valeurs numériques, on trace la courbe caractéristique E en fonction du courant I comme abscisse et on mène la droite L dont l'équation est $y=(a+b)I$; la caractéristique externe e a pour ordonnée en chaque point la différence des ordonnées de la courbe E et de la droite L.

Lorsque le fer de la machine est entièrement doux, la courbe E (fig. 274) part de l'origine, avec une première section OM′ presque rectiligne, et présente ensuite un coude plus ou moins marqué pour devenir à peu près constante. La caractéristique externe e, obtenue par la différence des ordonnées de la première E et de la droite L, est également rectiligne au début, passe par un maximum e_m pour I_m et devient nulle au point P_1 ; dans ce dernier cas, les pôles sont réunis directement et le courant $I_1=OP_1$ est maximum.

est $y=(a+b+x)$ I rencontre la courbe E. A moins de formes exceptionnelles de la caractéristique, il n'y a qu'un point d'intersection et l'équilibre est stable. Comme la première partie OM′ de la courbe est à peu près rectiligne, le courant OP′=I′ correspond à une valeur critique; l'amorçage exige alors la condition

$$a+b+x<\frac{OM'}{OP'}.$$

Dans une machine neuve, l'amorçage présente quelquefois des difficultés et l'on est obligé de recourir à un courant auxiliaire pour provoquer une première aimantation des inducteurs. Dès que la machine a servi, les armatures conservent un magnétisme résiduel, qui équivaut à une valeur initiale des ampère-tours inducteurs et suffit pour assurer le jeu ultérieur en fixant le sens des courants.

Pour une excitation en série, on peut donc admettre que les ampère-tours ont une valeur initiale I_0, laquelle correspond au magnétisme résiduel, ou à une aimantation primitive avec des métaux ayant une force coercitive, ou à un courant extérieur auxiliaire. Dans ce cas, la caractéristique a une valeur initiale OA (fig. 275), comme si la courbe précédente s'était

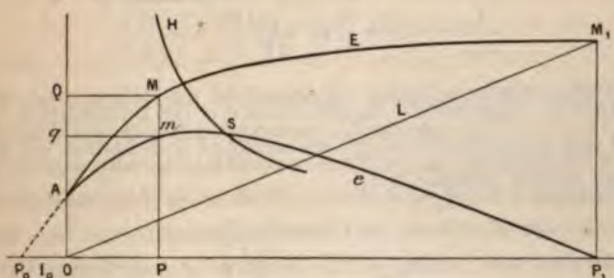


Fig. 275.

déplacée vers la gauche d'une quantité $OP_0=I_0$, et la caractéristique externe part du même point A.

Sans qu'il soit nécessaire de répéter les raisonnements, on voit que les propriétés générales sont encore représentées par les mêmes constructions sur cette nouvelle figure. La caractéristique externe *e* est alors plus tendue au voisinage

du maximum, condition avantageuse pour les applications à potentiel constant.

Un autre réglage consiste à alimenter les inducteurs par un courant pris en *dérivation* sur les balais. Le courant dans l'induit étant I, désignons par i' le courant dérivé dans les inducteurs de résistance b et par i le courant extérieur dans la résistance x. On a alors

$$I = i + i', \qquad e = i'b = ix = I\frac{bx}{b+x},$$

$$E = aI + e = e\frac{(a+b)x+ab}{bx} = I\frac{(a+b)x+ab}{b+x};$$

$$\frac{E}{e} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{x}, \qquad \frac{I}{i} = 1 + \frac{x}{b};$$

$$\frac{1}{u} = \frac{W}{U} = \frac{EI}{ei} = 1 + 2\frac{a}{b} + \frac{a}{x} + \frac{x}{b}\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

Le rendement varie avec la résistance extérieure x et le maximum u_m a lieu pour la condition

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}\left(1 + \frac{a}{b}\right)},$$

$$\frac{1}{u_m} = 1 + 2\frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}\left(1 + \frac{a}{b}\right)}.$$

Comme le rapport de la résistance a de l'anneau à la résistance b des inducteurs est généralement très faible, $\frac{1}{100}$ au plus, on peut écrire simplement

$$\frac{1}{u_m} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ces relations peuvent encore se traduire par une représentation graphique. Soit E la caractéristique (fig. 276), laquelle est cette fois une fonction de i', et L la droite ayant pour équation $y = (a+b)x + ab$; on a

$$\frac{i}{b} = \frac{i'}{x} = \frac{I}{b+x} = \frac{E}{y} = \frac{e}{bx}.$$

En prenant $OR = x$, on joint ON ; la similitude des triangles OMP et ONR montre que l'on a $E = MP$, $i' = OP$. Prenant ensuite $RR' = b$, on mène la droite OR' ; son intersection avec MP donne encore $i = PP'$. Le courant total est $I = OP + PP'$ et la force électromotrice extérieure, $e = bi'$, est simplement proportionnelle à OP. Enfin la puissance utile $U = ei = bii'$ est proportionnelle à l'aire du triangle OPP'.

Il résulte aussi de la relation

$$\frac{i}{b} = \frac{E}{y} = \frac{MP}{NR} = \frac{OM}{ON},$$

que le maximum du courant i a lieu quand la tangente au

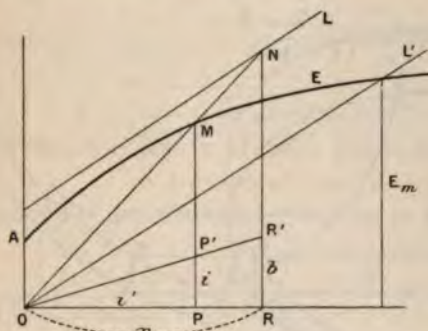


Fig. 276.

point M est parallèle à la droite L ; c'est la région de réglage pour les applications à courant constant.

Supposons que la résistance extérieure x varie de o à l'infini. La valeur de E croit de $E_0 = OA$ jusqu'à un maximum E_m que l'on obtiendra par l'intersection de la courbe avec une droite L', parallèle à L, menée de l'origine; le courant total I varie de $I_0 = \frac{E_0}{a}$ à $I_m \frac{E_m}{a+b}$, en passant par un maximum I_1 intermédiaire; la valeur de e croît de zéro à $e_m = E_m \frac{b}{a+b}$; le courant i passe de $i_0 = I_0$ à un maximum i_1, pour revenir à zéro, et le courant i varie de o à I_m.

A l'aide des constructions précédentes, on peut maintenant traduire les caractéristiques E et e en fonction de i ou

de I (fig. 277), les flèches indiquant le sens des variations à mesure que la résistance x est croissante.

Pour une valeur donnée de x, les points correspondants sont M, m, M' et m'. La puissance absorbée $W = IE(I)$ est l'aire du rectangle P'Q, et la puissance utile $U = ie(i)$ l'aire du rectangle Pq. Enfin les intersections S et S' d'une hyperbole de puissance H avec la courbe $e(i)$ définiraient deux régimes capables d'un nombre de watts déterminé.

En réalité on trace ces courbes en commençant par les plus grandes résistances et leurs parties supérieurs sont les seules qui conviennent à la pratique.

Ces deux combinaisons permettraient déjà d'obtenir, entre

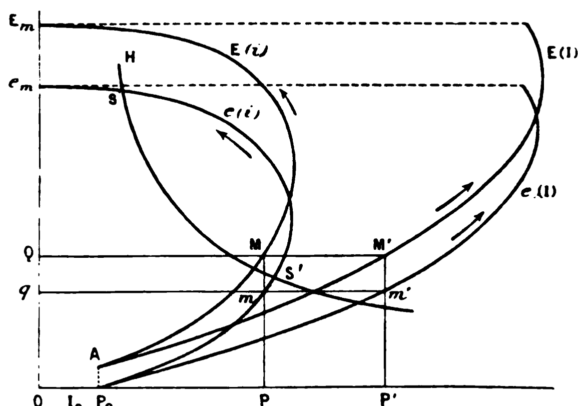


Fig. 277.

certaines limites, une différence de potentiel constante aux pôles de la machine, ou un courant constant sur le circuit extérieur, mais on a souvent recours à des enroulements de compensation appelés *mixtes* ou *compound*.

On peut d'abord former une partie des ampère-tours inducteurs par un courant auxiliaire I_0 choisi de manière à tendre la caractéristique e au voisinage du maximum.

Les inducteurs étant en série sur le circuit, comme dans le premier cas, on peut encore ajouter entre les balais une dérivation de résistance b' qui reçoit le courant i' et fait m' tours sur les inducteurs ; c'est l'excitateur en ***série et dérivation***.

Le courant extérieur i traversant les m spires de l'inducteur principal, on a les relations

$$\mathrm{I}=i+i', \qquad \frac{i'}{b+x}=\frac{i}{b'}=\frac{\mathrm{I}}{b+b'+x},$$

et les ampère-tours inducteurs sont

$$mi+m'i'=mi\left(1+\frac{m'}{m}\frac{b+x}{b'}\right)=m'i'\left(1+\frac{m}{m'}\frac{b'}{b+x}\right).$$

Suivant que la caractéristique E a été déterminée par l'un ou l'autre des deux enroulements, elle sera une fonction de $i\left(1+\frac{m'}{m}\frac{b+x}{b'}\right)$, ou de $i'\left(1+\frac{m}{m'}\frac{b'}{b+x}\right)$. La conductance entre les balais étant $\frac{1}{b'}+\frac{1}{b+x}=\frac{b+b'+x}{b'(b+x)}$, il en résulte

$$\mathrm{E}=\mathrm{I}\left[a+\frac{b'(b+x)}{b+b'+x}\right]=\mathrm{I}\,\frac{(a+b')x+a(b+b')+bb'}{b+b'+x}$$

et la différence de potentiel aux bornes de la machine est

$$e=ix=\mathrm{E}\,\frac{b'x}{(a+b')x+a(b+b')+bb'}=\frac{b'}{a+b'}\cdot\frac{\mathrm{E}}{1+\dfrac{b+\dfrac{b'}{a'+b'}a}{x}}.$$

La valeur de E est une fonction de x; en posant $p=\frac{b'}{a+b'}$, quantité très voisine de l'unité, la caractéristique extérieure devient maximum, c'est-à-dire sensiblement constante, pour la condition

$$\left(1+\frac{b+pa}{x}\right)\frac{d\mathrm{E}}{dx}+\frac{\mathrm{E}}{x^2}(b+pa)=0,$$

$$\frac{x}{\mathrm{E}}\frac{d\mathrm{E}}{dx}=-\frac{b+pa}{x+b+pa}=-\frac{1}{1+\dfrac{x}{b+pa}}.$$

Une troisième solution, que l'on appelle quelquefois enrou-

lement en *série et longue dérivation*, consiste à faire passer le courant principal I dans l'un des inducteurs b et à prendre la dérivation b', de courant i', entre le second balai et l'extrémité du fil b. On a alors

$$I = i + i', \qquad \frac{i'}{x} = \frac{i}{b'} = \frac{I}{b'+x},$$

$$mi + m'i' = mi\left(1 + \frac{m'}{m}\cdot\frac{x}{b'}\right) = m'i'\left(1 + \frac{m}{m'}\cdot\frac{b'}{x}\right),$$

$$E = I\left(a + b + \frac{b'x}{b'+x}\right) = I\,\frac{(a+b+b')x + (a+b)b'}{b'+x},$$

$$e = ix = E\,\frac{b'x}{(a+b+b')x + (a+b)b'} = \frac{b'}{a+b+b'}\,\frac{E}{1 + \frac{(a+b)b'}{(a+b+b')x}},$$

et la condition du maximum de e devient

$$\frac{x}{E}\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{1 + \frac{(a+b+b')}{(a+b)b'}x}.$$

Le problème se résoudrait également dans les différents cas par des constructions graphiques, mais elles deviennent plus compliquées et nous n'y insisterons pas.

876. Principes de construction. — Dans un projet de machine, on se donne *a priori* la force électromotrice E évaluée en volts et le courant induit I en ampères, d'où résulte la puissance absorbée $W = EI$ en watts.

Au point de vue mécanique, la machine devra fonctionner à raison de n tours à la seconde avec une vitesse déterminée w à la circonférence, de 20 mètres par exemple ; le diamètre D de l'anneau est alors $n\pi D = w$.

Supposons qu'il s'agisse d'une machine bipolaire. Pour un régime de I_0 ampères par unité de section, par exemple 400 ampères par centimètre carré, la section s des fils est $I_0 s = \frac{I}{2}$. S'il n'y a qu'une couche de fils, en tenant compte de l'épaisseur des isolants, on en déduit le nombre de spires N.

Le flux d'induction Φ se déduit de la relation

$$E = 2\Phi n N . 10^{-8}.$$

En appelant R la réluctance du circuit magnétique et $N'i'$ le nombre d'ampère-tours inducteurs, on a aussi

$$(4) \qquad R\Phi = \frac{4\pi}{10} \cdot N'i'.$$

L'anneau étant cylindrique et de longueur L, les fils ou tôles qu'il contient équivalent à une épaisseur d_a, de sorte que la section est $S_a = d_a L$. Si on veut que l'induction magnétique dans le fer ait une valeur H_a, par exemple de 12000, on en déduit la longueur de l'anneau :

$$(5) \qquad \Phi = 2 S_a H_a, \qquad L = \frac{S_a}{d_a} = \frac{E.10^8}{4nNH_a d_a}.$$

Des tables pratiques donneront la perméabilité μ_a correspondant à H_a, soit 1400 pour $H_a = 12000$. Le chemin moyen des lignes d'induction étant évalué aux deux tiers du diamètre, la réluctance de l'anneau est $\frac{2}{3}\,\frac{D}{2S_a\mu_a} = \frac{D}{3\mu_a d_a L}$.

Les machoires des inducteurs ne couvrent que les trois quarts de la circonférence de l'anneau, afin d'éviter qu'une partie importante des forces magnétiques s'échappent dans l'air d'un pôle à l'autre ou entre les pièces de fer; on reconnaît l'existence de ces pertes par le magnétisme apparent sur les différents organes de la machine. La surface de chaque entre-fer est donc $S = \frac{3}{8}\pi DL$, et l'intensité du champ

$$F = \frac{\Phi}{S} = 2\,\frac{S_a}{S}\,H_a = \frac{16}{3\pi} \cdot \frac{d_a}{D}\,H_a.$$

Pour que ce champ soit le tiers de l'induction dans le fer, il faut qu'on ait $16 d_a = \pi D$, c'est-à-dire que l'épaisseur de l'anneau doit être le seizième de la circonférence.

L'épaisseur e de chaque entre-fer est limitée pratiquement par celle des fils enroulés sur l'anneau et par le jeu que l'on doit laisser entre les organes. La réluctance des deux entre-fers est alors $\frac{2e}{S} = \frac{16}{3\pi}\,\frac{e}{DL}$.

La section moyenne S_b des pièces polaires, des noyaux et de la culasse qui les réunit est beaucoup plus grande, ce qui réduit d'autant l'induction magnétique, et on peut employer des matériaux moins perméables. En outre, le flux Φ ne traverse qu'une partie des sections, à cause du flux perdu dans la cavité de l'anneau, qui tend même à produire des courants contraires avec l'enroulement Gramme, et des forces magnétiques qui se propagent dans l'air. On peut représenter ces différentes causes en divisant la section S_b par un facteur ν, qu'on appelle *coefficient d'Hopkinson*, et qui varie en général de 1,3 à 1,4. Si l_b est la longueur moyenne des lignes d'induction dans cette partie du circuit, la réluctance totale a pour expression

$$R = \frac{D}{3\mu_a d_a L} + \frac{16}{3\pi}\frac{e}{DL} + \nu\frac{l_b}{\mu_b S_b}.$$

A cause des valeurs très élevées de la perméabilité μ, on voit que l'entre-fer joue un grand rôle dans la réluctance.

Enfin le décalage des balais diminue encore l'effet utile; il équivaut à un certain nombre $(1-f)N$ de spires enroulées en sens contraire sur l'anneau, de sorte que les spires efficaces sont fN. Le nombre N qui entre dans les formules doit donc être moindre que celui de l'enroulement réel, par exemple les neuf dixièmes.

Connaissant la résistance a de l'anneau, par la longueur et la section du fil, on en déduit la force électromotrice $E - aI$ disponible aux balais et la perte $A = aI^2$ par échauffement.

L'équation (4) donne également les ampère-tours inducteurs $N'i'$ par les valeurs de Φ et de R; la puissance correspondante peut être représentée par $B = bI^2$ si l'induction est empruntée au courant.

L'hystérésis magnétique dans l'anneau et les courants parasites de toute nature donnent un terme analogue $C = cI^2$. La puissance totale disponible et le rendement sont donc

$$U = W - (A + B + C),$$

$$u = 1 - \frac{A + B + C}{W}.$$

Nous n'insistons pas sur les considérations mécaniques que l'on doit faire intervenir : la résistance des matériaux, la pression et le frottement sur les coussinets, les liaisons de l'arbre avec l'anneau qu'il entraîne, les précautions à prendre pour dissiper les dégagements de chaleur par ventilation, etc.

Pour les fils de l'anneau, en particulier, l'accélération centrifuge est $\gamma = 2\frac{w^2}{D}$. Si la vitesse w est de 20 mètres et le rayon de 20^c, il en résulte

$$\gamma = \frac{20^2}{0,2} = 2000 \text{ mètres},$$

c'est-à-dire 200 fois l'accélération due à la gravité. Les frettes serrées sur l'anneau doivent permettre aux fils de résister à un effort radial de 200 fois leur poids.

Comme la plupart des organes mécaniques, les dynamos ne sont pas comparables à des figures de géométrie qui conservent toutes leurs propriétés dans des rapports constants quand on les réalise à des échelles différentes. Le projet de chaque machine doit être étudié en raison de sa grandeur absolue, de sorte que le même modèle, excellent dans certaines dimensions, pourrait devenir absolument défectueux s'il était amplifié ou réduit.

Supposons, par exemple, que l'on multiplie par p toutes les dimensions linéaires, et représentons chacune des grandeurs de machine ainsi transformée par la puissance de p qui lui est proportionnelle.

Au point de vue mécanique, il semble rationnel de donner à l'anneau une vitesse de rotation telle que la réaction centrifuge ne change pas ; nous admettrons, pour simplifier, que l'on conserve la même vitesse à la circonférence, auquel cas le nombre de tours par seconde sera p^{-1}.

La longueur des fils devient p, leur section p^2 et leur résistance p^{-1}. Pour un même courant I_0 par unité de section dans l'induit, le courant total est p^2, son carré p^4 et la perte par échauffement $p^4.p^{-1} = p^3$, ce qui donne $A' = Ap^3$. Le dégagement de chaleur reste le même par unité de volume, tandis que le rapport du refroidissement par la surface extérieure à la chaleur totale est $p^2.p^{-3} = p^{-1}$.

d'aimants permanents sur deux couronnes parallèles, entre lesquelles se meuvent des électro-aimants. Le flux d'induction magnétique dans chaque bobine change de signe quand elle passe d'un couple de pôles au suivant.

Si l'enroulement des induits est formé par un seul fil, on le dispose de manière que toutes les forces électromotrices s'ajoutent; les extrémités du fil communiquent à deux anneaux conducteurs sur lesquels frottent des balais pour transmettre le courant à l'extérieur. Au lieu de ce groupement en série, on peut aussi réunir les induits en dérivation, comme pour les piles, ou les combiner de différentes manières.

Dans d'autres cas, les inducteurs sont des électro-aimants excités par un courant continu d'origine étrangère. Enfin, il peut être avantageux de supprimer l'armature des induits, qui s'échauffe beaucoup par les changements d'aimantation. Pour réduire autant que possible l'entre-fer, il faut alors employer des bobines plates avec un fil enroulé sous forme de galette. Telles sont, par exemple, les machines Siemens.

Dans la machine Page, la réluctance du circuit magnétique est très inégale suivant que la barre mobile de fer doux est parallèle ou perpendiculaire à la ligne des pôles; le circuit conducteur qui entoure les pôles est le siège d'une force électromotrice alternative, sans qu'il soit alors nécessaire d'employer des balais de frottement.

Ce principe ingénieux revient en faveur. Une série d'électro-aimants sont montés en couronne sur la face intérieure d'un anneau en fonte et excités par un courant continu qui leur donne alternativement des pôles de noms contraires. Dans la cavité se meut un anneau en fer muni de dents saillantes en nombre égal à celui des électro-aimants. La réluctance des circuits magnétiques d'un pôle à l'autre varie d'un minimum à un maximum beaucoup plus grand, suivant que les dents se trouvent en face des pôles ou dans leur intervalle. Un second fil enroulé sur les électro-aimants recueille les courants induits. L'avantage manifeste de cette disposition est que les fils restent fixes et n'exigent plus de sertissage particulier ni de balais frottants; la seule partie mobile est une roue en fer, qui peut tolérer, au point de vue mécanique, des vitesses de rotation beaucoup plus grandes.

rendement sont

$$2U = r'I^2 = E^2 \frac{r'}{(r+r')^2 + \omega^2 L^2} = \frac{E^2}{2r + r' + \dfrac{r^2+\omega^2 L^2}{r'}},$$

$$u = \frac{r'}{R} = \frac{r'}{r+r'}.$$

A vitesse constante, si la résistance r' n'a pas d'induction propre, la valeur qui correspond au maximum U_m de puissance utile est déterminée par la condition $r'^2 = r^2 + L^2\omega^2$, c'est-à-dire que les deux portions du circuit ont la même impédance, et on a

$$U_m = \frac{E^2}{4\left(r + \sqrt{r^2 + L^2\omega^2}\right)}, \qquad \frac{1}{u_m} = 1 + \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}.$$

Le rendement relatif au travail maximum croît avec la vitesse et tend vers l'unité.

Avec les courants périodiques, la puissance utilisée U entre deux points A et B, sous une forme quelconque, pourra être déterminée par la méthode dite *des trois voltmètres*. Si on représente par v la chute de potentiel correspondante et par i le courant, la puissance est $U = \frac{1}{T}\int vi\,dt$, l'intégrale étant prise dans l'intervalle d'une période.

Considérons sur le circuit, entre deux points A_0 et A, une résistance r sans induction propre et soit $V = ir$ la chute de potentiel correspondante. On a

$$(V+v)^2 = (ir+v)^2 = V^2 + v^2 + 2rvi$$

et les valeurs moyennes pendant l'unité de temps donnent

$$(V+v)^2_m - V^2_m - v^2_m = 2r\frac{1}{T}\int vi\,dt = 2rU.$$

Les trois termes du premier membre pourront être déterminés par des électromètres, ou des voltmètres sans induction propre sensible, qu'on intercalera respectivement entre les points A_0 et B, A_0 et A, A et B ; on en déduit la valeur de U par la résistance r.

Les transformateurs industriels diffèrent de la bobine d'induction ordinaire par cette circonstance importante que le circuit magnétique est entièrement formé par du fer ; ce sont, par exemple, deux noyaux cylindriques parallèles réunis par des semelles en fer, ou deux cylindres concentriques, l'un plein et l'autre creux, réunis par des plaques de fer sur leurs bases. Autour d'une partie de ce circuit on enroule N spires du courant primaire, et N′ spires du courant secondaire ; les armatures sont naturellement constituées par des fils de fer ou des lames de tôle, afin d'éviter les courants parasites dans la masse du métal.

Comme l'aimantation ne reste pas proportionnelle à la force magnétomotrice et que les effets d'hystérésis interviennent pour une part, les coefficients d'induction propre ou mutuelle ne sont pas constants et on ne peut les considérer ainsi que dans une première approximation. Les flux de force magnétique perdus sont négligeables, puisque la réluctance du circuit est très faible ; désignant par L, L' les coefficients d'induction propre du primaire et du secondaire, et par M le coefficient d'induction mutuelle, on a alors sensiblement

$$(1) \qquad \frac{L}{N^2} = \frac{L'}{N'^2} = \frac{M}{NN'}, \qquad \text{ou} \qquad LL' = M^2.$$

En appelant r et r' les résistances du primaire et du secondaire, i et i' les courants, e et e' les forces électromotrices, et Φ le flux d'induction magnétique, on a encore

$$e = ir + N\frac{d\Phi}{dt},$$

$$e' = -N'\frac{d\Phi}{dt} = i'r' = \frac{N'}{N}(ir - e).$$

La dérivée du flux Φ est proportionnelle à ω, c'est-à-dire à la fréquence du courant, et en raison inverse de la réluctance du circuit magnétique ; la quantité e est très grande par rapport à ir, ce qui donne la relation approchée

$$Ne' + N'e = 0.$$

de provoquer des pertes d'électricité. On doit à Poggendorff [1] l'idée de *cloisonner* les bobines, c'est-à-dire de disposer le fil secondaire dans une série de loges successives séparées les unes des autres par des lames isolantes perpendiculaires à l'axe de la bobine. Le potentiel du fil secondaire va ainsi en croissant d'une extrémité à l'autre de la bobine, sans qu'une différence de potentiel trop grande existe entre deux couches voisines d'une même loge.

Lorsqu'on fait communiquer les extrémités du fil secondaire avec les armatures d'un condensateur, la différence de potentiel maximum diminue, puisque l'on augmente la capacité du fil induit, mais cette communication équivaut à la fermeture du circuit par un conducteur et la décharge induite est plus grande. Si les pôles sont séparés par une distance assez faible pour qu'une étincelle puisse la franchir, la quantité d'électricité correspondante croît avec la capacité du condensateur. La distance explosive étant portée au maximum dans chaque cas, l'énergie correspondante augmente également à mesure que cette distance diminue.

Si l'on veut que la distance explosive ne diminue pas beaucoup par l'introduction d'un condensateur, il faut que sa capacité soit assez faible et qu'il soit construit de manière à supporter une grande différence de potentiel. L'emploi de batteries ou de bouteilles de Leyde en cascade donne alors des faisceaux d'étincelles d'un bruit très éclatant [2].

Il est assez difficile d'expliquer par la théorie tous les effets d'une bobine d'induction, parce que l'étincelle de rupture introduit dans le circuit principal une résistance très variable qui joue le rôle le plus important dans le caractère de la décharge. On peut se faire une idée du jeu de l'appareil en supposant que les deux circuits restent fermés et que la bobine sert comme transformateur, avec une force électromotrice sinusoïdale de très courte période dans le circuit primaire.

Les amplitudes I et I' des courants primaire et secondaire donnent alors

$$\frac{I'}{I} = \frac{M}{L'} = \frac{N}{N'}.$$

(1) POGGENDORFF. *Pogg. Ann.*, t. XCIV, p. 289; 1850.
(2) A. CAZIN, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. LVI, p. 307; 1863

mis en rotation continue; il est relié au point B et le point A à un style en fer S_1 qui frotte sur le papier. La chute de potentiel V de A et B est une fonction $f(t)$ du temps; l'électrolyse a lieu, et le style laisse une trace sur le papier, dès que V atteint et dépasse une certaine valeur $+v$; le tracé représente donc la corde de la courbe des potentiels limitée aux époques t_1 et t'_1 définies par la condition $v=f(t_1)=f(t'_1)$.

On joint ensuite le point B au pôle négatif d'une pile de résistance négligeable et de force électromotrice e, dont le pôle positif communique avec un second style S_2 appuyant sur la même génératrice que le premier. La différence de potentiel du second style et du cylindre est $e+f(t)$, de sorte que la corde de ce nouveau style est limitée aux époques

$$v=e+f(t_2)=e+f(t'_2).$$

On en déduit

$$e=f(t_1)-f(t_2)=f(t'_1)-f(t'_2).$$

En faisant varier la force électromotrice auxiliaire et permutant les pôles, on obtiendra ainsi par échelons successifs les ordonnées de la courbe V. Un plus grand nombre de styles reliés à différents points d'une batterie d'accumulateurs donneraient le tracé graphique de cette courbe.

2° Le courant induit dans un circuit par un courant alternatif présente avec ce dernier une différence de phase (400)

$$\delta=\alpha'-\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\beta'\right)=\pi-\operatorname{arc\,tang}\frac{r'}{L'\omega}.$$

Lorsque la résistance r' est très faible, les courants primaire et secondaire sont presque de sens opposés. D'ailleurs, l'angle β' étant toujours inférieur à 90°, la résultante générale des actions réciproques est répulsive et le circuit secondaire tend à s'éloigner du primaire.

Nous citerons, à ce sujet, quelques expériences de M. Elihu Thomson. On tient à la main un anneau de cuivre qui entoure, au-dessus du plan moyen, un électro-aimant vertical alimenté par un courant alternatif; l'anneau est repoussé de bas en haut et se projette en l'air quand on l'abandonne à lui-même.

férente. I
uilibre : l
icace et à
mpense c
. l'apparei
.ais.
rcuit secon
tion d'équil
nsuite, etc.
r courant
arbons dans
par la ré
métalliqu
es effets r
ace. On peu
isque mob

Pour un même en
d'excitation, on voi
trice induite est pr
roulement second
Le rapport des
daire et primaire

880. Propri
instant la for
circuit en les
un commuta
le courant (6
rence de pha
ainsi la form
du courant
d'induction.

nt de self-induction, le carré de l'impédance entre ints O et M comprenant n spires est

$$n^2 r^2 + \omega^2 (n^2 l)^2 = n^2 (r^2 + \omega^2 l^2 n^2).$$

:e la résistance r est très faible par rapport à ωl, on e que l'impédance et, par suite, la force électromo- :acc correspondante, est proportionnelle à $\omega l n^2$, c'est- ı carré du nombre des spires. Si on touche le point O :onducteur f et qu'on l'approche du point M, on en étincelles d'autant plus vives qu'il y a plus de spires es. Une lampe à incandescence peut être alimentée à ne normal, quand on la met en dérivation sur un cer- nbre de spires. Un tube à gaz raréfié introduit dans s'illumine sous l'influence du champ alternatif.

›urants de haute fréquence n'ont pas d'action physio- sensible, sans doute parce qu'il restent entièrement els. En tenant aux mains des conducteurs à surface comme des boules de métal, on peut se mettre en dé- sur l'hélice et placer dans ce circuit une lampe à in- :nce qui s'illumine.

utilise ces courants secondaires pour alimenter une bine sans armature en fer et noyée dans l'huile, les induits dans la nouvelle bobine atteignent des ten- s élevées qui permettent d'imiter tous les phénomènes :ité statique. Il faut alors donner une valeur conve- :a distance explosive a et b du micromètre, *souffler* :lles avec un courant d'air ou un champ magnétique les condensateurs intercalés dans le circuit afin que :ge secondaire reste oscillante; il est encore avanta- maintenir sur ce circuit une petite interruption à ;. Les pôles secondaires permettent alors les expé- :s plus variées.

deux fils parallèles, toute la nappe d'air qui les sé- ient lumineuse. Entre deux anneaux concentriques, duit une couronne brillante de lumière violacée que ıt par intervalles des étincelles.

es pôles étant laissé libre dans l'air et l'autre réuni à ıu conducteur, on tire du plateau de vives étincelles

le cadre S_1, $\Phi_2 = FS_2\cos(\omega t + \delta)$ dans S_2, et les forces électromotrices correspondantes

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = FS_1\omega\sin\omega t = E_1\sin\omega t,$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = FS_2\omega\sin(\omega t + \delta) = E_2\sin(\omega t + \delta).$$

Si les circuits ont les mêmes éléments électriques S, r, L, et que l'induction mutuelle soit nulle ou négligeable, on a

$$E = E_1 = E_2 = FS\omega, \qquad a^2 = r^2 + \omega^2 L^2,$$

$$I = I' = \frac{E}{a}, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\omega L}{r};$$

$$i_1 = I\sin(\omega t - \alpha), \qquad i_2 = I\sin(\omega t - \alpha + \delta).$$

Les courants ont la même amplitude et on dit qu'ils sont *décalés* de l'angle δ.

Lorsque les cadres sont rectangulaires, en particulier, l'angle δ est de 90°, l'induction mutuelle est rigoureusement nulle; les courants

$$i_1 = I\sin(\omega t - \alpha), \qquad i_2 = I\cos(\omega t - \alpha),$$

sont dits alors *biphasés* à angle droit, ou en *quadrature*.

Trois cadres, montés respectivement sous le même angle δ, donneront aussi

$$i_1 = I\sin(\omega t - \alpha),$$
$$i_2 = I\sin(\omega t - \alpha + \delta),$$
$$i_3 = I\sin(\omega t - \alpha + 2\delta).$$

Lorsque la distribution des cadres est régulière sur une demi-circonférence, les courants sont *triphasés* à 60°. On a alors $2\cos\delta = 1$ et

$$i_1 + i_3 = 2I\sin(\omega t - \alpha + \delta)\cos\delta = i_2.$$

L'induction de deux courants i_1 et i_3 sur le troisième circuit

re S_1, $\Phi_2 = FS_2 \cos(\omega t + \beta)$ dans S_2, et les forces électro-
;es correspondantes

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = FS_1 \omega \sin \omega t = E_1 \sin \omega t,$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = FS_2 \omega \sin(\omega t - \beta) = E_2 \sin(\omega t - \beta).$$

.es circuits ont les mêmes éléments électriques S, r, L,
; l'induction mutuelle soit nulle ou négligeable, on a

$$E = E_1 = E_2 = FS\omega, \qquad a^2 = r^2 - \omega^2 L^2,$$

$$I = I' = \frac{E}{a}, \qquad \tang \alpha = \frac{\omega L}{r};$$

$$i_1 = I \sin(\omega t - \alpha), \qquad i_2 = I \sin(\omega t - \alpha + \beta).$$

; courants ont la même amplitude et on dit qu'ils sont
és de l'angle β.

:sque les cadres sont rectangulaires, en particulier, l'an-
est de $90°$, l'induction mutuelle est rigoureusement nulle;
)urants

$$i_1 = I \sin(\omega t - \alpha), \qquad i_2 = I \cos(\omega t - \alpha),$$

dits alors *biphasés* à angle droit, ou en *quadrature*.

)is cadres, montés respectivement sous le même angle β,
.eront aussi

$$i_1 = I \sin(\omega t - \alpha),$$
$$i_2 = I \sin(\omega t - \alpha + \beta),$$
$$i_3 = I \sin(\omega t - \alpha + 2\beta).$$

.orsque la distribution des cadres est régulière sur une
ni-circonférence, les courants sont *triphasés* à $60°$. On a
rs $2\cos\beta = 1$ et

$$i_1 + i_3 = 2 I \sin(\omega t - \alpha + \beta)\cos\beta = i_2.$$

L'induction de deux courants i_1, i_3 sur le trois[illegible]

L'amplitude de ce courant commun est $I'=I\sqrt{2}$. En appelant r et r' les résistances des conducteurs, la perte de puissance sur la ligne est

$$2r\frac{I^2}{2}+r'\frac{I'^2}{2}=(r+r')I^2,$$

tandis qu'elle serait $2rI^2$ avec un réseau à 4 fils. Pour une même densité de courant, les amplitudes I et I' sont proportionnelles aux sections s et s' ou en raison inverse des résistances, ce qui donne

$$rI=r'I'=r'I\sqrt{2},\qquad r=r'\sqrt{2},\qquad s'=s\sqrt{2}.$$

La disposition des trois fils réduit ainsi la perte en ligne et le poids du métal dans le même rapport

$$\frac{r+r'}{2r}=\frac{2s+s'}{4s}=\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=0,85.$$

Au poste d'arrivée, le courant est utilisé, par exemple avec des lampes à incandescence, en M_1 et M_2 sur les courants latéraux, ou en M sur le courant commun. Dans le premier cas, les résistances équivalentes en M_1 et M_2 doivent être égales pour ne pas troubler le jeu de la machine.

Les courants triphasés n'exigent que 3 fils. Dans le couplage en *étoile*, les induits S_1, S_2 et S_3 sont réunis au même point O (fig. 281), de manière que les forces électromotrices

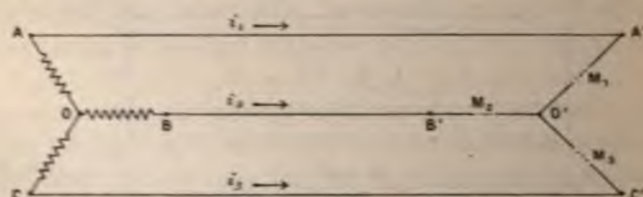


Fig. 281.

successives présentent une différence de phase de 120°, et les 3 fils des autres pôles aboutissent en O' au poste d'arrivée. La somme des forces électromotrices étant nulle, il en est de même pour les courants i_1, i_2 et i_3 si les fils sont équilibrés;

nts O et O′ restent à l'état neutre et on peut les mettre
munication avec le sol. On utilise les courants en M_1,
M_3, respectivement sous la même charge.
le couplage en *triangle*, les inducteurs sont réunis
bout, en circuit fermé (fig. 282), de manière à constituer

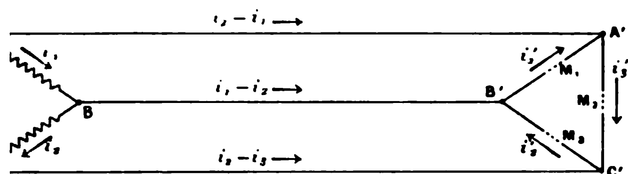


Fig. 282.

our d'un triangle A B C, et les points de jonction
niquent par les fils de ligne aux sommets d'un autre
e A′ B′ C′. Les courants i_1, i_2 et i_3 dans les induits
t respectivement $i_3 - i_1$, $i_1 - i_2$ et $i_2 - i_3$ sur les fils de
puis i'_1, i'_2 et i'_3 sur les branches à l'arrivée. Avec un
équilibré, on a encore

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad i'_1 + i'_2 + i'_3 = 0;$$

$$(i_1 - i'_1) + (i_2 - i'_2) + (i_3 - i'_3) = 0.$$

rois termes de cette dernière équation ont la même
et chacun d'eux est nul, car la loi de partage donne

$$i_3 - i_1 = i'_3 - i'_1, \qquad i_1 - i'_1 = i_3 - i'_3 = i_2 - i'_2.$$

courants sur le triangle d'arrivée sont donc respective-
es mêmes que sur les côtés analogues du triangle des
; on les utilisera en M_1, M_2 et M_3.

courants triphasés peuvent également être reçus par
ransformateurs identiques, réunis en étoile ou en
e suivant le cas, dont les fils secondaires émaneront
s mêmes connexions.

remier groupe de transformateurs reçoit, par exemple,
rants de la machine, dont il élève la tension, pour les
ettre sur la ligne, et un second groupe de transforma-
l'arrivée ramène la tension au taux qui convient pour
plications.

bobines primaires A_1, A_2,... A_6, les trois dernières enroulées en sens inverse. Un commutateur tournant à 6 touches distribue le courant primaire aux six bobines successives; le

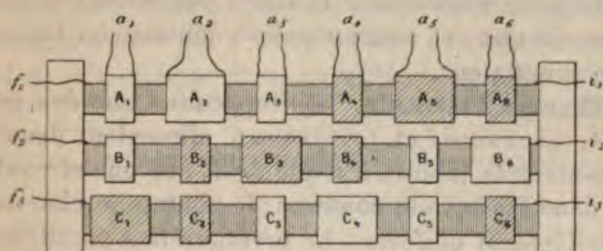


Fig. 284.

courant secondaire est alternatif et sensiblement sinusoïdal; l'approximation est d'autant plus grande qu'on augmente davantage les ordonnées de la sinusoïde et le nombre correspondant des bobines primaires.

La même disposition permet d'obtenir des courants polyphasés. Dans le cas de six bobines primaires, par exemple, on constitue le transformateur avec trois noyaux sur lesquels les bobines sont disposées dans l'ordre indiqué par la figure, les bobines de même rang, telles que A_1, B_1 et C_1, étant montées en série sur le circuit de chaque touche du commutateur. Il est clair que la phase du courant i_2 est alors en avance de 120° sur celle du courant i_1 et en retard de 120° par rapport au courant i_3.

Supposons maintenant que les conducteurs f_1, f_2 et f_3 soient alimentés par les courants alternatifs i_1, i_2 et i_3 provenant d'une source extérieure. Si le commutateur tourne à la même vitesse que précédemment, c'est-à-dire s'il est synchrone avec les courants, les touches successives recevront des courants de sens opposés à la direction primitive et le circuit primaire recevra un courant à peu près uniforme.

Le synchronisme peut être réalisé d'une manière automatique, soit par les courants triphasés i_1, i_2 et i_3, soit par ceux du commutateur. Imaginons, par exemple, que les fils a_1 et a_4, a_2 et a_5, a_3 et a_6 communiquent respectivement avec des couples de bobines enroulées sur l'anneau d'une machine Gramme bipolaire, aux extrémités de trois diamètres faisant entre eux

Le champ tournant est elliptique ; il équivaut à la superposition d'un champ alternatif de direction constante et d'un champ tournant circulaire.

Lorsque les n champs partiels ont la même amplitude a et que l'azimut β est égal à la différence de phase α correspondante, l'un des champs étant parallèle à l'axe des x, on a

$$2\cos\beta\cos\alpha = 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

$$2\sin\beta\cos\alpha = 2\cos\beta\sin\alpha = \sin 2\alpha,$$

$$2\sin\beta\sin\alpha = 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha;$$

$$\Sigma\cos\beta\cos\alpha = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\Sigma\cos 2\alpha,$$

$$\Sigma\sin\beta\sin\alpha = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\Sigma\cos 2\alpha,$$

$$\Sigma\cos\beta\sin\alpha = \Sigma\sin\beta\cos\alpha = \Sigma\sin 2\alpha.$$

Supposons enfin que les champs partiels soient également distribués dans une demi-circonférence et fassent entre eux le même angle δ, de sorte qu'on ait $n\delta = \pi$. L'angle 2α doit prendre alors les différentes valeurs 0, 2δ, $4\delta \ldots$, $2(n-1)\delta = 2\pi - 2\delta$. On voit aisément que $\Sigma\cos 2\alpha$ est la projection sur l'axe des x du contour polygonal régulier de n cotés d'unité de longueur, faisant entre eux l'angle extérieur 2δ, et $\Sigma\sin 2\alpha$ la projection de ce contour sur l'axe des y; le polygone serait doublé pour $n\delta = 2\pi$. Ces deux sommes étant nulles, il reste

$$\varphi = 0, \qquad \psi = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad A = B = n\frac{a}{2} = H,$$

$$X = H\sin\omega t, \qquad Y = \pm H\cos\omega t.$$

Le champ tournant final est encore circulaire ; son amplitude est la moitié de la somme des amplitudes de tous les courants partiels. C'est ce que l'on obtiendrait, en particulier, avec les courants triphasés de 60° ou de 120°.

Dans les transformateurs (878), la différence de phase des



ne sont pas exactement réciproques. Quand l'appareil sert de moteur, les courants parasites de diverses natures changent de signe et la réaction d'induit est diminuée. Le déplacement des balais doit être plus faible, ce qui a pour conséquence d'augmenter le flux magnétique utile et, par suite, le couple moteur.

Plusieurs distinctions sont à faire suivant la nature des inducteurs qui peuvent être, soit magnétiques ou excités par une source étrangère, soit montés en série avec l'anneau mobile sur le courant principal, soit encore alimentés par une dérivation totale ou partielle. Ces différentes circonstances exigeraient une discussion particulière pour assurer les meilleures conditions de travail et de renversement.

Le problème est relativement simple lorsque la source et le moteur sont des machines identiques avec inducteurs en série (**389**), faisant respectivement n tours et n' tours par seconde; le flux d'induction magnétique a la même valeur dans les deux cas, à part des questions accessoires. Les forces électromotrices directe et inverse sont respectivement $E = n\varphi(I)$ et $E' = n'\varphi(I)$, la puissance absorbée $W = EI$ et la puissance au moteur $U = E'I$; le rendement électrique est égal au rapport des vitesses.

Si R est la résistance totale du circuit, l'intensité du courant est donnée par

$$IR = E - E' = (n - n')\varphi(I),$$

et la puissance utile peut s'écrire

$$U = n'I\varphi(I) = \frac{n'(n-n')}{R}\varphi^2(I).$$

Pour des valeurs constantes de n et de I, la puissance utile serait encore maximum, avec un rendement électrique de 50 p. 100, si la vitesse du moteur était moitié moindre, mais ces conditions ne conviennent pas dans la pratique.

Une machine à courant continu, avec inducteurs en série, devient aussi un moteur quand on l'alimente par un courant alternatif, puisque le sens du courant change à la fois dans

cour… quan… le r… qu'à titre temp… alim… aux pièces mobiles tou… peut alors affaiblir le… ou en les plaçant alt…

ra… **…matifs.** — I. Supposons d'abord d… parcouru par le courant d… es…






… vitesse angulaire ω au… à la direction d'un champ … du cadre est $M = SI \sin \omega t$. … magnétique N_1 du cadre … champ, le couple pro-

$$\ldots \sin(\omega' t + \delta).$$

$$\ldots - \cos[(\omega' + \omega)t + \delta]$$

… moyen est toujours nul, à moins que …, c'est-à-dire que la période de … la même que celle du courant. Le … s'entretenir qu'au *synchonisme* et la

moyenne du couple moteur est alors

$$C = \frac{FSI}{2} \cos\delta = C_1 \cos\delta.$$

valeur de C_1 est le couple maximum que l'on puisse ander au moteur ; en dessous de cette limite, l'angle δ de lage se règle en raison du travail.

puissance est $U = C\omega$. Si r est la résistance du cadre, la ance absorbée est $W = U + r\frac{I^2}{2}$ et le rendement

$$\frac{1}{u} = \frac{W}{U} = 1 + \frac{rI}{FS\omega\cos\delta}.$$

our mettre en mouvement les moteurs construits sur ce cipe, il faut avoir recours à des moyens auxiliaires jusce qu'on ait établi le synchronisme.

plus simple consiste à monter sur le même arbre une mo à courant continu que l'on alimente par une batterie umulateurs. Dès que les cadres mobiles sont au synnisme, on excite les inducteurs ; la dynamo devient alors romoteur, elle peut entretenir les inducteurs et recharger ême temps une batterie, qui sera ensuite utilisée pour un départ.

arriverait aux mêmes résultats en faisant tourner un ai-, ou un électro-aimant à courant continu, dans un champ natif, puisque la quantité M est alors constante et que le p F sera proportionnel à $\sin\omega t$.

rsque le champ F est produit dans le premier cas par ourant, le flux émis dans les inducteurs, par réaction du ant dans le cadre mobile, peut s'écrire

$$\Phi = -Ai\cos(\omega' t + \delta) = -AI\sin\omega t\cos(\omega' t + \delta),$$

i donne, pour le synchronisme,

$$\Phi = \frac{AI}{2}[\sin\delta - \sin(2\omega t + \delta)],$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = AI\omega\cos(2\omega t + \delta).$$

III. Un dernier cas conduit à des résultats très simples. (P. Boucherot). Le champ est produit par des inducteurs à angle droit parcourus par des courants $I \sin \omega t$ et $I \cos \omega t$ en quadrature; ils sont reliés respectivement à deux cadres rectangulaires mobiles. Le champ est tournant à la vitesse ω et l'axe magnétique des cadres tourne avec la même vitesse relative, dans un sens ou dans l'autre, suivant les liaisons.

La vitesse de rotation du système étant ω', soit ωt l'angle du champ avec une direction fixe, $\pm \omega t$ l'angle de l'axe magnétique des cadres avec l'un des diamètres et $\omega' t + \delta$ l'angle de ce diamètre avec la direction fixe considérée.

L'angle du champ avec l'axe magnétique du système mobile est $\theta = \omega' t + \delta \pm \omega t - \omega t$. Si l'on prend le signe $+$, c'est-à-dire si la rotation du champ et celle de l'axe magnétique se font dans le même sens, le couple moyen est nul. Il faut donc établir les communications de manière que les deux rotations du champ et de l'axe magnétique soient de sens contraires. On a alors $\theta = (\omega' - 2\omega)t + \delta$. Comme le champ et le moment magnétique des cadres sont tous deux proportionnels à I, le couple est de la forme $-AI^2 \sin[(\omega' - 2\omega)t + \delta]$. Sa valeur moyenne reste nulle en général, sauf pour la condition $\omega' = 2\omega$, c'est-à-dire quand la vitesse de rotation du cadre est double de celle du champ. On a alors

$$C = -\frac{AI^2}{2} \sin \delta, \qquad U = -\omega AI^2 \sin \delta.$$

L'appareil est électromoteur, avec production de courants biphasés en quadrature, ou moteur, suivant que $\sin \delta$ est positif ou négatif.

887. Induits fermés. — Lorsque le cadre mobile constitue un circuit fermé, il n'est plus nécessaire d'y amener le courant par des bagues et des balais; on évite ainsi d'une manière absolue les étincelles qui se produisent toujours sur les parties frottantes. Différentes dispositions permettent encore d'obtenir dans le cadre des courants induits qui suffisent pour entretenir le mouvement.

I. Si le champ est alternatif, $F = H \sin \omega t$, et que le cadre S_1 (fig. 285) tourne à la vitesse ω', le flux d'induction émis dans

qu'un cadre de surface S_1 (fig. 285), parcou

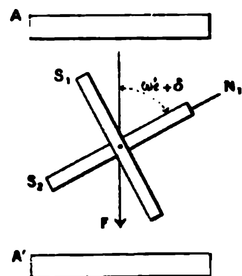


Fig. 285.

alternatif $i = I \sin \omega t$, tourne avec la
tour d'un diamètre perpendiculaire [redacted]
uniforme F. Le moment magnétique [redacted]
Si $\omega' t + \delta$ est l'angle que fait l' [redacted]
avec la direction opposée à [redacted]
duit par le champ est [redacted]

$$FM \sin(\omega' t + \delta) = FSI$$ [redacted]

La relation [redacted]

$$2 \sin \omega t \sin(\omega' t + \delta) = \cos[($$ [redacted]

montre que le couple m

…uples.
… à
… qua-
… tan-
… l'axe
… ative,

… angle du
… xe magné
… l'angle de

… du système mo-
… le signe +, c'est-
… l'axe magnétique
… oyen est nul. Il faut
… manière que les deux
… nétique soient de sens
… $t + \delta$. Comme le champ
… res sont tous deux propor-
… rme $-AI^2 \sin[(\omega' - 2\omega)t + \delta]$.
… en général, sauf pour la condi-
… nd la vitesse de rotation du cadre
… p. On a alors

… δ, $U = -\omega AI^2 \sin\delta$.

… moteur, avec production de courants
… re, ou moteur, suivant que $\sin\delta$ est

… s. — Lorsque le cadre mobile constitue
… n'est plus nécessaire d'y amener le cou-
… et des balais ; on évite ainsi d'une manière
… es qui se produisent toujours sur les par-
… ifférentes dispositions permettent encore
… cadre des courants induits qui suffisent pour
… ement.
… est alternatif, $F = H \sin\omega t$, et que le cadre S_1
… à la vitesse ω', le flux d'induction émis dans

on n'aura à conserver dans la valeur moyenne que les produits de même période, ce qui donne

$$C = \frac{A^2}{2}\left(\frac{\omega_2}{a_2}\cos\alpha_2 - \frac{\omega_1}{a_1}\cos\alpha_1\right) = \frac{A^2 r}{2}\left(\frac{\omega_2}{a_2^2} - \frac{\omega_1}{a_1^2}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\omega_2 a_1^2 - \omega_1 a_2^2 = (\omega_2 - \omega_1)(r^2 - L^2\omega_1\omega_2) = 2\omega'[L^2(\omega^2 - \omega'^2) - r^2],$$

$$\omega_2 a_1^2 + \omega_1 a_2^2 = (\omega_2 + \omega_1)(r^2 + L^2\omega_1\omega_2) = 2\omega[L^2(\omega^2 - \omega'^2) + r^2],$$

$$a_1^2 a_2^2 = r^4 + 2r^2 L^2(\omega^2 + \omega'^2) + L^4(\omega^2 - \omega'^2)^2,$$

$$C = A^2 r\omega' \frac{L^2(\omega^2 - \omega'^2) - r^2}{r^4 + 2r^2L^2(\omega^2 + \omega'^2) + L^4(\omega^2 - \omega'^2)^2}.$$

Le couple moyen est nul pour les vitesses angulaires $\omega' = 0$, $\omega' = \infty$ et $L^2\omega'^2 = L^2\omega^2 - r^2$; cette dernière valeur, que nous désignerons par ω'_0, est très voisine de ω lorsque la résistance r du circuit est très petite par rapport à la réactance $L\omega$.

Le couple moteur est positif quand la vitesse est comprise entre o et ω'_0, négatif au delà. Entre les deux premières limites il passe par un maximum ; pour un régime stable, la machine doit fonctionner au delà de ce maximum afin que le couple moteur augmente quand elle se ralentit par un accroissement des efforts exigés. La machine comporte donc un régime variable, mais il est nécessaire qu'on lui imprime d'abord une vitesse supérieure à celle du couple maximum.

La puissance utile est

$$U = C\omega' = r\frac{A^2}{4}(\omega_1 - \omega_2)\left(\frac{\omega_2}{a_2^2} - \frac{\omega_1}{a_1^2}\right),$$

a perte par échauffement

$$Q = r I_m^2 = r\frac{A^2}{2}\left(\frac{\omega_1^2}{a_1^2} + \frac{\omega_2^2}{a_2^2}\right),$$

et la puissance totale dépensée

$$W = U + Q = r\frac{A^2}{4}(\omega_1 + \omega_2)\left(\frac{\omega_2}{a_2^2} + \frac{\omega_1}{a_1^2}\right).$$

est très
un échauf-
il des résis-
une certaine
$= \omega$, c'est-à-

oyen est

x avantage dans la pra-
che de lui-même et peut
dables. Le maximum C_m du
ondition

$$= r, \quad C_m = \frac{A^2}{4L}.$$

pour s'annuler au synchronisme.
se supérieure à celle du maximum
onner.

roportionnelle à $\frac{\omega_1 \omega'}{a_1^2} = \frac{\omega_1(\omega - \omega_1)}{r^2 + L^2 \omega_1^2}$,
our

$$- L^2 \omega_1^2) = 2 L^2 \omega_1^2 (\omega - \omega_1),$$

$$\frac{\omega^2}{r^2} \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \tan^2 x,$$

$$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{\cos x}{1 + \cos x}.$$

La vitesse correspondante est inférieure à celle du couple maximum, puisqu'on a toujours $\alpha_1 < \alpha$.

On verrait encore aisément qu'avec une série de cadres distribués régulièrement sur une circonférence, ou une série de barres en cage d'écureuil, la réaction d'induit serait nulle.

III. Pour provoquer le démarrage des moteurs à induit fermé dans un champ alternatif (I), on a souvent recours aux propriétés des champs tournants en employant deux paires d'inducteurs à angle droit dans lesquels on dirigera finalement le courant alternatif pour constituer une machine à quatre pôles. Le problème consiste alors à exciter d'abord ces inducteurs par des courants temporaires de phases différentes. Il n'est même pas nécessaire que l'induit soit amené jusqu'au synchronisme correspondant, puisque la vitesse doit être diminuée de moitié dès que les quatre fils deviennent alternativement de signes contraires par le courant commun.

La question est importante au point de vue industriel pour obtenir un démarrage automatique dans un sens déterminé, la symétrie du système ne comportant *a priori* aucune direction pour le mouvement. Nous indiquerons quelques unes des solutions du problème.

Un premier moyen consiste à utiliser le courant primaire et le courant secondaire d'un transformateur à faible charge, mais cette disposition exigerait sans doute un enroulement spécial sur les inducteurs.

Avec deux circuits dérivés sur le courant principal, leur induction mutuelle est nulle. Les amplitudes correspondantes I_1 et I_2 des courants dérivés sont (397)

$$\frac{I_1^2}{I_2^2} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{r_2^2 + L_2^2\omega^2}{r_1^2 + L_1^2\omega^2},$$

et leur différence de phase $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ est donnée par

$$\tang \alpha_1 = \frac{L_1\omega}{r_1}, \qquad \tang \alpha_2 = \frac{L_2\omega}{r_2}$$

Il suffit que les angles α_1 et α_2 soient inégaux, auquel cas le champ est elliptique et provoque la rotation de l'induit.

ÈME

…RIQUES

les valeurs adoptées
…mpère réduit $1^{mgr},118$
….09323 d'eau (653); il

…r minute.	Par heure.
…7.08^{mgr}	$4,025^{gr}$
19.87	1,192
5.594	0,3356
0.6215	0,03729
6,938^{cc}	$416,3^{cc}$
10.407	624,45

…mbres qui suivent ont été
…Remarquons, en particulier,
…unité C. G. S., c'est-à-dire la ré-
…eur ayant un centimètre carré
…sa valeur en ohms est 2.10^{-9} et
…ère un fil de 100 mètres de
… ohms pour une section

… 1,2732.10^{-3} ohms pour un

…pelant d la densité du corps,
… gramme est $\frac{1}{100d}$ et la résis-
…d.10^{-5} ohms.

sont groupés en triangle. Il suffira donc de faire comm ces balais avec trois conducteurs réunis finalement en pour obtenir des courants triphasés i_1, i_2 et i_3.

Si l'on fait tourner l'anneau dans cet état, la mach

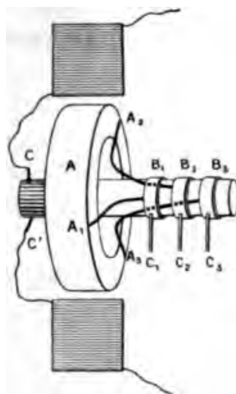


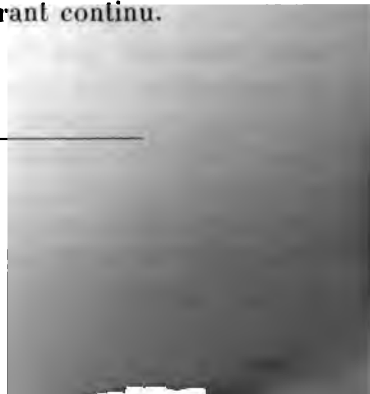
Fig. 286.

morce et produit, d'un côté des courants continus balais C et C′, de l'autre des courants triphasés par lais C_1, C_2 et C_3.

En excitant les inducteurs par un courant continu, chine devient un moteur et fournit des courants alterna

Inversement, quand on introduit par les bagues des rants triphasés, l'anneau devient un aimant tournant; met en marche dans le sens opposé, jusqu'au synchron et l'on récoltera au collecteur un courant continu.

Si l'on imagine deux machines semblables réunies par l bagues, la rotation de la première, provoquée par des moy mécaniques ou par un courant auxiliaire, tend à faire tour la seconde au synchronisme et cette dernière fournira ens par son collecteur un courant continu.



Pour la mesure des températures élevées par tance des fils métalliques, on ne peut pas admett variation soit linéaire (1) et les modifications allotrop certains métaux se manifestent par des changements l dans la loi de conductibilité.

Les *alliages* présentent des difficultés de même o point de vue physique ou mécanique, et leur com exacte est souvent assez mal définie. Le premier ta est encore emprunté à MM. Dewar et Fleming, le se aux expériences de MM. Feussner et Lindeck (2). I ficient α_{15} se rapporte à la température moyenne de 15

I.

	ρ_0.
Silverine (77 Cu ; 17 Ni ; 2 Fe ; 2 Zn ; 2 Co)	206
Aluminium, Cuivre (94 Al ; 6 Cu)	290
Aluminium, Argent (94 Al ; 6 Ag)	464
Or, Argent (90 Au ; 10 Ag)	628
Cuivre, Aluminium (97 Cu ; 3 Al)	884
Cuivre, Nickel, Aluminium (87 Cu ; 6,5 Ni ; 6,5 Al)	14912
Platine, Rhodium (90 Pt ; 10 Rd)	21142
Acier au Nickel (4,35 °/₀ Ni)	29452
Maillechort	29982
Platine, Iridium (80 Pt ; 20 Ir)	30896
Platine, Argent (33 Pt ; 66 Ag)	31582
Platinoïde	41731
Manganine (84 Cu ; 12 Mn ; 4 Ni)	46678
Acier au Manganèse (12 °/₀ Mn)	67148

II.

Maillechort (60,16 Cu ; 25,37 Zn ; 14,03 Ni ; 0,3 Fe)	30000	
Patent Nickel (74,41 Cu ; 0,52 Zn ; 24,14 Ni ; 0,70 Fe ; 0,17 Mn).	32700	
Nickeline (54,57 Cu ; 20,44 Zn ; 24,48 Ni ; 0,64 Fe ; 0,27 Mn)	44700	.
Nickel, Manganèse, Cuivre (73 Cu ; 3 Ni ; 24 Mn)	47600	–
Rheotan (53,28 Cu ; 16,89 Zn ; 25,31 Ni ; 4,46 Fe ; 0,37 Mn)	52400	+
Manganèse, Cuivre (70 Cu ; 30 Mn)	100300	

892. Liquides. — La conductance des dissolutions croît d'a bord avec la richesse et passe généralement par un max

(1) L. Holborn et W. Wien. *Wied. Ann.*, t. XLVII ; 1892 et LVI ; 18

(2) Feussner et Lindeck, *Zeitschr. fur Instr. Kund.*, t. IX, p. 233 ; 18

…s la résis-
…qui servent
…lors, entre
…is ($74^{gr},59$)

	x.
	0,0326
	0,0327
	0,0333
	0,0333

…sente par 100
… du cuivre, le
…ait les nombres
…ves au contact

…ankel.	Ayrton et Perry
123	131
122	146
115	»
110	»
118	»
100	»
84	80
81	»
72	»
69	»
23	37
44	28
24	»
—25	»

…e cuivre vaudrait envi-
…al a trouvé $0^{v},80$ par des
…t l'expérience de Lord

…férents expérimentateurs,
…es liquides ou des liquides
…dants pour que l'on puisse

ACIDE SULFURIQUE A 22° (Kohlrausch et Nippolt).

Densité de la dissolution.	Proportion d'acide.	Résistivité.	Accroissement de conductance pour 1°.
0,9985	0,0	70,41	$0{,}47 \cdot 10^{-2}$
1,0000	0,2	41,05	0,47
1,0504	8,3	3,252	0,653
1,0989	14,2	1,787	0,646
1,1431	20,2	1,414	0,799
1,2045	28,0	1,239	1,317
1,2631	35,2	1,239	1,259
1,3163	41,5	1,347	1,410
1,3547	46,0	1,487	1,674
1,3994	50,4	1,672	1,582
1,4482	55,2	1,962	1,417
1,5026	60,3	2,412	1,794

SULFATE DE CUIVRE A 10° (Ewing et Mac Gregor).

Densité.	Résistivité.	Densité.	Résistivité.
1,0167	164,4	1,1386	35,0
1,0216	134,8	1,1432	34,1
1,0318	98,7	1,1679	31,7
1,0622	59,0	1,1829	30,6
1,0858	47,3	1,2051	20,3
1,1174	38,1	(saturée).	

SULFATE DE ZINC A 10° (Ewing et Mac Gregor).

1,0140	182,9	1,2709	28,5
1,0187	140,8	1,2891	28,3
1,0278	111,1	1,2895	28,5
1,0540	63,8	1,2987	28,7
1,0760	50,8	1,3288	29,2
1,1019	42,1	1,3530	31,0
1,1582	33,7	1,4053	32,1
1,1845	32,1	1,4174	33,4
1,2186	30,3	1,4220	33,7
1,2562	29,2	(saturée).	

ACIDE AZOTIQUE (densité = 1,36).

Température.	Résistivité.	Température.	Résistivité.
2°	1,74	16°	1,39
4	1,83	20	1,30
8	1,65	24	1,22
12	1,50	28	1,28

SOLUTION DE CHLORURE DE POTASSIUM.

M. Bouty a déterminé avec des soins particuliers la résistance des dissolutions de *chlorure de potassium* qui servent souvent comme termes de comparaison. On a alors, entre 0° et 30°, en désignant par m le nombre d'équivalents ($74^{gr},59$) par litre et posant $\rho_0 = \rho(1+\alpha t)$,

m.	ρ_0.	α.	m.	ρ_0.	α.
3	5,172	0,0230	0,2	72,23	0,0326
2	7,785	0,0259	0,1	141,0	0,0327
1	15,415	0,0291	0,01	1325	0,0333
0,5	30,49	0,0302	0,001	12697	0,0333

893. Forces électromotrices. — Si on représente par 100 la différence de potentiel de contact du zinc et du cuivre, le contact du zinc avec différents métaux donnerait les nombres suivants, d'où l'on déduira les valeurs relatives au contact de ces métaux entre eux :

CONTACT DES MÉTAUX.

		Volta.	Kohlrausch.	Hankel.	Ayrton et Perry
Zinc |	Platine.......	»	123	123	131
—	Charbon......	»	»	122	146
—	Palladium	»	»	115	»
—	Or...........	»	115	110	»
—	Argent.......	109	109	118	»
—	Cuivre........	100	100	100	»
—	Fer..........	82	75	84	80
—	Mercure......	»	»	81	»
—	Bismuth......	»	»	72	»
—	Antimoine....	»	»	69	»
—	Étain.........	55	»	23	37
—	Plomb........	45	»	44	28
—	Cadmium.....	»	»	24	»
—	Aluminium....	»	»	—25	»

D'après Kohlrausch, le contact zinc | cuivre vaudrait environ un demi-Daniell, ou $0^v,5$; M. Pellat a trouvé $0^v,80$ par des mesures électrométriques directes et l'expérience de Lord Kelvin (720) conduirait à $0^v,85$.

Les résultats obtenus par les différents expérimentateurs, pour le contact des métaux avec les liquides ou des liquides entre eux, ne sont pas assez concordants pour que l'on puisse les résumer simplement.

FORCES ÉLECTROMOTRICES DE CONTACT A 25° DÉDUITES DE L'EFFET PELTIER (1).

		v			v
Cuivre	Antim., E. B. (2).	—0,0151	Cuivre	Maillechort	+0,0287
—	Antimoine	—0,0056	—	Bismuth pur...	+0,0222
—	Fer............	—0,0029	—	Bismuth E. B. (3).	+0,0300
—	Cadmium.......	—0,00053	—	Sulfate à 12°...	+0,212 (4)
—	Zinc...........	—0,00045	Zinc	Sulfate à 12°.....	+0,241

894. Couples à liquides. — On a vu (**710**) que la force électromotrice des couples étalons à la température de 15° est

Daniell (modèle de Lord Kelvin)..... $1^v,074$,
Latimer Clark...................... $1^v,434$.

Le couple étalon de M. Gouy vaudrait $1,3944\,(1 - 0,002t)$. Les nombres trouvés par M. Limb (**712**) diffèrent très peu des précédents :

COUPLES USUELS.

	v
Volta (zinc, eau, cuivre)................................	0,85
Leclanché (zinc amalgamé, solution de sel ammoniac, bioxyde de manganèse, charbon)........................	1,46
Warren de la Rue (zinc, solution de sel ammoniac, chlorure d'argent, argent)................................	1,02
Daniell (zinc amalgamé, 1 acide sulfurique + 12 eau, solution saturée de sulfate de cuivre, cuivre)...............	0,97
J. Regnauld (zinc amalgamé, 1 acide sulfurique + 12 eau, sulfate de cadmium, cadmium)........................	0,34
Marié-Davy (zinc amalgamé, 1 acide sulfurique + 12 eau, sulfate de protoxyde de mercure, charbon)...........	1,51
Bunsen (zinc amalgamé, 1 acide sulfurique + 12 eau, acide azotique fumant, charbon)..........................	1,94
Grove (zinc amalgamé, 1 acide sulfurique + 4 eau, acide azotique fumant, platine)............................	1,95
Poggendorff (zinc amalgamé, 12 bichromate de potasse + 25 acide sulfurique + 100 eau, charbon).................	2,01

(1) Le Roux, *Ann. de Chim. et de Phys.* [4], t. X, p. 248; 1867.
(2) 1 éq. d'antimoine, 1 éq. de cadmium et 1/5 du poids total de bismuth.
(3) 10 bismuth + 1 antimoine.
(4) Bouty, *Journ. de Phys.*, t. IX, p. 229; 1880.

895. Couples thermoélectriques. — Dans la plupart des cas, la force électromotrice d'un couple se représente par une parabole (**203**), et le pouvoir thermoélectrique des deux métaux est une fonction linéaire de la température (**730**). La chaleur spécifique d'électricité étant nulle pour le plomb, on peut écrire, si on rapporte tous les métaux au plomb,

$$\varphi(t) = \frac{dE}{dt} = A + Bt = k(t_n - t).$$

Le coefficient $k = -B$ est alors le rapport constant de la chaleur spécifique d'électricité à la température absolue (**210**); le point neutre t_n du couple formé par le métal considéré avec le plomb satisfait à la condition $A + Bt_n = 0$.

Pour deux métaux différents M et M′, on a

$$\frac{dE}{dt} = A + Bt - (A' + B't).$$

Le point neutre t_n est encore déterminé par la condition

$$A - A' + (B - B')t_n = 0.$$

La force électromotrice E_1^2, entre les températures t_1 et t_2 dont la moyenne est $\theta = \frac{t_1 + t_2}{2}$, du couple formé par ces deux métaux a pour expression

$$E_1^2 = (B' - B)(t_2 - t_1)\left[\frac{A - A'}{B - B'} - \theta\right].$$

Cette force électromotrice est égale au produit de la différence de température $t_2 - t_1$ des deux soudures par la différence des pouvoirs thermoélectriques des métaux relatifs à la température moyenne θ.

Il n'y a pas lieu de s'étonner que les nombres obtenus par différents expérimentateurs ne soient pas très concordants, à cause de l'influence des impuretés ou des changements d'état physique. Il est difficile, par exemple, avec des barreaux de bismuth préparé par fusion, d'obtenir des couples bismuth-

cuivre identiques à $\frac{1}{10}$ près; l'addition d'un dixième d'antimoine au bismuth fait presque doubler la force électromotrice du couple.

Dans le tableau suivant, les premiers nombres ont été calculé d'après les expériences de M. Tait [1], en admettant que la force électromotrice du couple de Grove pris comme terme de comparaison soit égale à $1^{v},95$; les autres proviennent de différents observateurs.

POUVOIRS THERMOÉLECTRIQUES EN MICROVOLTS, RAPPORTÉS AU PLOMB.

Corps.	A.	B.10^2.	A + Bt à 20°.	A + Bt à 50°.
Cadmium	− 2,63	− 4,24	− 3,48	− 4,75
Zinc	− 2,32	− 2,38	− 2,79	− 3,51
Argent	− 2,12	− 1,47	− 2,41	− 2,86
Or	− 2,80	− 1,01	− 3,00	− 3,30
Cuivre	− 1,34	− 0,94	− 1,52	− 1,81
Alliage (85 Pt + 15 Ir)	− 7,90	− 0,62	− 8,03	− 8,21
Alliage (95 Pt + 5 Ir)	− 6,15	− 0,55	− 6,26	− 6,42
Étain	+ 0,43	− 0,55	+ 0,32	+ 0,16
Aluminium	+ 0,76	− 0,39	+ 0,68	+ 0,56
Platine écroui	− 2,57	+ 0,74	− 2,42	− 2,20
Magnésium	− 2,22	+ 0,94	− 2,03	− 1,75
Platine malléable	+ 0,60	+ 1,09	+ 8,82	+ 1,15
Alliage (90 Pt + 10 Ir)	− 5,90	+ 1,33	− 5,63	− 5,23
Acier	− 11,27	+ 3,25	− 10,62	− 9,65
Palladium	+ 6,18	+ 3,55	+ 6,90	+ 7,96
Fer	− 17,15	+ 4,82	− 16,20	− 14,74
Maillechort	+ 11,94	+ 5,06	+ 12,95	+ 14,47
Nickel (− 18° à 175°)	+ 21,80	+ 5,06	+ 22,80	+ 24,33
— (− 250° à 300°)	+ 83,57	− 23,84	+ 78,80	+ 71,65
— au delà de 340°	+ 3,04	+ 5,06	+ 8,00	+ 5,57
Charbon de cornue [2]	+ 20,54	− 2,9	+ 19,96	+ 19,09
Alliage (20 Pt + 80 Ag)	− 26,83	− 12,4	− 29,31	− 33,03
» (25 Pt + 75 Ag)	− 35,2	− 18,65	− 38,93	− 44,52
» (65 Pt + 35 Ag)	− 40,93	− 24,1	− 45,75	− 52,89
» (95 Au + 5 Fe)	− 41,06	+ 14,9	+ 38,08	− 33,61
Manganèse-Thallium, de 25 à 50 °/₀ de thallium	+ 6,64	− 1,53	+ 6,33	+ 5,88
Platinoïde [3]	−1128	−410	−1210	−1333

(1) Tait, *Phil. Trans. R. S. E.*, t. XXVII, p. 125; 1873.
(2) Mac Gregor et C.-G. Knott, *Phil. Trans. E. R. S.*, t. XXVIII, p. 321; 1879.
(3) Bottomley et Tanakadati, *Proc. L. R. S.*, t. XLVI, p. 286; 1889.

M. Fleming Jenkin [1] a déduit des expériences de M. Matthiessen les pouvoirs thermoélectriques de différents corps par rapport au plomb, à la température de 20°.

Bismuth ord. comprimé..	+96	Argent pur écroui........	— 3,0
— pur — ..	+88	Zinc pur comprimé......	— 3,7
— cristallisé axial..	+64	Cuivre galvanoplastique..	— 3,8
— — équat.	+45	Antimoine comprimé....	— 6,0
Cobalt..................	+22	Arsenic................	— 13,41
Maillechort.............	+11,63	Acier (cordes de piano)..	— 17,31
Mercure................	+ 0,413	Antimoine axial.........	— 22,4
Étain ou Cuivre.........	— 0,1	— équatorial.....	— 26,1
Platine................	— 0,9	Phosphore rouge........	— 29,4
Or.....................	— 1,2	Tellure.................	—500,0
Antimoine comprimé....	— 2,8	Sélénium...............	—800,0

D'après Ed. Becquerel [2], les couples formés par le cuivre avec différents métaux ou alliages donneraient

Couple formé avec le cuivre et l'un des métaux suivants.	Force électromotrice entre 0° et 100° [3]		Pouvoir thermoélectrique à 50° en microvolts	
	en milliém. de Daniell.	en milliém. de volt.	par rapport au cuivre.	par rapport au plomb.
Tellure................	+39,95	+42,74	—427,4	— 429,3
Sulfure de cuivre fondu..	+32,76	+35,05	—350,5	— 352,4
Antimoine et cadmium [4].	+18,13	+19,40	—194,0	— 195,0
Antimoine et zinc [4]...	+ 9,02	+ 9,65	— 96,5	— 98,4
Antimoine ordinaire.....	+ 1,41	+ 1,51	— 15,1	— 17,0
Fer du commerce.......	+ 0,95	+ 1,02	— 10,2	— 12,1
— autre fil...........	+ 0,674	+ 0,72	— 7,2	— 9,1
Cadmium fondu.........	+ 0,033	+ 0,035	— 0,35	— 2,45
Argent en fil...........	+ 0,026	+ 0,028	— 0,28	— 2,18
Zinc ordinaire fondu.....	— 0,018	— 0,019	+ 0,19	— 1,71
— autre..............	— 0,037	— 0,039	+ 0,39	— 1,51
Platine en fil...........	— 0,090	— 0,096	+ 0,96	— 0,94
— autre............	— 0,378	— 0,404	+ 4,04	+ 2,14
Charbon de cornue......	— 0,142	— 0,152	+ 1,52	— 0,38
Étain ordinaire.........	— 0,147	— 0,157	+ 1,57	— 0,33
Plomb ordinaire...... .	— 0,187	— 0,19	+ 1,9	»
Mercure................	— 0,483	— 0,52	+ 5,2	+ 3,3
Palladium en fil.........	— 0,82	— 0,88	+ 8,8	+ 6,9
Maillechort en fil......	— 1,26	— 1,35	+ 13,6	+ 12,7
Nickel en fil...........	— 1,63	— 1,74	+ 17,4	+ 15,5
Bismuth ordinaire......	— 3,91	— 4,18	+ 41,8	+ 39,9
10 Bismuth + 1 Antimoine.	— 6,20	— 6,63	+ 66,3	+ 64,4

[1] Fl. Jenkin, *Electricity and magnetism.*, p. 176; 1373.
[2] Ed. Becquerel, *Ann. de Chim. et de Phys.*, [4], t. VIII, p. 389; 1866.
[3] Le courant va du métal au cuivre par la soudure chaude quand la force électromotrice est positive. — [4] Équivalents égaux.

par d'autres

grandeurs magné-

G. S., partie

bres beaucoup p

Variation annuelle

−5',3

−1',6

−0,00017

−0,00016

−0,00008

magnétiques

valeurs de

du bismuth

tation est à peu

indépendant de la température, sans que le phénomène a fusion paraisse apporter aucune modification notable la valeur de ce coefficient.

:s nombres suivants sont empruntés aux expériences de day, Ed. Becquerel et M. P. Curie.

VALEURS DE $-k.10^6$.

	Faraday.	Becquerel.	Curie.
Soufre	0,87	0,76	0,51
Phosphore	1,24	1,10	0,92
Sélénium	1,25	1,11	0,32
Tellure	»	»	0,311
Iode	»	»	0,385
Brome	»	»	0,41
Zinc	0,56	0,17	»
Plomb	»	1,03	»
Cuivre	1,27	»	»
Argent	1,74	»	»
Or	2,60	»	»
Eau	0,72	0,67	0,79
Sel gemme	»	»	0,58
Quartz	»	»	0,441
Cire	»	0,38	»
Éther	0,56	»	»
Alcool	0,58	0,53	»
Camphre	0,61	»	»
Huile de lin	0,63	»	»
Acide azotique	0,65	»	»
Sulfure de carbone	0,74	0,89	»
Acide sulfurique	0,77	»	»
Chlorure d'arsenic	0,91	»	»
Borate de plomb fondu	1,02	»	»
Chlorure de potassium	»	»	0,55
Sulfate de potasse	»	»	0,43
Azotate de potasse	»	»	0,33

s corps faiblement *magnétiques* se comportent d'une ma- toute différente, car le coefficient d'aimantation est sen- ment en raison inverse de la température absolue (**833**). ›ur les *dissolutions*, les valeurs suivantes, déterminées Ed. Becquerel, correspondent à la température moyenne 5°. La colonne k' désigne leurs rapports au coefficient de supposé égal à $0,67.10^{-6}$.

DISSOLUTIONS DANS L'EAU.

	Densité.	$k.10^6$.	k'.
Chlorure de sodium.........	1,2080	— 0,75	— 1,12
— de magnésium.....	1,3197	— 0,81	— 1,21
Protochlorure de fer........	1,0695	+ 6,07	+ 9,06
— —	1,2767	+24,21	+36,13
— —	1,4334	+44,16	+65,91
Sulfate de cuivre............	1,1265	+ 0,54	+ 0,81
— nickel............	1,0827	+ 1,46	+ 2,18
— fer	1,1728	+12,09	+18,04
— —	1,1923	+14,17	+21,15
— sesquioxyde de fer.	1,1587	+ 9,24	+13,79

Les expériences de Quincke, par la méthode des changements de niveau (**832**), conduiraient à des valeurs très différentes, le coefficient de l'eau étant égal à $-4,27.10^{-10}$ pour une densité de 0,9983. Nous donnerons seulement les rapports au coefficient de l'eau.

DISSOLUTIONS DANS L'EAU. — MAGNÉTIQUES.

	Densité.	k'.
Sulfate de manganèse.........	1,4165	+51,7
—	1,1417	7,43
Chlorure de manganèse........	1,3695	68,2
—	1,1891	32,1
Chlorure de fer................	1,5083	77,5
—	1,0564	7,14
Sulfate de fer..................	1,2217	23,4
—	1,0750	6,83
— ammoniacal.......	1,1191	7,59
Chlorure de fer	1,3096	41,70
Sulfate de cobalt..............	1,2584	22,2
Sulfate double de cobalt et d'am.	1,1055	5,23
Chlorure de cobalt............	1,1290	14,9
Sulfate de nickel..............	1,2921	10,44
— de nickel et d'amm.....	1,0429	0,13
Chlorure de nickel.	1,1385	5,81
Alun de chrome..............	1,0471	0,56
Protochlorure de chrome......	1,2030	11,11
Sesquichlorure de chrome......	1,3866	6,73
Sulfate de didyme.............	1,1007	0,96
Ferrocyanure de potassium....	1,1381	1,53
Sulfate de cuivre........	1,1651	+ 1,23

DISSOLUTIONS DANS L'EAU. — DIAMAGNÉTIQUES.

	Densité.	k'
Sulfate de cérium	1,2413	— 0,51
— de lanthane	1,0609	0,69
— de cuivre et d'amm	1,0259	0,37
Bichromate de potasse	1,0545	0,833
Chlorure de zinc	1,4651	0,882
Ferricyanure de potassium	1,1723	0,915
Permanganate de potasse	1,0309	0,930
Ammoniaque	0,9307	0,959
Acide chlorhydrique	1,1651	0,981
Azotate de bismuth	1,6251	1,063
Sulfate de magnésie	1,25	1,067
Chlorure de zinc	1,8555	1,094
Sulfate de zinc	1,4393	1,101
Chlorure de calcium	1,3392	1,154
Iodure de potass. et de mercure	3,0843	1,205
Iodure de baryum et de mercure	3,5266	—1,420

CORPS DIVERS.

Chlorure de mang. dans l'alcool	1,0304	+35,7
— dans l'alcool méthyl	1,0806	41,6
Chlorure de fer dans l'ac. chlorhy.	1,3683	45,0
— — —	1,2600	18,3
— — —	1,2349	13,1
— dans l'acool méthylique	1,5374	97,1
— — —	1,1335	43,7
— — —	0,8928	+11,1
Éther	0,7152	— 0,75
Alcool méthylique	0,7915	0,81
Alcool	0,7929	0,815
Benzol	0,8822	0,821
Essence de térébenthine	0,8690	0,823
Acide azotique	1,3872	0,831
Bichromate de potasse	1,0545	0,833
Pétrole	0,7988	0,858
Sulfure de carbone	1,2644	0,893
Soufre dans le sulf. de carbone	1,3976	0,902
Huile de colza	0,9159	0,911
Iode dans le sulfure de carbone	1,2636	0,925
Glycérine	1,2517	0,954
Acide sulfurique	1,8326	0,982
Brome	3,147	1,715
Phosphore	1,764	1,957
Mercure	13,546	— 3,142

Les rapports des coefficients d'aimantation des *gaz* de l'air (**833**), pour les mêmes conditions de températu[re et de] pression, seraient

	Faraday.	Becquerel.	Quincke.	Eßmoff
Air..............	1	1	1	1
Oxygène..........	+5,120	+4,760	+4,916	+4,8
Azote............	+0,087	»	+0,028	−0,01
Hydrogène........	−0,027	»	0,023	−0,00
Chlore...........	»	−0,120	»	»
Acide carbonique..	»	−0,133	0,090	−0,03
Ammoniaque.......	−0,146	−0,005	»	»
Protoxyde d'azote.	»	−0,047	0,092	−0,01
Bioxyde d'azote....	»	+1,300	»	+1,60
Cyanogène........	−0,265	»	»	»
Acide sulfureux....	»	−0,013	»	»
Éthylène.........	+0,172	−0,214	0,079	−0,068
Gaz des marais....	»	»	0,036	−0,063

897. Pouvoirs rotatoires magnétiques. — Les détermina[tions] les plus précises de la *constante de Verdet* (**479**), c'est-à-di[re] la rotation du plan de polarisation entre deux points do[nt la] différence de potentiel magnétique est égale à l'unité C.[G.S.], ont été faites sur le *sulfure de carbone*.

Pour la température de 0° et la raie D, on aurait

Gordon (²)........	0',04330	Kœpsel (⁴)........	0',04
L. Rayleigh (³)....	0',04298	H. Becquerel (⁵)..	0',0

Variation avec la température (⁶) :

$$R = R_0(1 - 0,001\,04\,t - 0,000\,014\,t^2).$$

RAPPORT DES ROTATIONS DANS LE SPECTRE (Verdet).

Raies			
C.	D.	E.	F.
0,592	0,768	1,000	1,234

(¹) A. Efimoff, *Journ. de Phys.* [2], t. VII, p. 494; 1888.
(²) Gordon, *Phil. Trans. L. R. S.*; 1877, p. 1.
(³) L. Rayleigh, *Proc. L. R. S.*, n° 232; 1884.
(⁴) Kœpsel, *Wied. Ann.*, t. XXVI, p. 456; 1885.
(⁵) H. Becquerel, *Ann. de Chim. et de Phys.* [5], t. XII; 18..
(⁶) E. Bichat, *Journ. de Phys.*, t. VII, p. 204; 1879 et t. ..

Pour l'*eau*, la constante de Verdet à la température de 15° est 0',0131, d'après M. H. Becquerel, dont les expériences conduisent aux valeurs suivantes pour un certain nombre de corps, *solides* ou *liquides*.

POUVOIRS ROTATOIRES A LA TEMPÉRATURE DE 15°

Lumière jaune (raie D).

			Pouv. rotatoire rapporté	
	Densité.	Indice de réfraction.	au sulfure de carbone.	à l'eau.
Spath fluor	»	1,4332	0,206	0,668
—	»	»	0,234	0,760
Diamant	»	2,4200	0,301	0,977
Borax fondu	»	1,5010	0,405	1,315
Verre-crown	2,559	1,5260	0,481	1,561
— flint	3,168	1,5790	0,771	2,503
— —	3,540	1,6140	0,987	3,204
— —	4,380	1,7200	1,360	4,416
— —	4,860	1,7650	1,533	4,980
Spinelle	»	1.7150	0,496	1,610
Silvine	»	1,4830	0,672	2,182
Sel gemme	2,260	1,5430	0,843	2,737
Borate de plomb	»	1,7800	1,405	4,565
—	»	»	1,439	4,672
Silicate de plomb	»	1,8200	1,832	5,950
Blende	4,095	2,3690	5,295	17,19
Acide azotique fumant	»	1,4010	0,206	0,668
Acide sulfurique monohydr.	1,854	1,4284	0,247	0,803
Alcool méthylique	0,836	13,530	0,253	0,823
— propylique	0,811	1,3836	0,279	0,907
— butylique	0,807	1,3934	0,294	0,957
Eau	»	1,3340	0,308	1
Alcool amylique	0,815	1,4046	0,311	1,010
Chloroforme	»	1,4520	0,380	1,234
Protochlorure de carbone	»	1,4580	0,404	1,315
Chlorure de silicium	1,523	1,4090	0,444	1,442
Acide chlorhydrique	1,163	1,4071	0,490	1,590
Xylène	0,866	1,4932	0,525	1,702
Toluène	0,871	1,4928	0,575	1,868
Benzine	0,883	1,4998	0,636	2,064
Protochlorure de phosphore	1.450	1,5080	0,651	2,114
— de carbone	»	1,5620	0,761	2,471
Bichlorure de soufre	»	1,6190	0,932	3,025

La
de m
sulf

Pr

C

Aci
Chl

Io

Az

I
ten
exp

O
A
A
A

(1



DISSOLUTIONS DANS L'EAU.

	Densité.	Poids dans l'unité de vitesse.	Pouvoir rotatoire.	Pouvoir rotatoire moléculaire.
Protochlorure d'étain.......	1,3280	0,401	+ 2,05	+ 2,78
—	1,1637	0,198	+ 1,52	+ 2,81
—	1,1112	0,120	+ 1,35	+ 2,71
Chlorure de zinc...........	1,2851	0,266	+ 1,51	+ 1,65
—	1,1595	0,150	+ 1,24	+ 1,59
Sel ammoniac.............	1,0718	0,247	+ 1,37	+ 2,15
—	1,0493	0,129	+ 1,18	+ 2,0
Chlorure de sodium........	1,2052	0,316	+ 1,38	+ 1,58
—	1,1058	0,158	+ 1,19	+ 1,50
—	1,0546	0,079	+ 1,11	+ 1,72
Chlorure de potassium.....	1,6000	0,264	+ 1,25	+ 1,36
Iodure de potassium	1,6743	0,964	+ 2,60	+ 1,95
—	1,3398	0,482	+ 1,82	+ 1,98
—	1,1705	0,241	+ 1,40	+ 1,97
—	1,0871	0,120	+ 1,21	+ 2,08
Bichlorure de cuivre	1,5158	0,6408	+ 1,70	+ 1,29
—	1,2789	0,3204	+ 1,43	+ 1,47
—	1,1330	0,1602	+ 1,20	+ 1,45
Protochlorure de fer........	1,4331	0,5283	+ 0,20	— 1,34
—	1,2141	0,2461	+ 0,76	— 0,70
—	1,1093	0,1320	+ 0,91	— 0,52
—	1,0548	0,0660	+ 0,95	— 0,51
Perchlorure de fer.........	1,6933	1,0247	—15,58	—15,87
—	1,5315	0,7657	— 8,77	—12,45
—	1,3230	0,4410	— 2,68	— 8,05
—	1,1681	0,2205	— 0,12	— 4,82
—	1,0864	0,1102	+ 0,62	— 3,21
—	1,0445	0,0551	+ 0,87	— 3,21
—	1,0232	0,0275	+ 0,94	— 2,17
Chromate de potasse......	1,3598	0,504	+ 0,75	— 0,20
Bichromate de potasse.....	1,0786	0,109	+ 0,97	— 0,73
Acide chromique...........	1,3535	0,470	+ 0,31	— 1,21
Azotate d'urane............	2,0267	1,2727	+ 0,41	— 0,27
—	1,7640	0,9245	+ 0,60	— 0,26
—	1,3865	0,4622	+ 0,81	— 0,25
—	1,1963	0,2311	+ 0,90	— 0,25
Chlorure de nickel.........	1,4685	0,5311	+ 2,08	+ 2,15
—	1,2432	0,2651	+ 1,51	+ 2,00
—	1,1233	0,1327	+ 1,25	+ 1,94
—	1,0690	0,0663	+ 1,12	+ 1,94

La solution saturée d'*iodure de potassium* et d'*iodure rouge de mercure* a un pouvoir rotatoire triple environ de celui du sulfure de carbone [1].

DISSOLUTIONS DANS L'ACIDE CHLORHYDRIQUE.

	Densité.	Poids dans l'unité de volume.	Pouvoir rotatoire.	Pouvoir rotatoire moléculaire.
Protochlorure d'antimoine.....	2,4755	2,1611	+4,64	+1,92
—	1,8573	1,0805	+3,45	+2,08
—	1,5195	0,5402	+2,67	+2,10
—	1,3420	0,2701	+2,13	+1,63
Chlorure de bismuth.........	2,0822	1,3204	+3,91	+2,28
—	1,6550	0,6602	+3,12	+2,76
—	1,4156	0,3301	+2,35	+2,69

POUVOIRS ROTATOIRES MOLÉCULAIRES PAR RAPPORT A L'EAU (Jahn).

Acide chlorhydrique........	4,67
Chlorure de lithium.........	4,61
— sodium.........	5,36
— potassium......	5,66
— calcium.........	9,39
— strontium.......	9,71
— baryum.........	10,09
— cadmium.......	11,78
— manganèse......	9,04
Iodure de sodium..........	18,46
— potassium.......	18,95
— cadmium........	40,89
Azotate de soude...........	1,37
— potasse..........	1,35
Bromure de sodium........	9,19
— potassium......	9,36
— calcium........	17,61
— strontium......	18,16
— baryum........	18,54
— cadmium......	19,70
Sulfate de lithine...........	2,27
— soude...........	3,54
— potasse..........	3,57
— cadmium........	5,17
— manganèse......	2,28
Chromate de manganèse....	3,53
— potasse.......	3,55

Pour les *gaz* et *vapeurs*, le pouvoir rotatoire, ramené à la température de 0° et à la pression de 76^c, est, d'après les expériences de M. H. Becquerel et de M. Bichat :

	$\rho.10^6$.
Oxygène..............	6',28
Air..................	6',83
Azote................	6',92
Acide carbonique......	13',00
Protoxyde d'azote......	16',90
Acide sulfureux........	38',40
Éthylène..............	34',48
Sulfure de carbone.....	23',49

[1] A. CORNU et A. POTIER, *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. CII, p. 387; 1866.

Il n'existe pas de relation absolue entre les propriétés magnétiques ou diamagnétiques des corps (481) et le sens de leur pouvoir rotatoire. Verdet donne la liste suivante des caractères relatifs aux principaux sels.

INFLUENCE DU CARACTÈRE MAGNÉTIQUE.

Pouvoir rotatoire négatif.	Pouvoir rotatoire positif.
CORPS MAGNÉTIQUES.	
Sels de fer. — de sesquioxyde de manganèse. Acide chromique. Chromate de potasse. Bichromate de potasse. Bichlorure de titane. Sels de cérium.	Sels de nickel. — de cobalt. — de protoxyde de manganèse. Cyanure rouge de fer et de potassium.
CORPS DIAMAGNÉTIQUES.	
Chlorate neutre de potasse. Bichlorure de titane. Nitrate d'urane. Sels de magnésium.	Presque tous les corps. Molybdate de soude. Molybdate d'ammoniaque. Sels d'aluminium.

FIN



TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE — MÉTHODES DE MESURE

CHAPITRE PREMIER

MESURES MÉCANIQUES

LONGUEURS, MASSES ET ANGLES

OSCILLATIONS.

COUPLES

CHAPITRE DEUXIÈME

PROPRIÉTÉS DES COURANTS CIRCULAIRES

CHAPITRE TROISIÈME

COEFFICIENTS D'INDUCTION

DEUXIÈME PARTIE. — MESURES ÉLECTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

ÉLECTROMÉTRIE

CHAPITRE DEUXIÈME

MESURE DES COURANTS

CHAPITRE TROISIÈME

RÉSISTANCES

APPAREILS GRADUÉS

MÉTHODES DIVERSES DE COMPARAISON

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

MESURES ABSOLUES

CHAPITRE QUATRIÈME

FORCES ÉLECTROMOTRICES

CHAPITRE CINQUIÈME

CAPACITÉS ET DIÉLECTRIQUES.

CHAPITRE SIXIÈME

CONSTANTES DES CIRCUITS

CHAPITRE SEPTIÈME

RAPPORT DES UNITÉS

CHAPITRE HUITIÈME

DÉCHARGES ÉLECTRIQUES

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

CHAPITRE DEUXIÈME

CHAMPS MAGNÉTIQUES

MÉTHODES GÉNÉRALES.

CHAMP TERRESTRE.

MAGNÉTISME DES NAVIRES.

QUATRIÈME PARTIE — COMPLÉMENT

CHAPITRE PREMIER

ÉLECTRICITÉ INDUSTRIELLE

TRANSMISSIONS TÉLÉGRAPHIQUES.

APPLICATIONS DIVERSES.

MACHINES D'INDUCTION.

COURANTS ALTERNATIFS.

MOTEURS ÉLECTRIQUES.

CHAPITRE DEUXIÈME

CONSTANTES NUMÉRIQUES.

CORBEIL. — IMP. ÉD. CRÉTÉ.



